Leipziger Schülergesellschaft für Mathematik

Winterschule Rudolstadt
15. Februar 2007

Kleine Olympiade

Gruppe A

Name:

....

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Optimum	8	9	8	7	8	40
Punkte						

1 Vollständige Induktion (8 Punkte)

Zeige:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Zeige:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n \cdot F_{n+1},$$

wobei (F_n) die Fibonacci-Folge ist.

2 Kryptologie (9 Punkte)

Eine leider unzuverlässige Schlüsselvergabestelle hat mir einen Schlüssel $s^2 = 202$ zugewiesen, gerechnet wird in $\mathbb{Z}_{3953}$, also modulo pq mit $p = 59$, $q = 67$.
Schlüpfe in die Rolle von Mr. X und versuche meinen Schlüssel zu knacken, siehe unten.
Benutze dazu den im chinesischen Restesatz beschriebenen Ringisomorphismus:

$$\varphi\colon \mathbb{Z}_{3953} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$$

a) Bestimme zunächst $\varphi(s^2) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ sowie ein u mit $u^2 = \varphi(s^2)$.

b) Berechne $s := \varphi^{-1}(u)$ mit Hilfe des Euklidschen Algorithmus.

3 Geometrie (8 Punkte)

Gegeben seien drei konzentrische Kreise k_1, k_2 und k_3 mit den Radien 3cm, 4cm bzw. 5cm.
Konstruiere ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei C, sodass A auf k_1, B auf k_2 und C auf k_3 liegen.
Beschreibe die Konstruktion und untersuche die Eindeutigkeit.

4 Unendlichkeiten (7 Punkte)

Betrachte das HILBERT-Hotel im Originalzustand, d.h. ohne weitere Zimmerfluchten und sonstige Anbauten. Das Hotel ist voll, aber es kommt noch ein Zug mit abzählbar unendlich vielen Waggons mit je abzählbar unendlich vielen Abteilen mit je abzählbar unendlich vielen Personen. Wie im Buch beschrieben kennt der Hoteldirektor eine Formel, die dem k-ten Passagier des l-ten Abteils im m-ten Waggon sein Zimmer zuweist. Wie könnte diese Formel aussehen (Begründung!)?

Hinweis: Vielleicht hilft dir ja die Formel für die abzählbar unendlich vielen Busse mit je abzählbar unendlich vielen Personen.

5 Spieltheorie (8 Punkte)

Es sei G ein Spiel, welches aus drei Teilspielen G_1, G_2 und G_3 besteht. Ein Spielzug in G ist genau ein Spielzug in einem der Teilspiele. G ist normal, neutral und endet, wenn alle Teilspiele beendet sind.

- G_1 ist ein Subtraktionsspiel mit $D = \{3, 5, 7\}$ und dem Startwert $n = 2406$.
- G_2 ist ein Haufen mit zwölf Münzen. Pro Spielzug darf eine beliebige Anzahl von Münzen entfernt werden.
- G_3 ist das Coin-Sliding-Nimble-Spiel, wobei fünf Münzen auf den Feldern $(1, 3, 4, 4, 6)$ liegen. Pro Spielzug darf eine der Münzen beliebig viele Felder in Richtung 0 gezogen werden. Überholen und Türme bauen ist erlaubt. Wenn alle Münzen auf 0 liegen, ist das Spiel beendet.

a) Was sollte dein nächster Zug im Spiel G sein, um zu gewinnen?

b) Was machst du, wenn dein Gegner dran wäre und im Teilspiel G_1 sieben subtrahiert?