

Kleine Olympiade

Gruppe B

Name:

| | | | | | | |
|---------|---|---|---|---|----|----------|
| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
| Optimum | 9 | 7 | 7 | 6 | 11 | 40 |
| Punkte | | | | | | |

.....

1 Kryptologie

(9 Punkte)

Eine leider unzuverlässige Schlüsselvergabeinstelle hat mir einen Schlüssel $s^2 = 202$ zugewiesen, gerechnet wird in \mathbb{Z}_{3953} .

Schlüpfe in die Rolle von Mr. X und versuche meinen Schlüssel zu knacken, siehe unten. Benutze dazu den im chinesischen Restesatz beschriebenen Ringisomorphismus:

$$\varphi: \mathbb{Z}_{3953} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$$

- a) Finde Primzahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $n = 3953 = pq$.

Hinweis: Die kleinste natürliche Zahl, deren Quadrat größer als 3953 ist, ist 63 (das reicht dem cleveren Mr. X, um den Schlüssel auch ohne Taschenrechner zu knacken).

- b) Bestimme $\varphi(s^2) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ sowie ein u mit $u^2 = \varphi(s^2)$.
- c) Berechne $s := \varphi^{-1}(u)$ mit Hilfe des EUKLIDischen Algorithmus.

2 Geometrie

(7 Punkte)

Gegeben sei ein Rhombus $ABCD$, P sei ein Punkt auf der Strecke \overline{AD} und Q ein Punkt auf der Strecke \overline{BC} . Der Winkel $\angle DAB$ sei größer als 90° . Ferner sei E die Ellipse mit den Scheitelpunkten A, B, C, D .

- a) Konstruiere die Brennpunkte F_1 und F_2 von E .
- b) Konstruiere die Schnittpunkte der Gerade PQ mit E .

3 Kettenbrüche

(7 Punkte)

Berechne den Kettenbruch zu $2 + \sqrt{6}$.

4 Konstruktives Beweisen

(6 Punkte)

- Zeige (auf konstruktive Weise), dass $\text{ld } 9$ (also der duale Logarithmus von 9) keine rationale Zahl ist (es ist keine formale Herleitung verlangt). Begründe warum dein Beweis nicht den Prinzipien der konstruktiven Logik widerspricht.
- Finde im Kalkül des natürlichen Schließens eine Herleitung für:

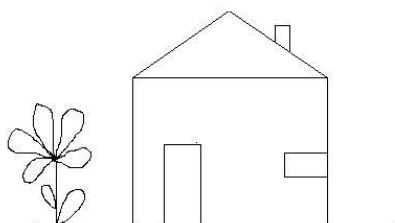
$$(C \wedge A) \rightarrow B \vdash C \rightarrow (A \rightarrow B)$$

5 Spieltheorie

(11 Punkte)

Es sei G ein Spiel, welches aus fünf Teilspielen G_1, \dots, G_5 besteht. Ein Spielzug in G ist genau ein Spielzug in einem der Teilspiele. G ist normal, neutral und endet, wenn alle Teilspiele beendet sind.

- G_1 ist ein Subtraktionsspiel mit $D = \{2, 4, 7\}$ und dem Startwert $n = 2023$.
- G_2 ist ein Haufen mit fünf Münzen.
- G_3 ist Wythoff mit der Dame auf $(7,5)$. Es handelt sich hierbei also um ein viertel unendliches Schachbrett, wobei die Dame nicht von der Ecke des Schachbretts wegziehen darf. Wer auf dem Feld $(1,1)$ steht, kann nicht mehr ziehen.
- G_4 ist das Coin-Sliding-Nimble-Spiel, wobei sich fünf Münzen auf den Feldern $(0, 3, 6, 6, 7)$ liegen. Pro Spielzug darf eine der Münzen beliebig viele Felder in Richtung 0 gezogen werden. Wenn alle Münzen auf 0 liegen, ist das Spiel beendet.
- G_5 ist das grüne Hackenbusch Spiel mit folgendem Graph:



- Was sollte dein nächster Zug im Spiel G sein, um zu gewinnen?
- Was machst du, wenn dein Gegner dran wäre und im Teilspiel Whythoff G_3 die Dame drei Felder nach Westen zieht (auf $(4,5)$)?