### Aufgabe I–1

Man finde alle surjektiven Funktionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass für alle positiven ganzen Zahlen $a$ und $b$ genau eine der folgenden Gleichungen erfüllt ist:

$$f(a) = f(b),$$
$$f(a+b) = \min\{f(a), f(b)\}.$$

Hinweise: $\mathbb{N}$ bezeichnet die Menge aller positiven ganzen Zahlen. Eine Funktion $f\colon X \to Y$ heißt surjektiv, falls für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert mit $f(x) = y$.

### Aufgabe I–2

Sei $n \geqslant 3$ eine positive ganze Zahl. Eine *innere Diagonale* eines *einfachen $n$-Ecks* ist eine Diagonale, die im $n$-Eck enthalten ist. Man bezeichne mit $D(P)$ die Anzahl aller inneren Diagonalen eines einfachen $n$-Ecks $P$ und mit $D(n)$ den kleinsten möglichen Wert von $D(Q)$, wobei $Q$ ein einfaches $n$-Eck ist. Man beweise, dass genau dann keine zwei inneren Diagonalen von $P$ einander schneiden (außer möglicherweise in einem gemeinsamen Endpunkt), wenn $D(P) = D(n)$ gilt.

Hinweis: Ein einfaches $n$-Eck ist ein sich nicht selbst überschneidendes Polygon mit $n$ Ecken. Ein Polygon ist nicht notwendigerweise konvex.

### Aufgabe I–3

Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck. Sei $E$ der Schnittpunkt der Parallelen zu $AC$ bzw. $BD$, die durch die Punkte $B$ bzw. $A$ gehen. Die Geraden $EC$ bzw. $ED$ schneiden den Umkreis von $AEB$ noch einmal in $F$ bzw. $G$. Man zeige, dass die Punkte $C$, $D$, $F$ und $G$ auf einem Kreis liegen.

### Aufgabe I–4

Man bestimme alle Paare positiver ganzer Zahlen $(m, n)$, für die teilerfremde ganze Zahlen $a$ und $b$ größer als 1 existieren, sodass

$$\frac{a^m + b^m}{a^n + b^n}$$

eine ganze Zahl ist.

Zeit: 5 Stunden
Fragezeit: 60 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.
Die Reihenfolge der Aufgaben hängt nicht von deren Schwierigkeitsgrad ab.

**Aufgabe T–1**

Man zeige, dass für alle positiven reellen Zahlen $a$, $b$, $c$ mit $abc = 1$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{a}{2b+c^2} + \frac{b}{2c+a^2} + \frac{c}{2a+b^2} \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

**Aufgabe T–2**

Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$, sodass

$$f(x^2yf(x)) + f(1) = x^2f(x) + f(y)$$

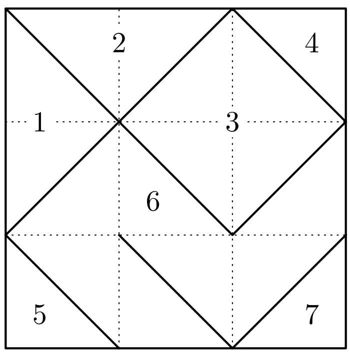
für alle von 0 verschiedenen reellen Zahlen $x$ und $y$ gilt.

**Aufgabe T–3**

In einer Reihe stehen $n$ Kinder auf Positionen 1 bis $n$. Während ihre Aufsichtsperson wegschaut, wechseln manche der Kinder ihre Positionen. Als die Aufsichtsperson wieder hinschaut, stehen sie erneut in einer Reihe. Wenn ein Kind, das zu Beginn auf Position $i$ stand, nun auf Position $j$ steht, so sagen wir, dass das Kind sich um $|i-j|$ Schritte bewegt hat. Man bestimme die maximale Summe der Schritte, die die Kinder erreichen können.

**Aufgabe T–4**

Sei $N$ eine positive ganze Zahl. In jedem der $N^2$ Einheitsquadrate eines $N \times N$-Spielbretts wird eine der beiden Diagonalen eingezeichnet. Die eingezeichneten Diagonalen unterteilen das $N \times N$-Spielbrett in $K$ Gebiete. Für jedes $N$ bestimme man den kleinsten und den größten möglichen Wert von $K$.




Beispiel mit $N = 3$, $K = 7$

### Aufgabe T–5

Sei $ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB > AC$. Man beweise, dass ein Punkt $D$ existiert, der die folgende Eigenschaft hat: immer, wenn zwei verschiedene Punkte $X$ und $Y$ im Inneren von $ABC$ liegen, sodass die Punkte $B$, $C$, $X$ und $Y$ auf einem Kreis liegen und

$$\angle AXB - \angle ACB = \angle CYA - \angle CBA$$

gilt, dann verläuft die Gerade $XY$ durch $D$.

### Aufgabe T–6

Sei $I$ der Inkreismittelpunkt des Dreiecks $ABC$ mit $AB > AC$. Die Gerade $AI$ schneide die Seite $BC$ in $D$. Angenommen, ein Punkt $P$ liegt auf der Strecke $BC$ und erfüllt $PI = PD$. Ferner sei $J$ der Punkt, den man erhält, wenn man $I$ an der Mittelsenkrechten (Streckensymmetralen) von $BC$ spiegelt, und sei $Q$ der zweite Schnittpunkt der Umkreise von $ABC$ und $APD$. Man beweise, dass dann $\angle BAQ = \angle CAJ$ gilt.

### Aufgabe T–7

Man bestimme alle Paare positiver ganzer Zahlen $(a, b)$ mit

$$a! + b! = a^b + b^a.$$

### Aufgabe T–8

Sei $n \geqslant 2$ eine ganze Zahl. Man bestimme die Anzahl positiver ganzer Zahlen $m$, sodass $m \leqslant n$ gilt und $m^2 + 1$ durch $n$ teilbar ist.