Wochenendseminar der LSGM 2016

Klasse 8-11, Oktober 2016

Eröffnungsvortrag

Johannes Waldmann: Sylver Coinage, angelehnt an die Preisaufgabe.

Zahlentheorie und Kongruenzen, Axel

Welche p-Ecke sind mit Zirkel und Lineal konstruierbar? Gdw . $p_n = 2^{2^n} + 1$ (Fermat-Primzahlen). Bekannt sind nur diese 5 Fermatprimzahlen $p_n = (3, 5, 17, 257, 2^{16} + 1)$. Für $n = 5$ ist $2^{32} + 1 = 641 \cdot 6700417$. Es sind überhaupt keine weiteren Fermat-Primzahlen bekannt.

Der größte gemeinsame Teiler

Definition der Begriffe *Teilermenge* und Definition des ggt als größtes Element der Teilermenge. Euklidischer Algorithmus: Subtraktions-Variante

$$\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(a - b, b).$$

Durch diese Formel kann man so lange reduzieren, bis eine der beiden Zahlen in der Klammer gleich 0 ist, dann ist $\mathrm{ggT}(a, 0) = a$. Der Übergang zum üblichen Euklidischen Algorithmus über Division mit Rest wird erläutert.

$$\begin{aligned} r_{n-2} &= r_{n-1} q_{n-1} + r_n, \\ r_{n-1} &= r_n q_n; \\ d = \mathrm{ggT}(a, b) &= r_n. \end{aligned}$$

Es wird gezeigt, dass das Ergebnis d des Eukl. Alg. folgende Eigenschaften hat:

> $d \mid a$ und $d \mid b$.
> Es gibt ganze Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $d = pa + qb$.

Diese beiden Eigenschaften definieren den ggt.
Beispiel: $\mathrm{ggT}(637, 1573) = 13$, $13 = 42 \cdot 637 - 17 \cdot 1573$.

Spezialfall: a und b sind genau dann teilerfremd, wenn es Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ gibt mit $1 = pa + qb$. Etwa $1 = 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1$, also $\operatorname{ggT}(3,5) = 1$. Dies liefert $1/15$ als eine ganzzahlige Linearkombination von $1/3$ und $1/5$:

$$\frac{1}{15} = \frac{A}{3} + \frac{B}{5} = \frac{5A + 3B}{15}.$$

Offenbar ist $A = -1$ und $B = 2$ eine Lösung und dies liefert die Konstruierbarkeit des regulären 15-Ecks ($360°/15 = 24°$) auf der Grundlage vom regulären 3-Eck (120°) und 5-Eck (72°), denn

$$24° = 2 \cdot 72° - 120°.$$

Kongruenzen

Im Folgenden ist m stets eine natürliche Zahl, $m \geq 1$.

Definition 1 Zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ heißen *kongruent modulo m*, wenn eine der folgenden vier zueinander äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. a und b lassen bei Division durch m denselben Rest.
2. $m \mid (a - b)$, m teilt die Differenz der beiden Zahlen.
3. $\frac{a-b}{m} \in \mathbb{Z}$. Der Quotient ist eine ganze Zahl.
4. $\exists q \in \mathbb{Z}$: $a = qm + b$. (Lies:„Es existiert eine ganze Zahl q mit $a = qm + b$.“)

Wir schreiben $a \equiv b \pmod{m}$ und sprechen „a ist kongruent b modulo m“.

Spezialfälle: $m = 10$, $b = 0$.
Motvation. Folgende Aufgaben lassen sich mit Kongruenzen lösen:

1. $51 \mid 171^n - 33^{2n}$
2. $7 \mid a^3 + b^3 + c^3 \Rightarrow 7 \mid abc$
3. $n \equiv Q(n) \pmod{9}$
4. $n \equiv A(n) \pmod{11}$
5. Wie viele Lösungen $a, b, c \in \mathbb{N}$ hat $a + 10b + 15c = 1000$?
6. Zeige, dass $x^2 + y^2 + z^2 = 1599$ keine ganzzahlige Lösung hat.

Dabei ist z.B. die alternierende Quersumme der 4-stelligen Dezimalzahl $n = [abcd]_{10} = 1000a + 100b + 10c + d$ gleich $A(n) = d - c + b - a$ und die Quersumme $Q(n) = d + c + b + a$.

Aufgabe 1 Zeige die 7er-Regel $7 \mid 10a + b$ gdw. $7 \mid a - 2b$.

Ende Teil 1

Ungleichungen, Sascha

AGM-Ungleichung

Die arithmetisch-geometrische-Mittelungleichung (AGM) für zwei Variable wird bewiesen und ebenso die geometrisch-harmonische-Mittelungliehung (GHM). Für alle reeklen Zahlen $a, b > 0$ gilt:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a\,b} \quad \text{AGM}$$
$$\sqrt{a\,b} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \quad \text{GHM.}$$

Viele andere Ungleichungen lassen sich auf diese zurückführen:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2, \qquad \frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2.$$

Zahlentheorie und Kongruenzen, Axel, Teil 2

Rechnen mit Kongruenzen

Kongruenzen können wie Gleichungen addiert, subtrahiert, multipliziert und potenziertwerden. Genauer, wenn $a \equiv b \pmod m$ und $c \equiv d \pmod m$, dann gilt auch

$$a+c \equiv b+d \pmod m$$
$$a-c \equiv b-d \pmod m$$
$$a\,c \equiv b\,d \pmod m$$
$$a^n \equiv b^n \pmod m$$

Hierbei ist n eine beliebige natürliche Zahl.
Achtung bei der Division:

$$a\,t \equiv b\,t \pmod{m\,t} \Longrightarrow a \equiv b \pmod m,$$
$$a\,t \equiv b\,t \pmod m \quad \text{und} \quad \text{ggT}\,(t, m) = 1 \Longrightarrow a \equiv b \pmod m.$$

Aufgaben für Jonathan Wiebusch:

1. $2^x = 3^y + 5$ (schwer)
2. $2^x = 3^y - 5$ (leicht)
3. $y^2 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ (schwer).

Aufgabe 2 Berechne die Perioden der Potenzreste a) $3^n \pmod 7$. Lösung $p = 6$.
b) $7^n \pmod{100}$. Lösung $p = 4$.

Aufgabe 3 Welche ganzzahligen Lösungen hat $14x+84y+91z = 911$? Modulo 7 ergibt sich ein widerspruch $0 \equiv 1 \pmod 7$.
Welche ganzzahligen Lösunge hat $x^2 + y^2 = 103$. Modulo 4 ergibt sich der Widerspruch.

Geometrie

Satzgruppe des Pythagoras

Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz werden genannt. Ableitung des Pythagoras aus den beiden Kathetensätzen.

Spezielle Dreiecke

Wir studieren die folgenden rechtwinkligen Dreiecke mit Innenwinkeln $45-45-90$ und $30-60-90$ sowie das gleichschenklige Dreieck mi den Innenwinkeln $36-36-72$, dessen Basis- und Schenkellängen im Verhältnis des goldenen Schnittes sind. Dieses Verhältnis wird über ähnliche Dreiecke hergeleitet, Grundlage zur Konstuktion des regulären 10-Ecks.