LSGM-Winterschule 2026

Olympiade – Klasse 8/9

Martin, Oskar, Mira

Erlaubte Hilfsmittel: Papier, Schreibzeug, Zirkel und Lineal. Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten.

Aufgabe 1 (Die Aufgabe über die 1)

Es sei die Bezeichnung $1 := 0'$ eingeführt.

a) Beweise $0 \neq 1$. (1 Punkt)

b) Zeige die Gleichungen $n' = n + 1$ sowie $n \cdot 1 = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (1 Punkt)

c) Zeige per vollständiger Induktion $n = 1 + 1 + \ldots + 1$, wobei in dieser Summe genau n-mal die 1 vorkommt, für jedes $n \in \mathbb{N}$. (2 Punkte)

d) Zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} n + m &= 1 \\ n \cdot m &= 1 \end{aligned}$$

keine Lösungen mit $m, n \in \mathbb{N}$ besitzt. (3 Punkte)

Hinweis: In dieser Aufgabe dürfen folgende Aussagen als bekannt vorausgesetzt werden: Peano-Axiome, Definitionen der Rechenarten $+$ und $\cdot$, in Martins Zirkel bewiesene Erkenntnisse sowie das Kommutativgesetz der Multiplikation.

Aufgabe 2 (Schach-Kombi)

Im Zufallsschach werden die acht weißen Figuren (König, Dame, zwei Türme, zwei Läufer, zwei Springer) auf der ersten Linie nach folgenden Regeln aufgebaut:

1. Der König steht zwischen den beiden Türmen,
2. Die beiden Läufer stehen auf Feldern mit unterschiedlicher Farbe, also einer auf einem weißen und der andere auf einem schwarzen Feld.

Ermittle und begründe, wie viele Möglichkeiten der Aufstellung der acht weißen Figuren es gibt. (6 Punkte)

Aufgabe 3 (ganz großartiges Thema)

a) Beweise für alle $a, b, c \in \mathbb{N},\ c \neq 0$:
$$ac|bc \implies a|b$$
(1 Punkt)

b) Finde alle $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$, für die
$$(2n^2 + n)|(n^2 + 5n)$$
gilt, und zeige, dass es keine weiteren gibt. (2 Punkte)

c) Beweise für alle $a, b, c \in \mathbb{N},\ a, b, c \geq 1$:
$$\operatorname{ggT}(ca, cb) = c \cdot \operatorname{ggT}(a, b)$$
(3 Punkte)

Aufgabe 4 (Hero(n)ische Beweise)

Das Verfahren von Heron ist für eine Zahl $a > 0$ durch die Iteration $x_{k+1} = T(x_k)$ mit der Funktion $T(x) = (x + a/x)/2$ gegeben.

Zeige, dass das Verfahren gegen $\sqrt{a}$ konvergiert, wenn der Startwert x_0 im Intervall $[\sqrt{a}, \infty)$ liegt. (6 Punkte)