LSGM-Winterschule 2026

Olympiade – Klasse 11/12

Martin, Oskar, Mira

Erlaubte Hilfsmittel: Papier, Schreibzeug, Zirkel und Lineal. Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten.

Aufgabe 1 (Potenziell problematisch)

Wir definieren auf $\mathbb{N}$ die Operation der "Potenzierung" rekursiv über die folgenden Festlegungen (Konvention: Potenzierung wird noch vor Punktrechnung angewandt):

$$n^0 := 1 \tag{1}$$

$$n^{m'} := n^m \cdot n \tag{2}$$

a) Beweise, dass diese Operation *nicht* kommutativ ist, d.h. zeige $n^m \neq m^n$ für geeignet gewählte $m, n \in \mathbb{N}$. (1 Punkt)

b) Beweise für alle $k, m, n \in \mathbb{N}$, dass gilt:

$$(k^m)^n = k^{m \cdot n}$$

(3 Punkte)

c) Wir definieren weiterhin für $n, m \in \mathbb{N}$ die Relation $|_p$ über

$$n \,|_p\, m :\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n^k = m$$

Zeige, dass $|_p$ eine Halbordnung auf $\mathbb{N}$ bildet. Folgende Lemmata darfst du für alle $k, n \in \mathbb{N}$ zusätzlich als gegeben ansehen:

$$1^n = 1 \tag{3}$$

$$n \neq 0 \implies 0^n = 0 \tag{4}$$

$$n^k = n \iff (n = 0 \text{ und } k \neq 0) \text{ oder } (n = 1) \text{ oder } (k = 1) \tag{5}$$

Hinweis: Für eine Halbordnung müssen folgende Eigenschaften für alle $k, n, m \in \mathbb{N}$ nachgewiesen werden:

$$n \,|_p\, n \tag{6}$$

$$n \,|_p\, m \text{ und } m \,|_p\, k \implies n \,|_p\, k \tag{7}$$

$$n \,|_p\, m \text{ und } m \,|_p\, n \implies n = m \tag{8}$$

(3 Punkte)

Hinweis: In dieser Aufgabe dürfen folgende Aussagen (neben den bereits oben genannten) als bekannt vorausgesetzt werden: Peano-Axiome, Definitionen der Rechenarten $+$ und $\cdot$ sowie in Martins Zirkel bewiesene Erkenntnisse.

Aufgabe 2 („Kreisgeometrie ist eine fantastische Olympiadevorbereitung“)

Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$ mit dem Mittelpunkt S von Seite $\overline{CD}$. Es sei $r = 4$ der Radius des Inkreises von ABS und $s = 3$ der Radius des Inkreises von BCS.
Bestimmen Sie die Seitenlängen des Rechtecks.

(6 Punkte)

Aufgabe 3 (ganz großartiges Thema)

a) Zeige, dass der Bruch
$$\frac{a^3 + 2a}{a^4 + 3a^2 + 1}$$
für jedes $a \in \mathbb{N}$ vollständig gekürzt ist. (2 Punkte)

b) Finde alle $a \in \mathbb{N}$, für die der Bruch
$$\frac{a^3 + 2a^2}{a^4 + 3a^2 + 1}$$
weiter kürzbar ist, und zeige, dass er für alle anderen a vollständig gekürzt ist. (4 Punkte)

Aufgabe 4 (Cauchys Rache)

Es sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit Fixpunkt $x^\star \in \mathbb{R}$ gegeben. Es gelte $\Phi(x) \neq x^\star$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{x^\star\}$ und $\Phi'(x) \geq 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass das Fixpunktverfahren für alle Startwerte $x \in \mathbb{R} \setminus \{x^\star\}$ *nicht* gegen $x^\star$ konvergiert.

Hinweis: Der Mittelwertsatz wird als gegeben angesehen:
Für eine differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ existiert ein $c \in [a, b]$ derart, dass
$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

(6 Punkte)