Mathelager Februar 2025

Verschiedene Themen, und Fortsetzung vom letzten Jahr am 12. Februar 2024

Windischleuba, 24. Februar 2025

Dr. Matthias Hübner

matthias_huebner@t-online.de

https://www.linkedin.com/in/matthias-hübner-657b359/

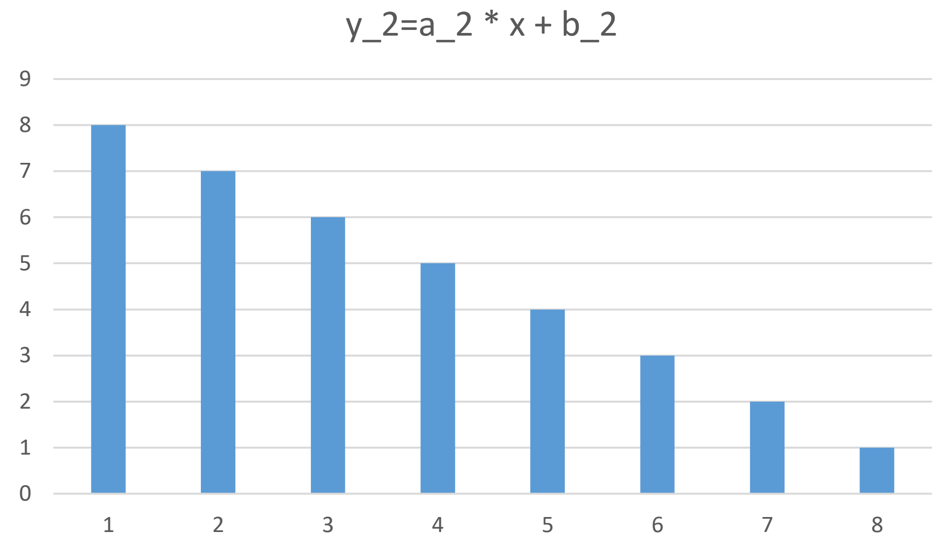
Was machen wir heute

- Gauß mit 5 Jahren Summe der ersten 100 natürliche Zahlen 1+2+3+…+100: drei Sichtweisen
- Summe der Quadrate von 1 bis n: drei Sichtweisen
- Themenwechsel -> Algebra: Gruppen, Ringe
- Chinesischer Restsatz
- Körper, Endliche Körper
- Multiplikative Gruppe der Reste mod p (Primzahl) ist zyklisch
- Geometrie „Reste“ vom letzten Jahr wenn Ihr wollt

Summe der ersten N natürlichen Zahlen

- Maß-Sicht

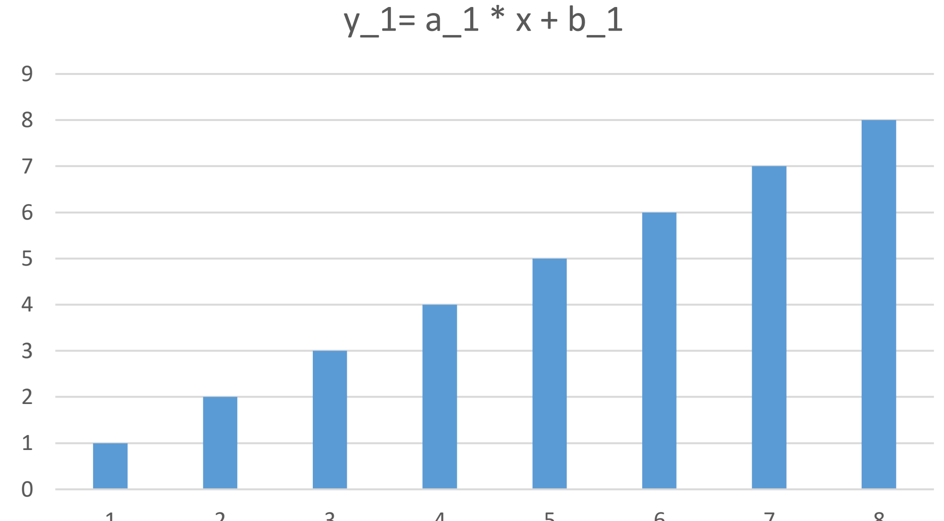
1	2	3	4	5	6	7	8
8	7	6	5	4	3	2	1
Zusammen	Zusammen	Zusammen	Zusammen	Zusammen	Zusammen	Zusammen	Zusammen
9	9	9	9	9	9	9	9



- Lineare Sicht
  - 1. Funktion (von x) $y_1 = a_1*x+b_1$
  - 2. Funktion (von x) $y_2 = a_1*x+b_1$

  Summe von 2 linearen ..

  Ergibt wieder lineares d.h. Gerade



- Puzzle 2-dimensional

Summe der ersten N Quadrate

- Linearisiere - eine Dimension höher!

8							
7	8						
6	7	8					
5	6	7	8				
4	5	6	7	8			
3	4	5	6	7	8		
2	3	4	5	6	7	8	
1	2	3	4	5	6	7	8

- Maß-Sicht: 3 Dreiecke eben
- Lineare Sicht im Raum

$z_1=a_1 * x + b_1 * y + c_1$

$z_2=a_2 * x + b_2 * y + c_2$

$z_3=a_3 * x + b_3 * y + c_3$

- 3-dimensionales Diagramm…
- Summe von 3 linearen … ergibt wieder Lineares d.h. Ebene

Summe der ersten N Quadrate

Maß-Sicht S = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2)

3 * S = (1+2+3+4+5+6+7+8) * (2*8 + 1)

= 8*9/2* (2*8+1)

Allgemein 3S = 3 * (1^2 + 2^2 + … + (N-1)^2 + N^2)

= N*(N+1)/2*(2N+1)

S = N(N+1)(2N+1)/6

Lineare Sicht:

nimm noch 3-er Symmetrie mit Drehungen um 120 Grad dazu – dann muss die Summe der 3 Funktionen eine Ebene mit konstanter z-Koordinate sein

Summe der ersten N Quadrate - Puzzle

reference

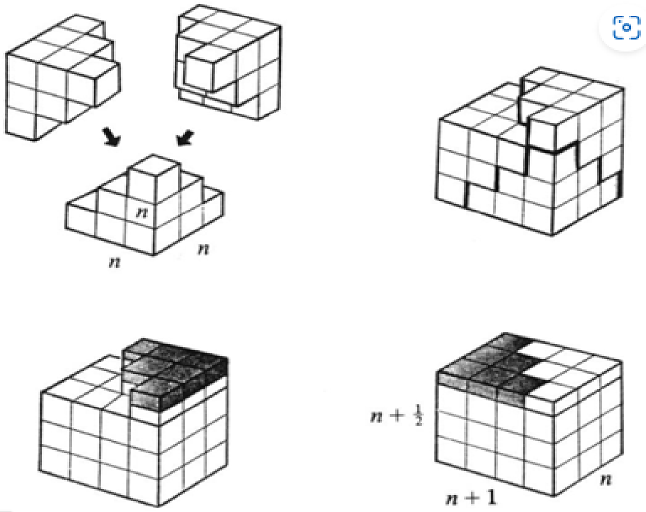
Home
Questions
Tags
Saves
Users
Unanswered
Looking for **your Teams?**

155

This is elementary as well, but one of my favorite ones :)

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{3}n(n+1)(n+\frac{1}{2})$$

(Author: Man-Keung Siu)



Share Cite Edit Follow

edited Jul 27, 2017 at 11:17

community wiki
4 revs, 3 users 78%
Mike

8 There's an analogous proof that the integral of n^2 from 0 to x is x^3/3. It can be obtained from this proof by smoothing out the stepped pyramids into actual pyramids. – Michael Lugo Dec 14, 2009 at 16:47

71 I think very few people have enough spatial imagination to figure out what happens exactly in the area where the three pieces come together, or could easily depict the structure seen from the opposite end. For me the *picture* is not convincing at all (I'd rather say the formula convinces me the picture is correct than the other way round). However maybe playing with an actual model would be quite convincing.
– Marc van Leeuwen Dec 12, 2011 at 13:31

6 @Mark - I think if you just think about the width of each step at each level, you will be able to see that they do all fit together. Just counting back along a given row or column shows you that it all fits. – Steven Gubkin Feb 15, 2012 at 15:10

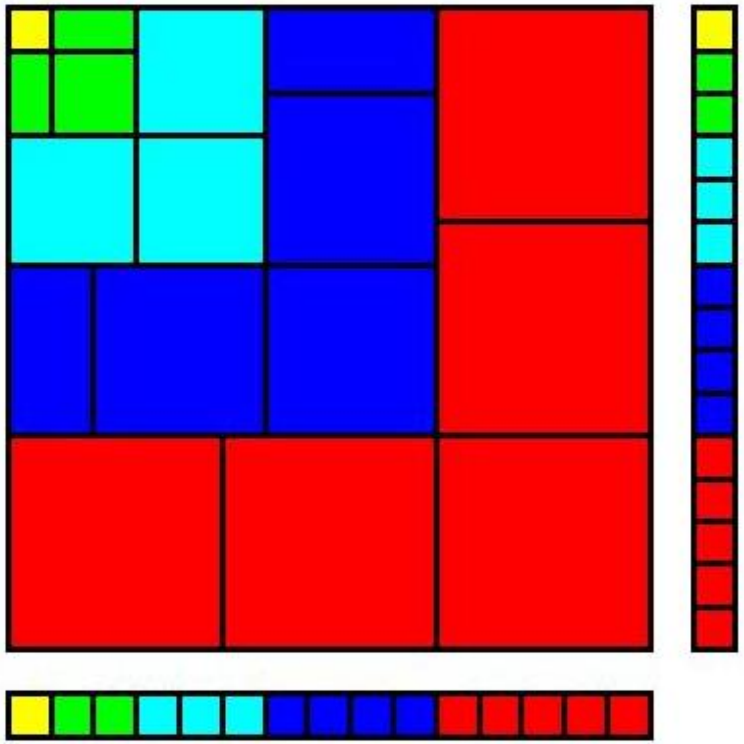
4 A variant of Mike's construction for $\sum_{k=1}^n k^2$, easier to visualize (I'm going to try a proof-without-words,

Noch eine Dimension höher und Evtl. noch schöner: Summe der ersten N Kuben

The image was sent to me by James M. Lawrence, grazie! See also page 53 of "Proofs without words: exercises in visual thinking, Volume 2" for a very different layout of the same 4 inequalities.

Another one exists involving the sum

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 :$$



The second image is due to Brian Sears (Wayback Machine)

Share Cite Edit Follow edited Dec 23, 2020 at 8:54 community wiki

Gruppen

- Elemente können miteinander verknüpft werden wie Addition und Subtraktion, neutrales Element

- Ganze Zahlen mit Addition. (Nicht: Natürliche Zahlen, denn Subtraktion fehlt!) Neutrales Element?

- Rationale Zahlen ungleich 0 mit Multiplikation. Neutrales Element?

- Rationale Zahlen mit Addition aber ohne Multiplikation!

- Reelle Zahlen mit Addition aber ohne Multiplikation! Zeitachse

- Bewegungen allgemein „vor und zurück“, insbesondere im 3-dimensionalen Raum. Verschiebungen, Drehungen, Spiegelungen
- Endliche Matrizen mit Determinante != 0 und Matrixmultiplikation. Nichtkommutativ!

- Satz von Lagrange für endliche Gruppen – Ordnung jeder Untergruppe teilt Anzahl der Elemente. Durch Betrachtung von „Restklassen“ leicht zu sehen

Ringe

- Elemente können addiert und multipliziert werden
- Ganze Zahlen mit Addition und Multiplikation
- Reelle Zahlen mit Addition und Multiplikation
- Polynomringe
- Matrizenringe – nichtkommutativ!

- Quotientenstruktur heißt Ideal – abgeschlossen

- Restklassen ganzer Zahlen mod ganzer Zahl N
- Restklassen von Polynom mod Primpolynom – Algebraischer Zahlkörper, algebraische ganze Zahlen. Fermat

Chinesischer Restsatz

Simultane Kongruenzen ganzer Zahlen [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Eine *simultane Kongruenz* ganzer Zahlen ist ein System von linearen Kongruenzen

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{m_2} \\ &\vdots \\ x &\equiv a_n \pmod{m_n} \end{aligned}$$

für die alle x bestimmt werden sollen, die sämtliche Kongruenzen gleichzeitig lösen. Wenn eine Lösung x_0 existiert, dann sind mit $M := \mathrm{kgV}(m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n)$ die Zahlen $x_0 + kM\ (k \in \mathbb{Z})$ genau alle Lösungen, wobei kgV für das kleinste gemeinsame Vielfache steht. Es kann aber auch sein, dass es gar keine Lösung gibt.

Aussage für Hauptidealringe [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Sei R ein Hauptidealring, dann lautet der chinesische Restsatz für R wie folgt:

Sind $m_1, \ldots, m_n$ paarweise teilerfremd und m ihr Produkt, dann ist der Faktorring R/mR isomorph zum Produktring $R/m_1R \times \cdots \times R/m_nR$ durch den Isomorphismus

$$\begin{aligned} f: \quad R/mR &\to R/m_1R \times \cdots \times R/m_nR \\ x + mR &\mapsto (x + m_1R, \ldots, x + m_nR) \end{aligned}$$

Aussage für allgemeine Ringe [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Eine der allgemeinsten Formen des chinesischen Restsatzes ist eine Formulierung für einen beliebigen Ring R (mit Einselement).

Sind $I_1, \ldots, I_n$ (beidseitige) Ideale, so dass $I_i + I_j = R$ für $i \neq j$ (man nennt die Ideale dann teilerfremd oder coprim), und sei I der Durchschnitt der Ideale, dann ist der Faktorring R/I isomorph zum Produktring $R/I_1 \times \cdots \times R/I_n$ durch den Isomorphismus

$$\begin{aligned} f: \quad R/I &\to R/I_1 \times \cdots \times R/I_n \\ x + I &\mapsto (x + I_1, \ldots, x + I_n). \end{aligned}$$

(I ist auch gleich dem Produkt der I_j, falls R ein kommutativer Ring ist.)

Diese Aussage lässt sich wie folgt beweisen: f ist ein Ringhomomorphismus und f ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $f \otimes_R \mathrm{id}_{R_\mathfrak{p}}$ ein Isomorphismus ist für alle Primideale $\mathfrak{p} \subseteq R$. Da Lokalisierung mit Durchschnitt und Quotientenbildung verträglich ist, kann man ohne Einschränkung annehmen, dass R ein lokaler Ring ist mit einzigem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$. Wenn $I_i \subseteq \mathfrak{m}$ und $I_j \subseteq \mathfrak{m}$, dann ist auch $I_i + I_j \subseteq m \subsetneq R$. Da jedes Ideal ungleich R in dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ enthalten sein muss, ist $I_i \neq R$ für höchstens ein i. Wenn alle I_i gleich dem ganzen Ring R sind, dann ist die Aussage wahr, denn dann ist $f\colon \{0\} \to \prod_{i=1}^{n} \{0\} \cong \{0\}$ ein Isomorphismus. Sei also ohne Einschränkung I_1 das einzige Ideal I_i, sodass $I_i \neq R$.

Es ist $I_1 \cdots I_r = I_1 \cdot R \cdots R = I_1 = I$ und außerdem

$$R/I = R/I_1 \cong R/I_1 \times \{0\} \times \cdots \times \{0\} = R/I_i \times R/R \times \cdots \times R/R \cong \prod_{i=1}^{n} R/I_i$$

Chinesischer Restsatz – einfache Fälle

- Kongruenzen mod 2 und 3 teilerfremd. 2*3 Fälle
- Kongruenzen mod 2 und 4 nicht teilerfremd
- Kongruenzen mod 2, 3 und 5 teilerfremd 2*3*5 Fälle
- Gleichverteilung: wenn ich natürliche Zahlen oder ganze Zahlen in Einser-Schritten (+1 oder -1) durchlaufe, kommt jede Kombination von Resten genau gleich häufig vor. Es müssen Einserschritte sein, keine andere Schrittlänge

Körper

- Elemente können addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert werden
- Rationale Zahlen
- Reelle Zahlen
- Komplexe Zahlen

- Primkörper

Primkörper

- Für jede Primzahlpotenz p^n (p prim, n natürlich) gibt es genau einen Primkörper mit p^n Elementen

- Dies ist _*nicht*_ der Restklassenring mod p^n

- Beispiele Körper der Ordnung 2, 3, 5

- Beispiel Körper der Ordnung 4

Primkörper – Fundamentalsatz

- Die multiplikative Gruppe der Elemente != 0 ist zyklisch

- Beispiel 3
- Beispiel 5
- Beispiel 7
- Beispiel 11

Alle Potenzen der Ordnung (p-1) sind immer = 1 (kleiner Satz von Fermat) = neutrales Element

Lagrange