Matboj Aufgaben

Winterschule 2025

Für jede Aufgabe gilt: der Lösungsweg muss nachvollziehbar präsentiert werden. Behauptete Aussagen sind grundsätzlich zu beweisen. Bereits bekannte Sätze können ohne Beweis verwendet werden.

1. Sei $ABCDE$ ein konvexes Fünfeck mit Umfang 1. Beweise, dass der Umfang des Dreiecks ACE kleiner als 1 ist.

2. Sei $s_1, s_2, \ldots$ eine arithmetische Folge. Beweise, dass $s_{s_1}, s_{s_2}, \ldots$ ebenfalls eine arithmetische Folge ist.

3. Sei n eine ungerade ganze Zahl, die nicht durch 3 teilbar ist. Zeige, dass $n^2 - 1$ durch 24 teilbar ist.

4. Bestimme die größte ganze Zahl m, sodass $m!$ die Zahl $100! + 99! + 98!$ teilt.

5. Gibt es ein Polynom $P(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten, sodass $P(2) = 4$ und $P(P(2)) = 7$ gilt?

   Bemerkung: Dass $P(x)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ist, bedeutet, dass $P(x)$ die Form $P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $c_i \in \mathbb{Z}$ für alle $i = 0, \ldots, n$ hat.

6. Zeige, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, deren letzte Ziffer keine 1 ist.

7. Aerith und Bob spielen folgendes Spiel: Sie starten mit 20 nebeneinanderliegenden Quadraten und streichen abwechselnd jeweils ein Quadrat weg. Das Spiel endet, wenn nur noch zwei Quadrate übrig sind. Aerith gewinnt, wenn die beiden letzten Quadrate direkt nebeneinanderliegen, und Bob gewinnt, wenn sie nicht direkt nebeneinanderliegen.

   (a) Wer hat eine Gewinnstrategie, wenn Aerith beginnt?

   (b) Wer hat eine Gewinnstrategie, wenn Bob beginnt?

8. Bestimme alle ganzen Zahlen x, für die das Produkt $x(x+1)(x+2)$ eine Quadratzahl ist.

9. Es sollen 12 ununterscheidbare Steine in die vier unterscheidbaren Boxen B_1, B_2, B_3, B_4 verteilt werden. (Es ist erlaubt, dass Boxen leer bleiben.)

   (a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Steine so zu verteilen, dass in jeder Box eine gerade Anzahl von Steinen liegt?

   (b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Steine so zu verteilen, dass in jeder Box eine ungerade Anzahl von Steinen liegt?

10. Ermittle den kleinsten Wert, den $2x + \frac{18}{x}$ unter der Bedingung, dass x eine positive reelle Zahl ist, annehmen kann.

11. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $|AB| < |AC|$. Sei H der Höhenschnittpunkt, O der Umkreismittelpunkt und I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks. Beweise, dass die Gerade AI den Winkel $\sphericalangle HAO$ halbiert.

12. Die acht Freunde Aerith, Bob, Chebyshev, Descartes, Euler, Fermat, Gauß und Hilbert haben Karten für acht nebeneinanderliegende Plätze in der Oper gekauft, sodass jeder von ihnen genau einen Platz zugewiesen bekam. Als sie in der Oper angekommen sind, haben sie allerdings ihre Sitze durcheinandergebracht:

    - Bob saß auf seinem zugewiesenen Platz,
    - Chebyshev saß zwei Plätze rechts von dem Platz, der Gauß zugewiesen war,
    - Descartes saß einen Platz links von dem Platz, der Fermat zugewiesen war,
    - Euler saß vier Plätze links von dem Platz, der Hilbert zugewiesen war,
    - Fermat saß fünf Plätze rechts von dem Platz, der Descartes zugewiesen war,
    - Gauß saß einen Platz rechts von dem Platz, der Euler zugewiesen war,
    - Hilbert saß drei Plätze links von dem Platz, der Aerith zugewiesen war.

    Auf wessen zugewiesenem Platz saß Aerith?

13. Finde alle Paare (m, n) positiver ganzer Zahlen, die $m^4 = n^3 + 137$ erfüllen.

14. Ermittle alle Paare (N, n) positiver ganzer Zahlen, sodass N^2 und $n(N + n)$ den Abstand 1 haben.

    Hinweis: Es gibt unendlich viele solcher Paare. Du kannst beispielsweise versuchen, eine Rekursion für diese Paare zu finden. Am Ende sollen die Paare explizit gegeben werden. Dabei darfst du auf bereits bekannte Folgen zurückgreifen.

15. Aerith wirft wiederholt eine faire Münze.

    (a) Bestimme den Erwartungswert für die Anzahl von Würfen, die benötigt werden, bis zweimal hintereinander „Kopf“ fällt.

    (b) Bestimme den Erwartungswert für die Anzahl von Würfen, die benötigt werden, bis erst „Kopf“ und dann „Zahl“ direkt hintereinander fallen.

16. Für welche Werte $n \geq 3$ kann ein $(n \times n)$-Brett, dessen vier Ecken entfernt wurden, vollständig und überdeckungsfrei mit L- und J-Tetrominos ausgelegt werden?

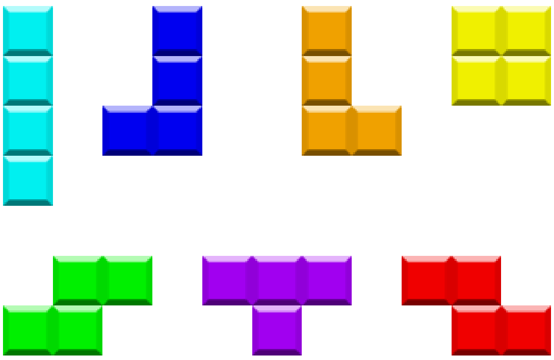

Abbildung 1: Die Tetris-Bausteine I, J, L, O, S, T und Z (auch Tetrominos genannt), https://de.wikipedia.org/wiki/Tetris

17. In the game *Sprouts*, there are initially n spots drawn on a plane, and on each move two spots are connected with an edge and a new spot is drawn on this edge. No two edges can cross, and no spot may have more than 3 edges coming from it. An edge may be drawn from a spot to itself. The game ends when no more moves can be made.

    Show that the game must end in at most $3n - 1$ moves.

18. Consider the game *Sprouts* described in Exercie 17. Show that the game will last at least $2n$ moves.