

Abzählbare Unendlichkeit, Hilberts Hotel und Cantors Diagonalargument

Matthias Hübner

Windischleuba, 15. + 18. Februar 2020

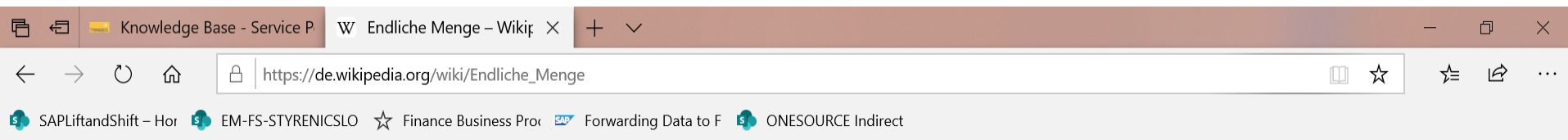
Wieviele Zimmer hat dieses Jugendherberge?

Nehmen wir an, alle Zimmer wären schon belegt...

- ... und ich komme neu dazu und übernachten.
- Wäre noch ein Zimmer für mich frei?
- Natürlich nicht, denn – wie gesagt, es sind schon alle Zimmer belegt.
- Aber könnte man durch Umbelegung der einzelnen Zimmer mit jeweils einer anderen Person ein Zimmer freimachen?
 - Nein!
- Eine Kardinalzahl (= Anzahl von Zimmern) mit dieser Eigenschaft – nicht zu einer echten Teilmenge gleichmächtig zu sein - heißt Dedekind-endlich.

Dedekind-Endlichkeit

https://de.wikipedia.org/wiki/Endliche_Menge



Sind A und B endlich und **disjunkt**, also $A \cap B = \emptyset$, so nat man

$$|A \cup B| = |A| + |B| = |A \dot{\cup} B|.$$

- Allgemein ist eine Vereinigung endlich vieler endlicher Mengen wieder eine endliche Menge. Ihre Mächtigkeit ist durch das **Prinzip von Inklusion und Exklusion** gegeben.
- Ist A unendlich und B endlich, so ist $A \setminus B$ unendlich.
- Die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(A) := \{U \mid U \subseteq A\}$ einer endlichen Menge A hat eine höhere Mächtigkeit als die Menge selbst, ist aber immer noch endlich; es gilt $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.
- Das **kartesische Produkt** $A \times B$ endlicher Mengen ist endlich. Seine Mächtigkeit ist höher als die aller beteiligter Faktoren, wenn kein Faktor leer ist und mindestens zwei Faktoren eine Mächtigkeit größer 1 haben. Für endliche Mengen A, B gilt $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. Allgemeiner ist ein kartesisches Produkt endlich vieler endlicher Mengen wieder eine endliche Menge.

Dedekind-Endlichkeit [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Eine andere Unterscheidung zwischen endlichen und unendlichen Mengen stammt von Dedekind. Er definierte:

Eine Menge M heißt *endlich*, wenn sie zu keiner echten Teilmenge gleichmächtig ist, anderenfalls *unendlich*.

Man spricht heute von *Dedekind-Endlichkeit* bzw. *Dedekind-Unendlichkeit*.

Um nun zu zeigen, dass jede endliche Menge auch **Dedekind-endlich** ist, genügt es, Folgendes zu zeigen:

1. Die leere Menge ist zu keiner echten Teilmenge gleichmächtig.
2. Wenn M zu keiner echten Teilmenge gleichmächtig ist, dann ist auch $M \cup \{a\}$ zu keiner echten Teilmenge (von sich selbst) gleichmächtig.

(Punkt 1 ist klar, da die leere Menge keine echten Teilmengen hat. Zu Punkt 2 muss man zeigen, dass man aus einer Bijektion f' zwischen der Menge $M' := M \cup \{a\}$ und einer echten Teilmenge U' von M' eine Bijektion f zwischen M und einer echten Teilmenge U gewinnen kann.)

Umgekehrt ist jede Dedekind-endliche Menge A auch endlich, denn wäre A unendlich, so könnte man mit Hilfe des **Auswahlaxioms** eine Folge $F := (a_0, a_1, a_2, \dots) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von paarweise verschiedenen Elementen $a_n \in A$ finden. Die Abbildung

$$f: A \rightarrow A \setminus \{a_0\}, \quad a \mapsto \begin{cases} a_{n+1} & \text{für } a \in F, \quad a_n = a \\ a & \text{für } a \notin F \end{cases}$$

ist **wohldefiniert**, denn, wenn $a \in F$, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $a_n = a$ und dieses ist eindeutig. Sie zeigt, dass A zur echten Teilmenge $A \setminus \{a_0\}$ gleichmächtig und damit *nicht* Dedekind-endlich ist – im Widerspruch zur Voraussetzung.

Erblich endliche Mengen [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

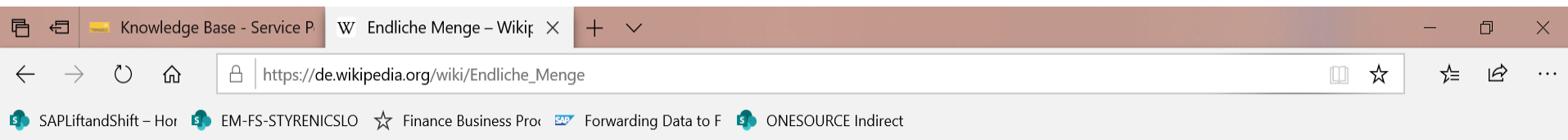
Eine Menge A heißt *erblich endlich*, wenn die **transitive Hülle** endlich ist. Das heißt, dass nicht nur A endlich ist, sondern auch alle Elemente aus A endliche Mengen sind, und deren Elemente ebenfalls endliche Mengen sind, und so weiter.

Nach Definition sind alle erblich-endlichen Mengen endlich. Die Umkehrung gilt nicht, so ist etwa $\{\mathbb{N}_0\}$ eine endliche Menge, denn sie enthält als einziges Element \mathbb{N}_0 , aber das Element \mathbb{N}_0 selbst ist nicht endlich.

In der abstrakten Mengenlehre werden die natürlichen Zahlen als erblich endliche Mengen eingeführt.

Dedekind-Endlichkeit

https://de.wikipedia.org/wiki/Endliche_Menge



Sind A und B endlich und **disjunkt**, also $A \cap B = \emptyset$, so nat man

$$|A \cup B| = |A| + |B| = |A \dot{\cup} B|.$$

- Allgemein ist eine Vereinigung endlich vieler endlicher Mengen wieder eine endliche Menge. Ihre Mächtigkeit ist durch das **Prinzip von Inklusion und Exklusion** gegeben.
- Ist A unendlich und B endlich, so ist $A \setminus B$ unendlich.
- Die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(A) := \{U \mid U \subseteq A\}$ einer endlichen Menge A hat eine höhere Mächtigkeit als die Menge selbst, ist aber immer noch endlich; es gilt $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.
- Das **kartesische Produkt** $A \times B$ endlicher Mengen ist endlich. Seine Mächtigkeit ist höher als die aller beteiligter Faktoren, wenn kein Faktor leer ist und mindestens zwei Faktoren eine Mächtigkeit größer 1 haben. Für endliche Mengen A, B gilt $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. Allgemeiner ist ein kartesisches Produkt endlich vieler endlicher Mengen wieder eine endliche Menge.

Dedekind-Endlichkeit [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Eine andere Unterscheidung zwischen endlichen und unendlichen Mengen stammt von Dedekind. Er definierte:

Eine Menge M heißt *endlich*, wenn sie zu keiner echten Teilmenge gleichmächtig ist, anderenfalls *unendlich*.

Man spricht heute von *Dedekind-Endlichkeit* bzw. *Dedekind-Unendlichkeit*.

Um nun zu zeigen, dass jede endliche Menge auch **Dedekind-endlich** ist, genügt es, Folgendes zu zeigen:

1. Die leere Menge ist zu keiner echten **Teilmenge** gleichmächtig.
2. Wenn M zu keiner echten Teilmenge gleichmächtig ist, dann ist auch $M \cup \{a\}$ zu keiner echten Teilmenge (von sich selbst) gleichmächtig.

(Punkt 1 ist klar, da die leere Menge keine echten Teilmengen hat. Zu Punkt 2 muss man zeigen, dass man aus einer Bijektion f' zwischen der Menge $M' := M \cup \{a\}$ und einer echten Teilmenge U' von M' eine Bijektion f zwischen M und einer echten Teilmenge U gewinnen kann.)

Umgekehrt ist jede Dedekind-endliche Menge A auch endlich, denn wäre A unendlich, so könnte man mit Hilfe des **Auswahlaxioms** eine Folge $F := (a_0, a_1, a_2, \dots) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von paarweise verschiedenen Elementen $a_n \in A$ finden. Die Abbildung

$$f: A \rightarrow A \setminus \{a_0\}, \quad a \mapsto \begin{cases} a_{n+1} & \text{für } a \in F, \quad a_n = a \\ a & \text{für } a \notin F \end{cases}$$

ist **wohldefiniert**, denn, wenn $a \in F$, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $a_n = a$ und dieses ist eindeutig. Sie zeigt, dass A zur echten Teilmenge $A \setminus \{a_0\}$ gleichmächtig und damit *nicht* Dedekind-endlich ist – im Widerspruch zur Voraussetzung.

Erblich endliche Mengen [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Eine Menge A heißt *erblich endlich*, wenn die **transitive Hülle** endlich ist. Das heißt, dass nicht nur A endlich ist, sondern auch alle Elemente aus A endliche Mengen sind, und deren Elemente ebenfalls endliche Mengen sind, und so weiter.

Nach Definition sind alle erblich-endlichen Mengen endlich. Die Umkehrung gilt nicht, so ist etwa $\{\mathbb{N}_0\}$ eine endliche Menge, denn sie enthält als einziges Element \mathbb{N}_0 , aber das Element \mathbb{N}_0 selbst ist nicht endlich.

In der abstrakten Mengenlehre werden die natürlichen Zahlen als erblich endliche Mengen eingeführt.

Richard Dedekind 1831-1916



Willkommen in Hilberts Hotel!

Das Hilbert Hotel



David Hilbert

1862 - 1943

Mathematiker

1862 - 1878: Gymnasium in Königsberg

1878 - 1885: Universität Königsberg

1885 - 1887: Universität Göttingen

1887 - 1890: Universität Göttingen

1890 - 1894: Universität Göttingen

1894 - 1897: Universität Göttingen

1897 - 1907: Universität Göttingen

1907 - 1930: Universität Göttingen

1930 - 1943: Universität Göttingen



Übersicht: Hilberts Hotel

Das Hotel hat eine unendliche Anzahl von Zimmern.

Die Zimmer sind:

- 1. Zimmer
- 2. Zimmer
- 3. Zimmer
- 4. Zimmer
- 5. Zimmer
- 6. Zimmer
- 7. Zimmer
- ...



Hilberts Hotel: Die Gäste



Hilberts Hotel: Die Gäste



Hilberts Hotel: Die Gäste

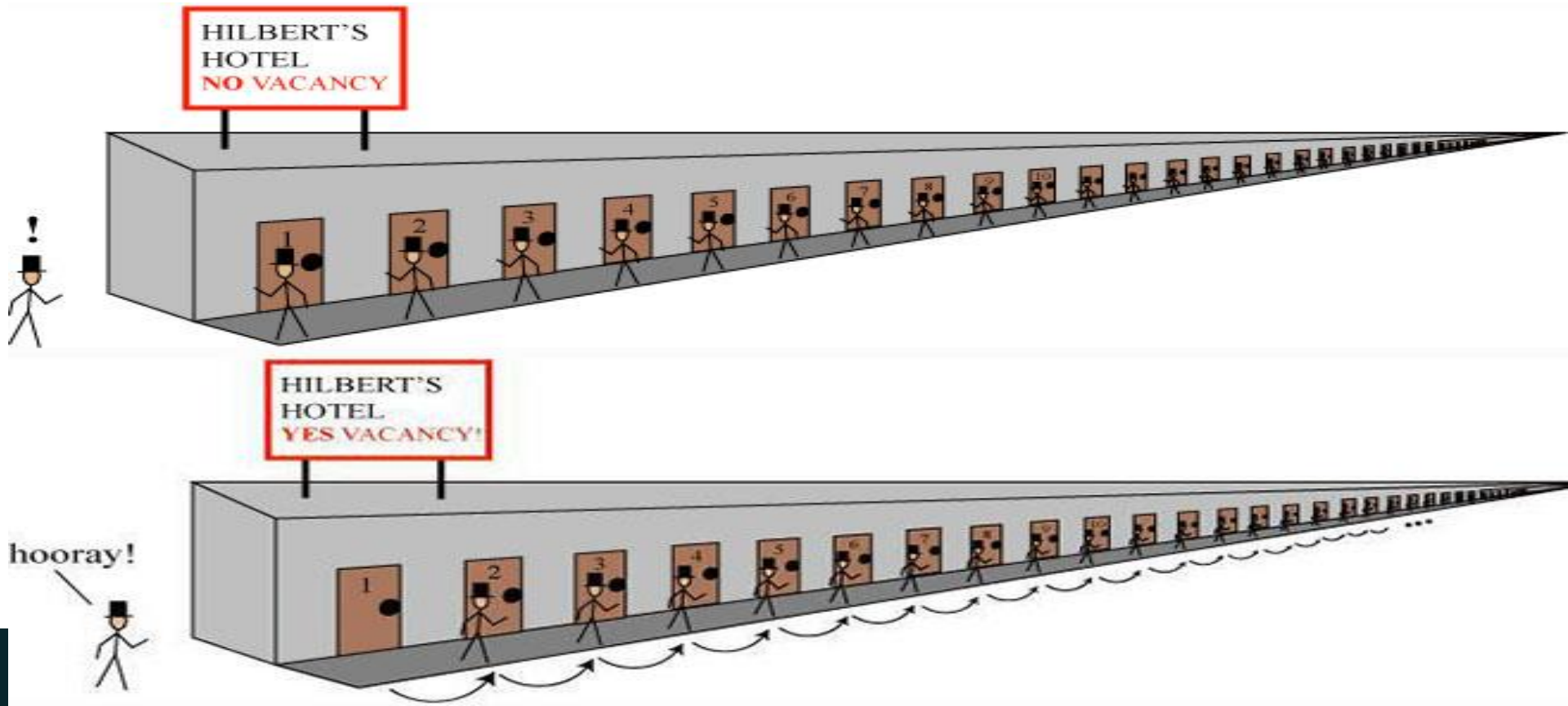
Neue Dokumente für Gäste

A-Z

Seien also alle Zimmer im Hilbert-Hotel belegt...

Und ich komme neu dazu – finde ich noch ein Zimmer?

- Aber ja!
- Wenn jeder Hotelgast bereit ist, ein Zimmer weiter zu ziehen.



Und wenn noch mehr Gäste hinzukommen?

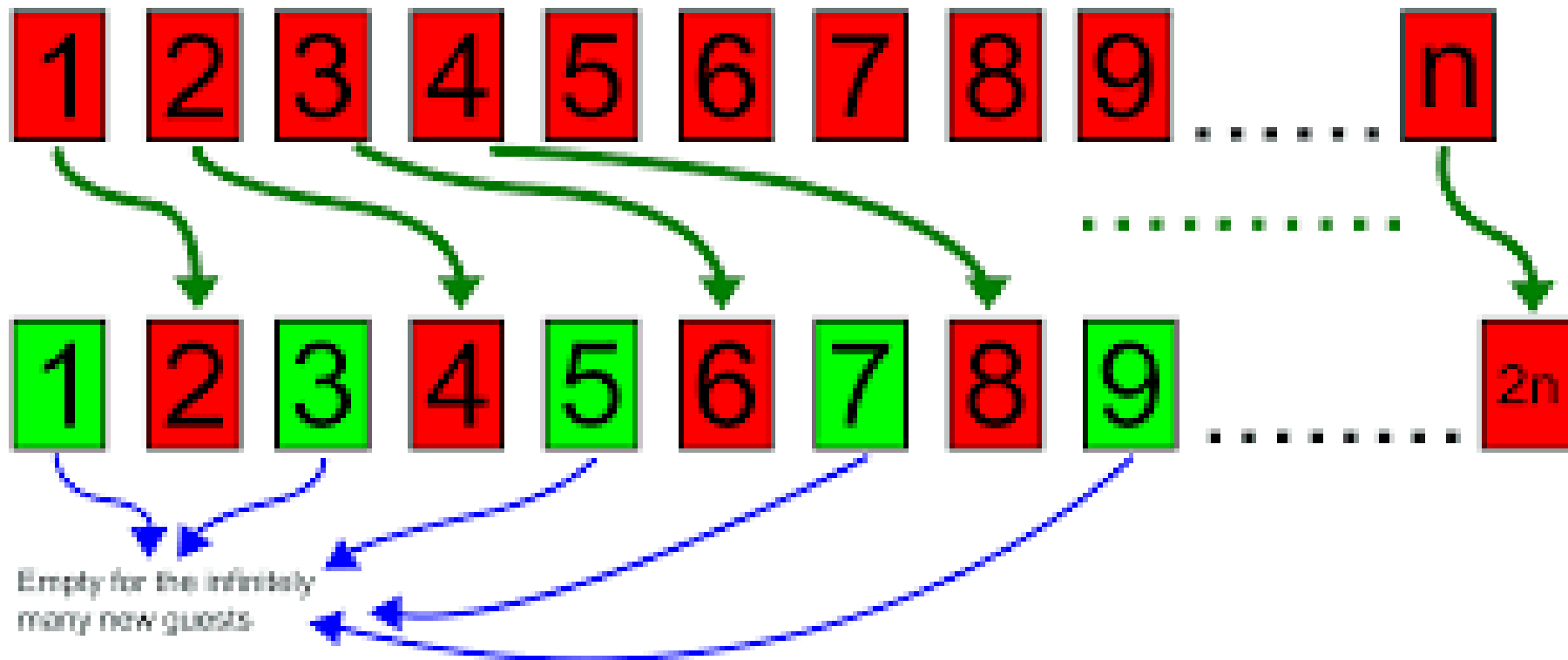
**Für endlich viele, etwa n neu hinzukommende Gäste,
rücken alle bereits vorhandenen Gäste n
Zimmer(nummern) weiter –**

**So bekommen wir endlich viele neue Gäste bequem in
Hilberts Hotel unter.**

Und wenn nebenan ein 2. Hilbert-Hotel vollbelegt ist ...

und renoviert werden muss, also alle Gäste im 2. Hilbert-Hotel müssen zeitweise ausziehen?

Bekommen wir die zusätzlichen *abzählbar unendlich vielen Gäste* aus dem 2. Hilbert-Hotel im 1. Hilbert-Hotel unter?



Was bedeutet das alles abstrakt?

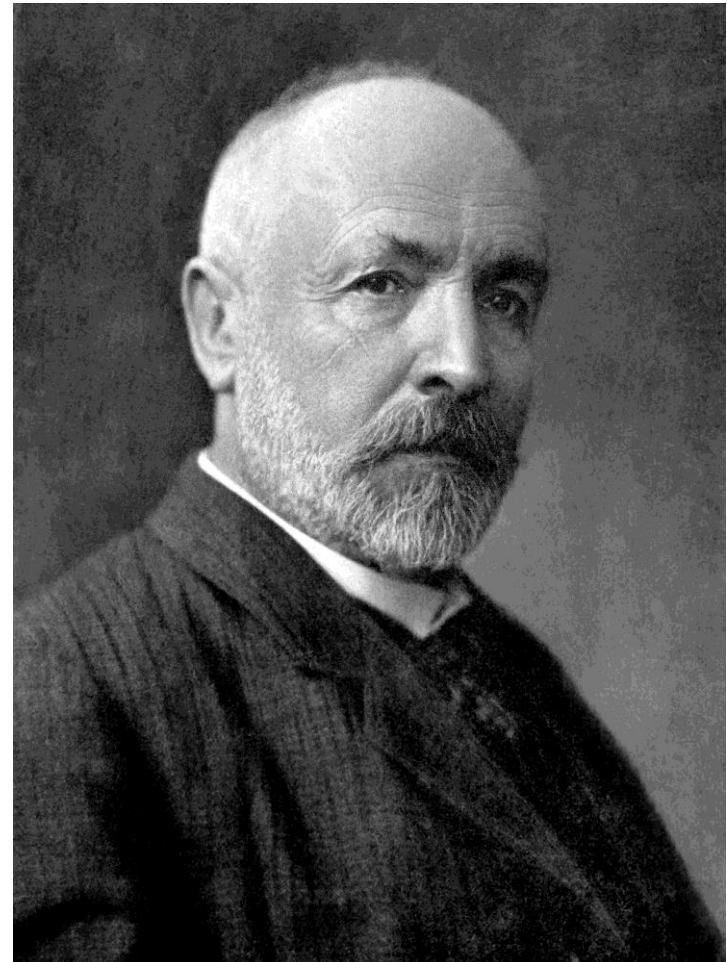
Die Menge der natürlichen Zahlen ist Dedekind-unendlich d.h. gleichmächtig zu einer echten Teilmenge.

- und jetzt wird es ganz toll:
- Nehmen wir an, es kommen **abzählbar unendlich** viele Busse mit jeweils abzählbar unendlich vielen Passagieren angefahren, die jeweils alle Gäste aus einem anderen Hilbert-Hotel transportieren.
- Bekommen wir sie alle in unserem ursprünglichen 1. Hilbert-Hotel unter?
- Ja!
- Und so lässt sich auch beweisen, dass die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist – d.h. gleichmächtig zur Menge der natürlichen Zahlen!
- Obwohl die Menge der rationale Zahlen (alle Brüche) doch so viel größer erscheint...

Und was ist mit den reellen Zahlen?

Man nennt eine Menge, die gleichmächtig zur Menge der reellen Zahlen ist, auch ein Kontinuum.

- Georg Cantor 1874
- Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.
- Eine der größten mathematischen Entdeckungen aller Zeiten.
- Und der Beweis ist schwierig, aber wunderschön.



Cantors Diagonalargument

Indirekt: nehmen wir also an, die Menge der reellen Zahlen sei doch abzählbar...

Und versuchen wir, diese Annahme zu einem Widerspruch zu führen. Wir betrachten “nur” die reellen Zahlen zwischen 0 und 1

- | | |
|----------------|-------------------------|
| 1. Reelle Zahl | 0, <u>0</u> 00000000... |
| 2. Reelle Zahl | 0,5 <u>0</u> 0000000... |
| 3. Reelle Zahl | 0,33 <u>3</u> 333333... |
| 4. Reelle Zahl | 0,123 <u>4</u> 56789... |
| 5. Reelle Zahl | 0,9452 <u>6</u> 2984... |
| 6. Reelle Zahl | 0,70710 <u>6</u> 781... |

Durch Abändern der n-ten Dezimalnachkommastelle in der n-ten Zahl erzeugen wir eine neue reelle Zahl, die unter den bisher angegebenen, abgezählten reellen Zahlen nicht vorkommt.

Widerspruch zur Annahme der Abzählbarkeit!

Maßtheoretischer Beweis

Auch ein toller Beweis, aber dafür muss man erstmal eine Menge Vorarbeit leisten, und die Grundlagen der Lebesgueschen Maßtheorie auf den reellen Zahlen entwickeln.

Aber wenn man die Maßtheorie schon hat? Nehmen wir doch mal an, die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 sei doch abzählbar!

Wir zeigen, dass jede abzählbare Menge das Lebesgue-Maß 0 hat.

- *Legen wir um die 1. Zahl ein Intervall der Länge $\epsilon/2$*
- *Um die 2. reelle Zahl ein Intervall der Länge $\epsilon/4$*
- *Um die 3. reelle Zahl ein Intervall der Länge $\epsilon/8 \dots$*
- *Wie heißt eine solche Reihe mit konstantem Quotienten aufeinanderfolgender Glieder? – **geometrische Reihe, lässt sich summieren***
- *Welches Maß haben alle Intervalle zusammen höchstens? ϵ*
- *Und dieses ϵ können wir auch noch beliebig klein (positiv) wählen*
- *Widerspruch zur Tatsache, dass das reelle Intervall $(0, 1)$ das Lebesgue-Maß 1 hat!*

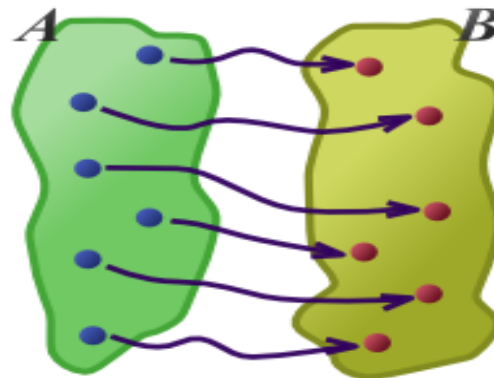
Was haben wir bis hierher gelernt

Wir fassen zusammen, was wir bisher gelernt haben, und formulieren es allgemeiner, abstrakter, so wie in der Mathematik üblich.

Mengen mit “gleicher” Anzahl von Elementen heißen gleichmächtig, sie haben die gleiche Kardinalität.

Was bedeutet genau, zwei Mengen A und B sind gleichmächtig?
Dass es eine Bijektion – eine umkehrbar eineindeutige Abbildung zwischen beiden gibt.

Bijektiv = Injektiv (eineindeutig, verschiedene a machen versch. Bilder) und Surjektiv – jedes Element der Bildmenge wird getroffen



„Aleph-Null“

Die Kardinalität der leeren Menge ist 0.

Die Kardinalität einer Menge mit einem Element ist 1.

Die Kardinalität einer endlichen Menge (mit endlich vielen Elementen) ist eine endliche natürliche Zahl.

Die erste/kleinste unendliche Kardinalität ist die Kardinalität der Menge der natürlichen Zahlen.

Sie wird auch mit “aleph-Null” bezeichnet.



Mengen mit Kardinalität aleph-Null

- Die natürlichen Zahlen, und jede unendliche Untermenge davon (z.B. die geraden Zahlen, die Primzahlen, die Quadratzahlen)
- Die negative ganzen Zahlen
- Die ganzen Zahlen
- Die rationalen Zahlen
- Zwei- und dreidimensionale periodische Gitter
- Die algebraischen Zahlen! Das sind alle reellen (und weiter alle komplexen Zahlen), die sich als Lösung von algebraischen Gleichungen mit rationalen oder auch nur mit ganzen Koeffizienten schreiben lassen.
- Endliche Folgen von Elementen aus abzählbaren Mengen

\aleph_0

Was zeigt uns Hilbert's Hotel für „Aleph-Null“

$$\aleph_0 + f = \aleph_0, \quad \text{für endliche Kardinalitäten } f$$
$$2\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$
$$n \aleph_0 = \aleph_0 \quad \text{für endliche Kardinalitäten } n$$
$$\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$$

Gilt irgendetwas davon für endliche Kardinalitäten = Zahlen? Ganz bestimmt nicht!

Cantors Diagonalargument!

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \mathbf{C} \quad \text{Kardinalität der reellen Zahlen = des Kontinuums}$$

Warum „2-hoch“? Denke an Binärdarstellung von reellen Zahlen zwischen 0 und 1.

Kontinuumshypothese

Es liegt keine Kardinalität echt zwischen der Kardinalität der natürlichen Zahlen und der Kardinalität des Kontinuums.

Kurt Gödel 1935:

die Kontinuumshypothese ist konsistent mit ZFC

Zermelo-Fraenkel und Axiom of Choice = Auswahlaxiom

Paul Cohen 1963:

die Kontinuumshypothese ist unabhängig von ZFC.

Und: das Gegenteil der Kontinuumshypothese ist auch konsistent mit ZFC.

Dafür gab es eine Fields-Medaille (etwas wie ein Nobelpreis für Mathematiker)

Schröder-Bernstein-Theorem

Sei $f: A \rightarrow B$ eine Injektion (1:1, eindeutige Abbildung) von A nach B , und $g: B \rightarrow A$ eine Injektion von B nach A .

Dann gibt es eine Bijektion von A nach B , d.h. die Mengen A und B sind gleichmächtig.

1. Beweisidee: springe mit f und g zwischen A und B hin und her, und betrachte die endlichen Zyklen, wie die unendlichen Pfade

<https://www.youtube.com/watch?v=lkoKttTDuxE>

2. Beweisidee: erinnert an Hilberts Hotel

Eine Aufgabe der IMO 1987 – auch hier hilft der Gedanke an Hilbert's Hotel

https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/1987_IMO_Problems/Problem_4

The screenshot shows a web browser window with the Stack Exchange website. The page title is "IMO 1987 - function such that $f(f(n)) = n + 1987$ ". The question asks to show that there is no function $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ such that $f(f(n)) = n + 1987, \forall n \in \mathbb{N}$. The question is 29 votes high and has 7 answers. The top answer, by user MathematicsStudent1122, provides an alternative approach using set theory and the pigeonhole principle. The page also features a sidebar with navigation options, a search bar, and a right-hand panel with related content like "Blog" and "Linked" questions.

StackExchange Search on Mathematics... Log in Sign up

IMO 1987 - function such that $f(f(n)) = n + 1987$

Asked 6 years, 11 months ago Active 3 months ago Viewed 2k times

▲ Show that there is no function $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ such that $f(f(n)) = n + 1987, \forall n \in \mathbb{N}$.

29 This is problem 4 from IMO 1987 - see, for example, [AoPS](#).

elementary-number-theory functions induction contest-math functional-equations

★ share cite improve this question

18 edited Nov 20 '16 at 2:42 asked Mar 9 '13 at 13:35

52.6k 13 131 289 Martin Sleziak 2,265 10 26 leticia

Really people? Three and a half years and mine is the first close vote. – MathematicsStudent1122 Nov 20 '16 at 0:01

@MathematicsStudent1122 It seems that contest questions are taken a bit differently, as discussed [here](#) and probably in several other places on meta. I have edited the question to add the origin of the problem to have at least [some context](#). (Although the origin was already clearly pointed out in the title.) – Martin Sleziak Nov 20 '16 at 2:42

add a comment

7 Answers

active oldest votes

▲ Here is an alternative approach. It is obvious that such an f must be an injection. Now, look at sets \mathbb{N} , $A = f(\mathbb{N})$ and $B = f(f(\mathbb{N})) = \{n + 1987 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

35 It is easy to see that $B \subset A \subset \mathbb{N}$, and also from the injectivity of f that f induces a bijection between the disjoint sets $\mathbb{N} \setminus A$ and $A \setminus B$. Therefore, $\mathbb{N} \setminus B = (\mathbb{N} \setminus A) \cup (A \setminus B)$ must contain an even number of elements. But $|\mathbb{N} \setminus B| = 1987$, which is a contradiction, and we are done.

Blog

- Community working group updates: February 2020

Featured on Meta

- TLS 1.0 and TLS 1.1 removal for Stack Exchange services
- Launching *Pearl Dive* - a chatroom where excellent questions/answers meet...

Linked

- 1 Functions such that $f(f(n)) = n + 2015$
- 17 Improvement IMO 1988 $f(f(n)) = n + 1987$
- 2 Decomposing the divisor function

Related

- 0 Finding α such that $f(\alpha(x+y)) = f(x) + f(y)$
- 13 IMO 1988, problem 6

Ordinalzahlen und wohlgeordnete Mengen

Wir erinnern uns: alle Mengen mit gleicher Mächtigkeit, die also paarweise bijektiv aufeinander abgebildet werden können, haben die gleiche *Kardinalzahl*.

Es ging dabei also um die Äquivalenzklassen durch Bijektionen zwischen Mengen; sonst war keinerlei Struktur auf den Mengen vorgegeben.

***Ordinalzahlen* sind Äquivalenzklassen zwischen wohlgeordneten Mengen. Es kommt also die Struktur einer linearen Ordnung hinzu.**

Eine Ordinalzahl kann nur für eine wohlgeordnete Menge bestimmt/zugeordnet werden. Was ist das?

Eine *Wohlordnung* auf einer Menge S ist eine totale Ordnung (beliebige 2 Elemente miteinander vergleichbar) bei der jede nichtleere Teilmenge von S ein kleinstes Element bzgl. dieser Ordnung hat.

Beispiele für Wohlordnungen, und Nicht-Beispiele

Endliche Mengen sind wohlgeordnet, der Ordnungstyp = die Ordinalzahl ist wieder eine natürliche Zahl.

Die natürlichen Zahlen sind wohlgeordnet, die Ordinalzahl ist ω

Die negative ganzen Zahlen sind *nicht* wohlgeordnet

Die ganzen Zahlen sind *nicht* wohlgeordnet

Die rationalen Zahlen sind erst recht nicht wohlgeordnet.

Betrachte $\omega + 1$ und $\omega + \omega$. Was ist $1 + \omega$?

Die erste überabzählbare Ordinalzahl

ω_1

Ist die erste Ordinalzahl, die rechts nach allen abzählbaren Ordinalzahlen kommt.

Sie kann von der Kardinalität her mühelos 1:1 in die reellen Zahlen abgebildet werden – da die reellen Zahlen nach Cantor überabzählbar sind.

Aber als Ordinalzahl – die lineare Ordnung erhaltend – geht das nicht.

Das sieht man mit den rationalen Zahlen, die dicht in den reellen Zahlen liegen.

Noch interessanter: jede monotone (ordnungserhaltende) Funktion von ω_1 in die reellen Zahlen ist im wesentlichen (nach abzählbar vielen Schritten) konstant.

Let us keep in touch

matthias_huebner@t-online.de

mhuebner@trinseo.com

Dr. Matthias Hübner

Finance Business Process Director

Kölner Str. 10

65760 Eschborn