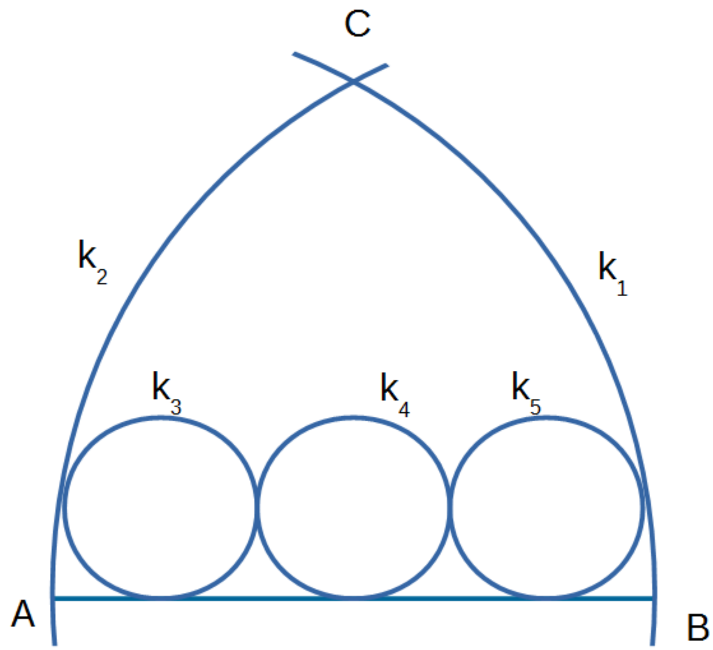
Matheolympiade Klasse 10/11
Windischleuba Februar 2017



Aufgabe 1 Gegeben sei die obenstehende Figur, wobei k_1 und k_2 jeweils Kreise mit dem Radius 4 um A bzw. um B sind und $\overline{AB} = 4$. Die drei kongruenten kleinen Kreise k_3, k_4 und k_5 berühren die Gerade AB. Außerdem berührt k_3 den Kreis k_2 von innen und k_4 von außen; k_4 berührt k_3 und k_5 von außen und k_5 berührt k_4 von außen und k_1 von innen.
Bestimme den Radius r von k_3. 8 P

Hinweis zur Probe. Welchen Wert für r erhält man, nähme man anstelle von k_1 und k_2 auf AB senkrecht stehende Geraden g_1 und g_2.

Aufgabe 2 Zeige, dass es keine ganzen Zahlen x, y und z gibt, welche die Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$ erfüllen und für die xyz nicht durch 3 teilbar ist. 7 P

Aufgabe 3 (a) Bestimme alle ganzzahligen Lösungspaare (x, y), die die Gleichung

$$20x + 17y = 2016$$

erfüllen.
(b) Wie viele Lösungen (x, y) mit natürlichen Zahlen x und y gibt es? 7 P

Aufgabe 4 Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$ die Ungleichung $n! < n^{n-1}$ gilt. 8 P