Das Schubfachprinzip

Norbert Koksch, Dresden

Literatur: Beutelspacher/Zschiegner: Diskrete Mathematik für Einsteiger. Vieweg-Verlag.

1. Was ist das Schubfachprinzip?

Die folgenden Aussagen sind offenbar richtig:

- Unter je 13 Personen gibt es mindestens zwei, die im selben Monat Geburtstag haben.
- Es gibt zwei Deutsche mit derselben Zahl von Haaren.

Hinter diesen Aussagen steht ein allgemeines Prinzip:

Theorem. ***(Schubfachprinzip)*** *Seien m (verschiedene) Objekte in n disjunkte Mengen („Kategorien“, „Schubfächer“) eingeteilt. Wenn $m > n$ ist, so gibt es mindestens eine Kategorie, die mindestens zwei Objekte enthält.*

Beweis. Wenn jede der n Kategorien höchstens ein Objekt enthalten würde, dann gäbe es höchstens n Objekte im Widerspruch zu $m > n$. $\square$

2. Einfache Anwendungen

Die Socken von Professor Mathemix

In der Sockenkiste von Professor Mathemix befinden sich 10 graue und 10 schwarze Socken. Der Professor nimmt – in Gedanken versunken – eine Reihe von Socken heraus. Wieviele muss er herausnehmen, um
a) garantiert zwei gleichfarbige,
b) garantiert zwei graue Socken zu erhalten?

Lösung: Die Socken sind die Objekte. Wir betrachten $n = 2$ Kategorien: graue Socken bzw. schwarze Socken.

a) Wenn $m = 3$ Socken herausgenommen werden, gibt es zwei Socken aus der gleichen Kategorie.

b) Hier muss er mindestens 12 herausnehmen, denn die ersten 10 könnten alle schwarz sein.

Gleiche Zahl von Bekannten

Theorem. *In jeder Gruppe von mindestens zwei Personen gibt es zwei, die die gleiche Anzahl von Bekannten in dieser Gruppe haben.*

Die Relation „bekannt sein“ sei dabei als symmetrisch vorausgesetzt: Wenn X mit Y bekannt ist, dann ist auch Y mit X bekannt.

Beweis. Sei m die Anzahl der Personen. Als Objekte wählen wir die m Personen. Wo sind aber nun die Kategorien bzw. Schubfächer?

Sei allgemein K_i die Kategorie derjenigen, die genau i Bekannte (in der Gruppe) haben.

Dann gibt es $n = m$ Kategorien, nämlich $K_0, K_1, \ldots, K_{m-1}$. Wir haben somit gleichviel Kategorien wie Objekte, das Schubfachprinzip ist nicht anwendbar.

Was tun? Wir haben zu viele Kategorien. Wir müssen eine loswerden.

Gibt es eine Kategorie, die bestimmt leer ist? Nein.

Aber es gibt zwei Kategorien, die nicht beide gleichzeitig nichtleer sein können, nämlich K_0 und K_{m-1}. Ist nämlich K_0 nichtleer, dann gibt es eine Person die mit niemand bekannt ist, und damit auch von niemand gekannt wird. Damit kann es aber niemand geben, der alle anderen $m-1$ Personen kennt; K_{m-1} ist leer. Somit gibt es höchstens $m-1$ Kategorien die nichtleer sind, mindestens eine muss nach Schubfachprinzip zwei Elemente haben. □

Aufgabe. Cliquen und Anticliquen

Unter je sechs Personen gibt es stets drei, die sich paarweise kennen, oder drei die sich nicht paarweise kennen.

Sei P_1 eine der Personen. Hätte P_1 höchstens 2 Bekannte und 2 Nichtbekannte, dann könnte es nur 4 weitere Personen geben. Also hat P_1 3 Bekannte oder 3 Nichtbekannte. Wir mache eine Fallunterscheidung:

1. P_1 habe 3 Bekannte, P_2, P_3 und P_4 genannt.

   a) Unter P_2, P_3, P_4 gibt es zwei, die sich kennen, sagen wir P_2 und P_3. Dann kennen sich P_1, P_2 und P_3 gegenseitig und wir haben 3 Personen gefunden, die sich paarweise kennen.

   b) Unter P_2, P_3, P_4 gibt es keine zwei, die sich kennen. Dann ist dies eine gesuchte Gruppe von Personen die sich paarwiese nicht kennen.

2. P_2 habe 3 *Nicht*bekannte, P_2, P_3 und P_4 genannt.

   a) Unter P_2, P_3, P_4 gibt es zwei, die sich *nicht* kennen, sagen wir P_2 und P_3. Dann kennen sich P_1, P_2 und P_3 gegenseitig *nicht* und wir haben 3 Personen gefunden, die sich paarweise *nicht* kennen.

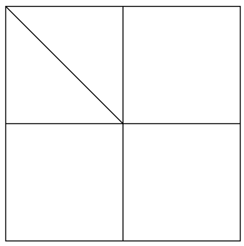
b) Unter P_2, P_3, P_4 gibt es keine zwei, die sich *nicht* kennen. Dann ist dies eine gesuchte Gruppe von Personen die sich paarwiese (*nicht* nicht) kennen.

Der zweite Fall verläuft also völlig analog, wenn wir „bekannt sein“ durch „nicht bekannt sein“ ersetzen.

Entfernte Punkte in einem Quadrat

Theorem. *Unter je 5 Punkten, die in einem Quadrat der Seitenlänge* 2 *liegen, gibt es zwei, die einen Abstand kleiner oder gleich* $\sqrt{2}$ *haben.*

Beweis. Die Punkte sind die Objekte, also $m = 5$. Wir teilen das Quadrat in $n = 4$ Teilquadrate mit der Kantenlänge 1.



Dies sind unsere Kategorien. Nach dem Schubfachprinzip müssen damit zwei Punkte im gleichen Teilquadrat liegen.

Der Abstand zweier Punkte in einem solchen Teilquadrat ist aber kleiner oder gleich $\sqrt{2}$, da die Diagonale nur die Länge $\sqrt{2}$ hat (Satz von Pythagoras). $\square$

Bemerkung. *Im Beweis haben wir einen versteckten Fehler bei der Auswahl der Kategorien gemacht. Was wurde falsch gemacht, und wie könnte es korrigiert werden?*

Differenzen von Zahlen

Theorem. *Unter je 6 natürlichen Zahlen gibt es stets zwei, deren Differenz durch* 5 *teilbar ist.*

Beweis. Die Objekte sind die $m = 6$ Zahlen. Was sind die Kategorien?

Sei K_i die Restklasse mit Rest i modulo 5, $i = 0, \dots, 4$. Das sind $n = 5$ Kategorien.

Nach dem Schubfachprinzip liegen also zwei Zahlen in der gleichen Kategorie, haben damit gleichen Rest bei Division durch 5.

Ihre Differenz ist somit durch 5 teilbar. $\square$

Teilen oder nicht teilen

Theorem. *Unter je $n+1$ Zahlen der Menge $\{1,2,3,\dots,2n\}$ gibt es stets zwei teilerfremde Zahlen.*

Beweis. Die Objekte sind die $m = n+1$ Zahlen. Wir wählen die n Kategorien $K_i = \{2i-1, 2i\}$, $i = 1,\dots,n$. Nach dem Schubfachprinzip müssen dann zwei Zahlen in einer Kategorie liegen und sind als aufeinanderfolgende Zahlen sicher teilerfremd. □

Theorem. *Unter je $n+1$ Zahlen der Menge $\{1,2,3,\dots,2n\}$ gibt es stets zwei Zahlen, wovon die eine die andere teilt.*

Bemerkung. *Dies ist eine Verallgemeinerung von Aufgabe MO 370943 (dort $n = 100$).*

Beweis. Seien a_0, a_1, ..., a_n die ausgewählten $n+1$ Zahlen. Wir schreiben jede dieser Zahlen als

$$a_i = 2^{e_i} u_i\,,$$

wobei u_i ungerade Zahlen seien und e_i natürliche Zahlen (einschließlich Null) seien. Diese $m = n+1$ Zahlen u_i sind unsere Objekte. Die Kategorien sind die ungeraden Zahlen von 1 bis $2n-1$. Dies sind n Kategorien. Nach dem Schubfachprinzip gibt es also zwei Zahlen a_k, a_ℓ mit $u_k = u_\ell$ und $a_k > a_\ell$. Dann teilt a_ℓ die Zahl a_k. □

3. Verallgemeinerungen

Theorem. ***(Verallgemeinertes Schubfachprinzip)*** *Seien m Objekte in n Kategorien („Schubfächer") eingeteilt. Wenn $m > r\cdot n$ ist, so gibt es mindestens eine Kategorie, die mindestens $r+1$ Objekte enthält.*

Beweis. Wenn jede der n Kategorien höchstens r Objekte enthalten würde, dann gäbe es höchstens $r\cdot n$ Objekte im Widerspruch zu $m > r\cdot n$. □

Theorem. ***(Umgekehrtes Schubfachprinzip)*** *Seien m Objekte in n Kategorien („Schubfächer") eingeteilt. Wenn $m < n$ ist, so gibt es mindestens $n-m$ Kategorien, die keine Objekte enthalten.*

Beweis. Es seien weniger als $n-m$ Kategorien leer, das heißt, mehr als m Kategorien seien nichtleer. Dies steht im Widerspruch zur Anzahl der Objekte. □

Theorem. ***(Unendliches Schubfachprinzip)*** *Wenn man eine unendliche Menge in endlich viele Kategorien einteilt, gibt es mindestens eine Kategorie, die unendlich viele Elemente enthält.*

Beweis. Wenn jede der Kategorien nur endlich viele Objekte enthalten würde, dann gäbe es insgesamt nur endlich viele Objekte. □

4. Aufgaben

Der Schwierigkeitsgrad der folgenden Aufgaben ist sehr unterschiedlich und wächst in etwa mit der Aufgabennummer.

1. In der Sockenkiste von Prof. Mathemix befinden sich 10 graue, 10 schwarze und 10 weiße Socken. Wieviele muss er herausnehmen, um
   a) garantiert zwei gleichfarbige,
   b) garantiert zwei graue Socken zu erhalten?

2. Zeige: Schreibt man eine rationale Zahl $\frac{p}{q}$, $q \in \mathbb{N}$, als Dezimalbruch, so ist dieser endlich oder periodisch mit einer Länge kleiner oder gleich $q-1$.

3. Sei m eine natürliche Zahl und seien K_i die Restklassen modulo m. Dann gibt es eine Restklasse, die unendlich viele Primzahlen enthält.

4. Zeige: Unter je 9 natürlichen Zahlen gibt es zwei, deren Differenz durch 8 teilbar ist.

5. Prüfe: Unter je 1000 natürlichen Zahlen gibt es zwei, deren Differenz durch 8 teilbar ist.

6. Prüfe: Unter je 6 natürlichen Zahlen gibt es zwei, deren Summe durch 5 teilbar ist.

7. Zeige: Unter je zehn Punkten in einem Quadrat der Seitenlänge 3 gibt es stets zwei mit Abstand kleiner oder gleich $\sqrt{2}$.

8. Zeige: Unter je neun Punkten in einem Würfel der Kantenlänge 2 gibt es stets zwei mit Abstand kleiner oder gleich $\sqrt{3}$.

9. Unter je n Punkten in einem Würfel der Kantenlänge 3 gibt es stets zwei mit Abstand kleiner oder gleich $\sqrt{3}$. Wie groß ist das kleinste n?

10. Zeige: Unter je 5 Punkten in einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge 1 gibt es stets zwei mit Abstand kleiner oder gleich $\frac{1}{2}$.

11. Unter je 17 Punkten in einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge 1 gibt es stets zwei mit Abstand kleiner oder gleich x. Wie groß das kleinste x?

12. Bei einer Party begrüßen sich Personen, indem sie miteinander anstoßen. Das dauert seine Zeit. Zeige: Zu jedem Zeitpunkt gibt es zwei Personen, die mit der gleichen Anzahl von Personen angestoßen haben.

13. Ein Polyeder ist ein dreidimensionaler Körper, der von ebenen Flächen mit geraden Kanten begrenzt wird. Zeige, dass jeder Polyeder zwei Flächen besitzt, die die gleiche Anzahl von Kanten haben.

14. Zeige: Unter je 11 natürlichen Zahlen gibt es stets drei, so dass die Differenz von je zweien durch 5 teilbar ist.

15. Zeige: Unter je 5 Punkten in der Ebene mit ganzzahligen Koordinaten gibt es zwei, deren Mittelpunkt auch ganzzahlige Koordinaten hat.

16. Unter je n Punkten im dreidimensionalen Raum mit ganzzahligen Koordinaten gibt es zwei, deren Mittelpunkt auch ganzzahlige Koordinaten hat. Wie groß ist das kleinste n?

17. Aus der Menge $\{1, 2, \ldots, 99\}$ werden 10 beliebige Zahlen ausgewählt. Zeige, dass man aus diesen 10 Zahlen zwei disjunkte Teilmengen auswählen kann, deren Summe gleich ist. Beispiel: 3, 9, 14, 21, 26, 35, 42, 59, 63, 76 seien ausgewählt. Hier gilt $14+63 = 35+42$.

18. Zeige: Unter je 10 Punkten in der Ebene mit ganzzahligen Koordinaten gibt es zwei, bei denen der Punkt, der die Verbindungsstrecke im Verhältnis 1 : 2 teilt, auch ganzzahlige Koordinaten hat.

19. (MO 39036) In einem rechteckigen Waldstück von 600m Länge und 500mBreite wachsen genau 444 Bäume mit einem Durchmesser von 50cm. In dem Wald sollen 20 rechteckige Grundstücke von 30mLänge und 20m Breite, auf denen kein Baum steht, zur Bebauung ausgewählt werden. Ist dies mit Sicherheit bei jeder beliebigen Anordnung der Bäume möglich?

20. (MO 400945) Im Innern eines Quadrates der Seitenlänge 12cm seien 20 Punkte beliebig, aber so gewählt, dass keine drei auf derselben Geraden liegen. Beweise, dass es mindestens ein Dreieck gibt, dessen Ecken mit solchen Punkten übereinstimmen und dessen Flächeninhalt höchstens 8cm^{2}beträgt.

21. (BWM 2001 II, 1) Zehn Ecken eines regelmäßigen 100-Eckes seien rot und zehn andere blau gefärbt. Man beweise: Unter den Verbindungsstrecken zweier roter Punkte gibt es mindestens eine, die genau so lang ist wie eine der Verbindungsstrecken zweier blauer Punkte.

Anfragen zu Lösungen an `koksch@math.tu-dresden.de`