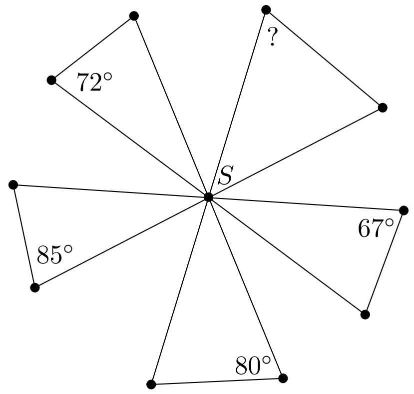
Aufgabe 1. Nach ihrem Alter gefragt, antwortet Großmutter Hilde in einem Rätsel: Ich habe fünf Kinder von verschiedenem Alter, jeweils vier Jahre auseinander. Mein erstes Kind bekam ich, als ich 21 Jahre alt war, und nun ist mein jüngstes Kind 21 Jahre alt. Wie alt ist die Großmutter?

Aufgabe 2. Ein aus fünf dreieckigen Flügeln bestehender Windmühlenpropeller wird durch fünf gleich lange durchgezogene Strecken gebildet, deren Mittelpunkte alle im Punkt S liegen und deren Endpunkte wie auf dem Bild verbunden sind. Wie groß ist der mit dem Fragezeichen beschriftete Winkel in Grad?



Aufgabe 3. Die Kinder einer Klasse hatten die Möglichkeit, an drei verschiedenen Leichtathletik-Wettbewerben teilzunehmen. Jedes Kind musste an mindestens einem Wettbewerb teilnehmen. In dieser Klasse haben 22 Kinder den Sprintlauf gewählt, 13 Kinder haben sich für den Weitsprung entschieden und 15 Kinder haben am Kugelstoßwettbewerb teilgenommen. Des Weiteren wissen wir, dass 8 Kinder den Sprint und den Weitsprung gewählt haben, 7 Kinder haben den Sprint und das Kugelstoßen gewählt und 6 Kinder haben sich für den Weitsprung und das Kugelstoßen entschieden. Es gibt 3 sehr ehrgeizige Kinder, die an allen drei Wettbewerben teilnehmen. Wie viele Kinder gibt es in dieser Klasse?

Aufgabe 4. Eine Zahl heißt *super-gerade*, falls alle ihre Ziffern gerade sind. Wie viele fünfstellige super-gerade Zahlen gibt es, die bei Addition von 24680 wieder eine super-gerade Zahl ergeben?

Aufgabe 5. Es war einmal ein weiser König, der hatte um sein Schloss als Zentrum vier kreisförmige, konzentrische Schutzmauern mit den Radien 50, 100, 150 und 200 anlegen lassen. Das ganze Gebiet innerhalb der größten Mauer sowie innerhalb der anderen Mauern wurde als Wohnland genutzt. Nun kamen friedvolle Zeiten und der König beschloss, alle vier Schutzmauern einreißen zu lassen und mit dem Material der vier Mauern eine einzige, kreisförmige Mauer errichten zu lassen, und zwar von maximal möglichem Radius und wieder mit seinem Schloss im Mittelpunkt.

Bestimme diejenige Zahl größer oder gleich 1, die das Verhältnis des Flächeninhalts des neuen Wohnlandes zum Flächeninhalt des alten Wohnlandes darstellt.

Aufgabe 6. Zoe versucht, ein Zahlenschloss zu knacken. Über den gesuchten vierstelligen Code wurde ihr Folgendes verraten:

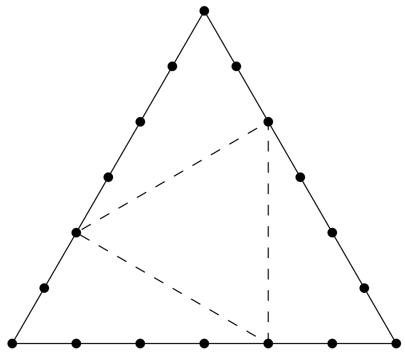
- Alle darin vorkommenden Ziffern sind verschieden.
- 137 und 17 teilen die gesuchte Zahl.
- Die Summe der Ziffern ist eine Primzahl, und zwar so klein wie möglich.

Welche Zahl öffnet das Schloss?

Aufgabe 7. Es liegen vier regelmäßige Vielecke auf dem Tisch. Eines davon ist ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 1. Die anderen drei sind kongruente regelmäßige Vielecke mit Seitenlänge 1. Jeweils zwei der vier Vielecke haben genau eine Seite gemeinsam. Keine zwei Vielecke überschneiden sich. Wie groß ist der Umfang der resultierenden Figur, ohne dabei die gemeinsamen Seiten mit einzuberechnen?

Aufgabe 8. In einem gleichseitigen Dreieck sind die drei Eckpunkte sowie weitere Punkte auf seinem Rand markiert, so dass jede der drei Seiten in 2021 kongruente Abschnitte geteilt ist. Bestimme die Anzahl aller gleichseitigen Dreiecke mit Eckpunkten in diesen markierten Punkten.

Hinweis: Die Abbildung zeigt ein solches Dreieck für den Fall, dass jede Seite des gegebenen gleichseitigen Dreiecks in 6 kongruente Teile unterteilt wurde.



Aufgabe 9. Veronica schneidet von einem quadratischen Blatt Papier die Ecken so weg, dass sie ein regelmäßiges Achteck erhält. Der dabei entstehende Abfall hat einen gesamten Flächeninhalt von 300. Wie groß ist die Seitenlänge des regelmäßigen Achtecks?

Aufgabe 10. Bestimme die größte dreistellige Zahl n mit folgenden Eigenschaften:

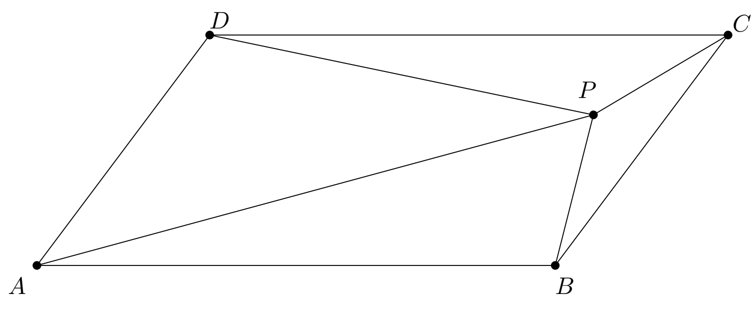
1. Die Summe der Ziffern von n ist 16.
2. Das Produkt der Ziffern von n ist nicht 0, endet aber auf 0.
3. Die Summe der Ziffern des Produkts der Ziffern von n ist 3.

Aufgabe 11. Von der Zahl 6437051928 sollen genau fünf Ziffern entfernt werden, so dass die sich ergebende fünfstellige Zahl die größtmögliche ist. Wie lautet die erhaltene Zahl?

Aufgabe 12. Sei n eine positive ganze Zahl. Nun betrachte alle aufsteigenden Folgen F_n, die mit 1 starten und den konstanten Abstand n zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern haben. Beispielsweise ist F_2 die Folge $1, 3, 5, \ldots$. Für wie viele n enthält die Folge F_n die Zahl 2021 als Folgenglied?

Aufgabe 13. In einem 90 Meter langen geraden Korridor sind alle 10 Meter Startplätze für Roboter installiert, insgesamt 10 Plätze. Auf sieben davon werden zufällig Roboter verteilt, die auf ein gemeinsames Startsignal hin zufällig in eine der beiden Richtungen entlang des Korridors mit einer konstanten Geschwindigkeit von 10 Metern pro Minute losfahren. Die Roboter fahren dabei ohne Kollision aneinander vorbei, drehen an den Enden des Korridors ohne Zeitverzögerung um und fahren in die andere Richtung weiter. Wie viele Sekunden dauert es maximal, bis sich alle Roboter mindestens einmal begegnet sind?

Aufgabe 14. Im Parallelogramm $ABCD$ liegt ein Punkt P so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks CDP drei Mal so groß ist wie der des Dreiecks BCP und ein Drittel so groß wie der des Dreiecks APD. Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks ABP, wenn das Dreieck CDP den Flächeninhalt 18 besitzt.



Aufgabe 15. Wenn man die Zahlen 1058, 1486 und 2021 durch eine bestimmte natürliche Zahl $d > 1$ teilt, erhält man jedes Mal den gleichen Rest. Bestimme d.

Aufgabe 16. In einem Fußballstadion hat die Ersatzbank vierzehn einzelne Sitzplätze. Das neue Trainerteam, das aus dem Trainer, dem Co-Trainer, dem Manager und dem Physiotherapeuten besteht, möchte alle Spieler besser kennenlernen. Deshalb wollen sie während des Fußballspiels auf der Ersatzbank zwischen den 10 Auswechselspielern sitzen, so dass jedes Mitglied des Trainerteams zwischen zwei Spielern sitzt.

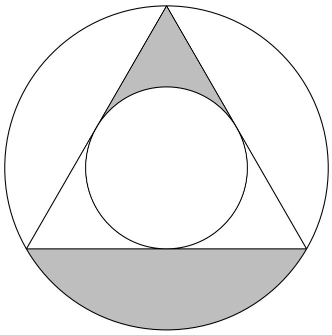
Auf wie viele Arten können die Mitglieder des Trainerteams ihre vier Sitzplätze wählen, um dies zu erreichen?

Hinweis: Werden zwei verschiedene Anordnungen des Trainerteams auf denselben vier Sitzen gewählt, so zählen sie als zwei Möglichkeiten.

Aufgabe 17. Eine regelmäßige Pyramide hat eine quadratische Grundfläche mit dem Flächeninhalt 1 und der Inhalt der gesamten Oberfläche ist 3. Wie groß ist das Volumen der Pyramide?

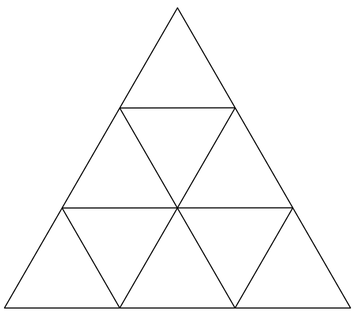
Aufgabe 18. Die magische Kanaan-Maschine wandelt Flüssigkeiten um. Wenn sie reines Wasser erhält, wandelt sie 6 % davon in Wein um und lässt die restlichen 94 % unberührt. Wenn sie reinen Wein erhält, wandelt sie 10 % davon in Wasser um und lässt die restlichen 90 % unberührt. Wenn sie eine Mischung erhält, wirkt es auf die einzelnen Komponenten wie oben beschrieben. Maria kaufte Wasser und Wein, insgesamt 6000 Liter, und schüttete alles in ihre Kanaan-Maschine. Nachdem die Maschine stoppte, stellte Maria fest, dass die Mischung unverändert blieb. Wie viele Liter Wein hat Maria in die Maschine gegeben?

Aufgabe 19. In der Abbildung ist ein gleichseitiges Dreieck mit seinem Inkreis und seinem Umkreis zu sehen. Bestimme die Größe der grauen Fläche, wenn der Flächeninhalt des Umkreises 140 beträgt.



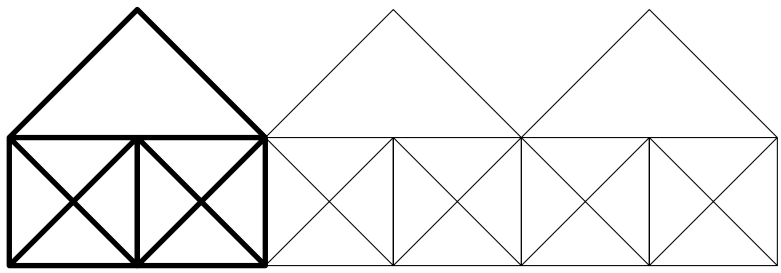
Aufgabe 20. Das Produkt von 2021 positiven ganzen Zahlen entspricht dem Doppelten ihrer Summe. Bestimme den größtmöglichen Wert einer dieser Zahlen.

Aufgabe 21. Die neun dreieckigen Zellen in der Abbildung sollen mit verschiedenen positiven ganzen Zahlen befüllt werden, so dass je zwei Zahlen in benachbarten Zellen einen gemeinsamen Teiler größer 1 haben. Hierbei ist eine Zelle ein kleines Dreieck und zwei Zellen werden benachbart genannt, wenn die zwei Dreiecke eine gemeinsame Seite besitzen. Was ist die kleinstmögliche Summe von neun eingetragenen Zahlen?



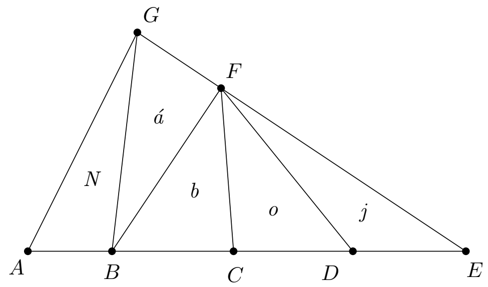
Aufgabe 22. Lotta zeichnet immer wieder dasselbe Haus: Es besteht aus zwei deckungsgleichen Quadraten, ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck bildet das Dach. Jedes neue Haus wird in einer Linie neben die schon existierenden

Häuser gesetzt. Hier sieht man ihre ersten drei Häuser:

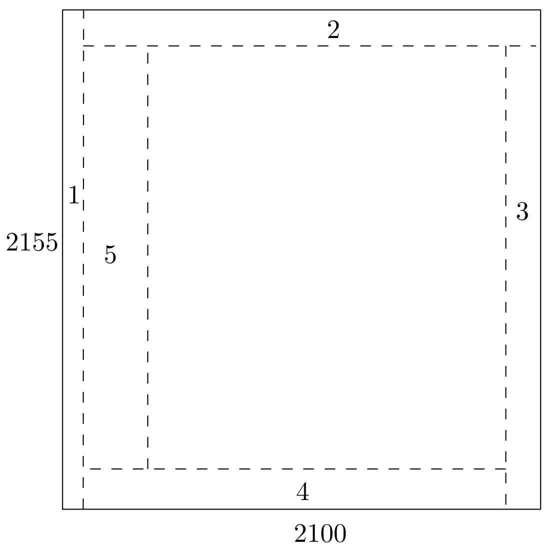


Welches ist die kleinstmögliche Anzahl an Häusern, die sie zeichnen muss, um in ihrer gesamten Zeichnung mindestens 2021 Dreiecke zählen zu können?

Aufgabe 23. Jedes der fünf Dreiecke N, á, b, o, j hat den gleichen Flächeninhalt. Bestimme die Länge von AB, wenn $|CD| = 5$ ist.

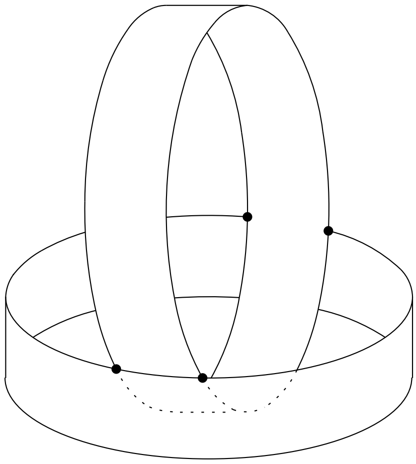


Aufgabe 24. Anna hat ein großes rechteckiges Blatt Papier mit den Seitenlängen 2155 und 2100. Sie schneidet zuerst einen Streifen der Breite 1 an der längeren Seite ab. Dann fährt sie im Uhrzeigersinn fort und schneidet einen Streifen der Breite 2 an der kürzeren Seite ab, dann wieder einen Streifen der Breite 3 an der längeren Seite usw., siehe nachfolgende Abbildung. Sie setzt dies so lange fort, wie sie Streifen wachsender Breite abschneiden kann.



Am Ende bleibt ihr ein Rechteck übrig, von dem sie keinen Streifen wachsender Breite mehr abschneiden kann. Bestimme den Flächeninhalt dieses Rechtecks.

Aufgabe 25. Einer von zwei identischen Ringen mit einem Radius von 4 und der unbekannten Breite w liegt horizontal auf einem Tisch, während der zweite vertikal ausgerichtet ist. Der zweite Ring berührt den ersten an genau vier Punkten (siehe Abbildung) und sein niedrigster Punkt liegt in der Höhe 1 über dem Tisch. Wie groß ist w?



Aufgabe 26. Gegeben sei ein Polynom vom Grad 14 mit ganzzahligen Koeffizienten, positivem führenden Koeffizienten und 14 verschiedenen ganzzahligen Nullstellen. Ausgewertet in Null hat das Polynom den positiven Wert p. Bestimme den kleinstmöglichen Wert von p.

Aufgabe 27. Mit ihrer üblichen Handschrift schreibt Johanna die Ziffern 4, 5 und 7 mit zwei Strichen und jede andere Ziffer mit einem Strich. Wie viele Striche braucht sie, um alle ganzen Zahlen von 1 bis 2021 einschließlich dieser beiden Zahlen zu schreiben?

Aufgabe 28. Die Felder der unten stehenden Zeile sollen so mit den Zahlen $1, 1, 2, 2, \ldots, 8, 8$ gefüllt werden, dass für jede benutzte Ziffer n genau n Felder zwischen den zwei Feldern mit den Einträgen n liegen. Drei dieser Zahlen sind schon eingetragen:

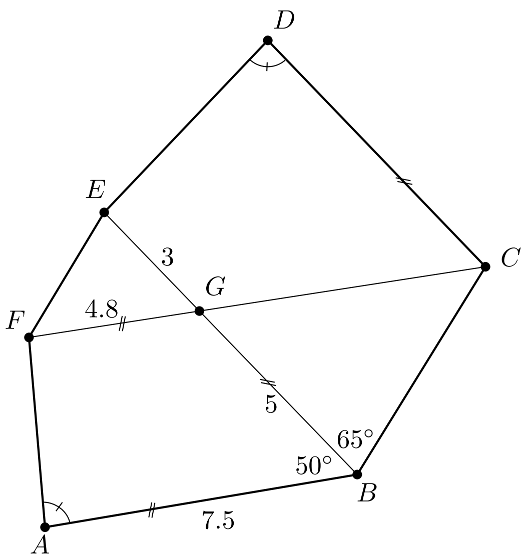
					6	7		2							

Gemäß dieser Regel sollen nun die restlichen Zahlen eingetragen werden. Finde die vierstellige Zahl in den grau hinterlegten Feldern.

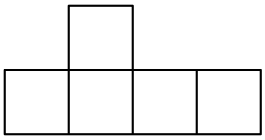
Hinweis: Für $1, 1, 2, 2, 3, 3$ wäre eine korrekt ausgefüllte Zeile:

3	1	2	1	3	2

Aufgabe 29. Gegeben ist ein konvexes Sechseck $ABCDEF$. Der Schnittpunkt der Diagonalen BE und CF ist G. Folgende Eigenschaften des Sechsecks sind bekannt und in der Skizze eingezeichnet: $|AB| = 7.5$, $|BG| = 5$, $|GE| = 3$, $|GF| = 4.8$, $\angle BAF = \angle EDC$, $\angle GBA = 50°$, $\angle CBG = 65°$, AB ist parallel zu CF und CD ist parallel zu BE. Bestimme die Länge der Seite CD.



Aufgabe 30. Nadja und Selina spielen *Schiffe versenken*. Neben anderen Schiffen hat jeder ein Kanonenschiff mit Hubschrauberlandeplatz in der folgenden Form:



Nadja hat ihr Kanonenschiff irgendwo im Spielfeld, das ein $12 \times 12-$Gitter ist, versteckt. Weil sie dieses Spiel mit Bleistift auf einem Stück Papier spielen, kann die obige Figur des Kanonenschiffs rotiert und umgedreht werden. Wie oft muss Selina mindestens schießen, das heißt, ein Quadrat im Gitter auswählen, damit sie mit Sicherheit das Kanonenschiff von Nadja mindestens einmal getroffen hat?

Aufgabe 31. Für eine positive ganze Zahl a wird ein spitzwinkliges Dreieck ABC konstruiert, in dem die Seite BC die Länge a hat und die Längen der Höhen h_b und h_c ebenfalls ganze Zahlen sind. Bestimme a, wenn der größtmögliche Flächeninhalt eines solchen Dreiecks 101.4 ist.

Aufgabe 32. Ludwig hat die Summe von 1 000 positiven ganzen Zahlen gebildet und dabei als Ergebnis 1 200 500 erhalten. Wenn man diese Zahlen aufsteigend anordnet, dann beträgt die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Zahlen entweder 2 oder 7. Der kleinste Summand ist 101. Nun will Ludwig den größten Summanden der Summe so groß wie möglich machen und dabei alle anderen Bedingungen nach wie vor einhalten. Bestimme unter diesen Bedingungen den größtmöglichen Wert des größten Summanden.

Aufgabe 33. Wie lautet die kleinste positive ganze Zahl, die nur mit den Ziffern 2 und 9 geschrieben werden kann, eine ungerade Anzahl von Ziffern hat und durch 11 teilbar ist?

Aufgabe 34. Sei $ABCDE$ ein regelmäßiges Fünfeck und F der Schnittpunkt der Diagonalen AD und BE. Das gleichschenklige Dreieck AFE kann zu einem regelmäßigen Fünfeck $AFEXY$ vervollständigt werden, das mit p bezeichnet wird. Es gibt ein weiteres regelmäßiges Fünfeck q, dessen Eckpunkte die Schnittpunkte aller fünf Diagonalen von $ABCDE$ sind. Wenn $|AF| = 1$ ist, was ist der größte Abstand zwischen einem Eckpunkt von p und einem Eckpunkt von q?

Aufgabe 35. Man bestimme alle Tripel (a, b, c), die nur aus Primzahlen bestehen und die Gleichung

$$175a + 11ab + bc = abc$$

erfüllen. Gib als Lösung dieser Aufgabe die Summe aller möglichen Werte für c in diesen Tripel an.

Aufgabe 36. Hella und Jeremias wollen ein Haus kaufen. Sie suchen nach einem perfekten Haus, aber ihre Definitionen von „perfekt“ unterscheiden sich. Sie finden 10 Angebote und beschließen, den folgenden Entscheidungsprozess zu versuchen: Beide ordnen die Häuser zufällig, wobei ein Unentschieden nicht erlaubt ist, und wenn die Top-3 Häuser von Hella und die von Jeremias genau ein Haus gemeinsam haben, kaufen sie dieses Haus. Wie groß ist die Chance, dass dieser Vorgang erfolgreich ist?

Aufgabe 37. Wir definieren die beiden Polynome

$$p(x) = ax^{2021} + bx^{2020} + \cdots + ax^{2k-1} + bx^{2k-2} + \cdots + bx^2 + ax + b$$

und

$$q(x) = ax^2 + bx + a,$$

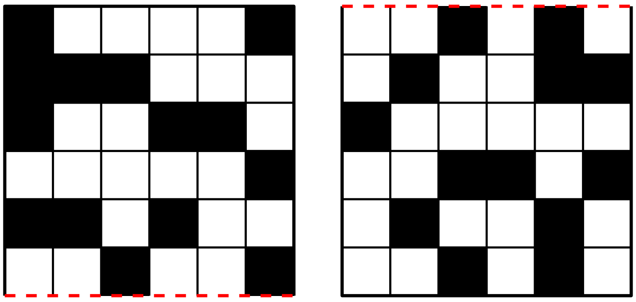
wobei a und b positive reelle Zahlen sind. Es ist bekannt, dass $q(x)$ genau eine reelle Nullstelle hat. Bestimme die Summe aller reellen Nullstellen von $p(x)$.

Aufgabe 38. Finde die Summe aller Primzahlen p, für die es eine positive ganze Zahl n gibt, so dass die Dezimalbruchentwicklung von $\frac{n}{p}$ als kürzeste Periodenlänge die Länge 5 hat.

Aufgabe 39. Vier internationale Náboj-Fans treffen sich. Jeder von ihnen spricht genau drei der fünf Sprachen Tschechisch, Deutsch, Englisch, Polnisch und Ungarisch. Sie sprechen keine weitere Sprache. Insgesamt gibt es also 10000 Möglichkeiten, die Sprachen den Personen zuzuordnen. In wie vielen dieser Möglichkeiten kann jemand einen Náboj-Workshop in einer Sprache halten, die alle verstehen?

Aufgabe 40. Edith schreibt alle Brüche auf, deren Zähler und Nenner positive ganze Zahlen kleiner oder gleich 100 sind. Sie löscht alle, die nicht vollständig gekürzt sind, und listet dann den Rest vom kleinsten bis zum größten Bruch auf. Welcher Bruch steht in Ediths Liste unmittelbar vor $\frac{2}{3}$?

Aufgabe 41. In ein $6 \times 6 \times 6$ Gitter werden 23 schwarze Einheitswürfel gelegt. Die Abbildung zeigt, wie das resultierende Objekt von oben (linkes Quadrat) und von vorne (rechtes Quadrat) aussieht. Ein weißes Quadrat bedeutet, dass sich in der jeweiligen Spalte kein schwarzer Würfel befindet. Die gemeinsame Kante der beiden entsprechenden Flächen des Gitters ist rot markiert. Bestimme den Oberflächeninhalt des schwarzen Objekts.



Aufgabe 42. Eine *teilende Zerlegung* einer positiven ganzen Zahl N ist eine Folge von positiven ganzen Zahlen $d_1, d_2, \ldots, d_k$ mit $k \geq 1$, $d_1 \neq 1$, so dass die Teilbarkeitsbedingungen $d_1 \mid d_2 \mid d_3 \mid \cdots \mid d_k \mid N$ erfüllt sind und $d_1 \cdot d_2 \cdot \cdots \cdot d_k = N$ gilt. Die Zahl d_k sei eine *Teilerspitze* der teilenden Zerlegung genannt. Was ist das arithmetische Mittel der Teilerspitzen von allen teilenden Zerlegungen von 720?

Aufgabe 43. Das Spiel *Scrabboj* besteht aus einem 5×1 Spielbrett und einem Beutel voller unterscheidbarer Spielsteine, die mit jeweils exakt einem der Buchstaben N, A, B, O und J beschriftet sind. Wie viele verschiedene Spielsteine-Sets gibt es, so dass es 1440 Möglichkeiten gibt, aus den Steinen das Wort *NABOJ* zu bilden?

Aufgabe 44. Bestimme die größte natürliche Zahl n, für die $4^{2021} + 4^n + 4^{3500}$ eine Quadratzahl ist.

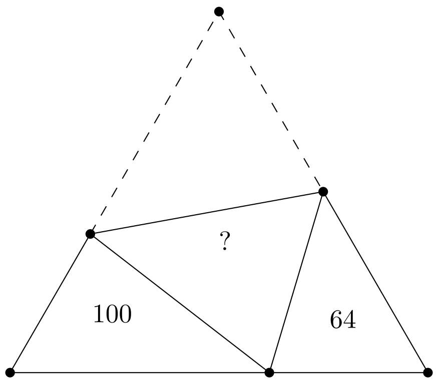
Aufgabe 45. Wie viele Koeffizienten des Polynoms

$$P(x) = \prod_{n=2}^{2021} (x^n + (-1)^n n) = (x^2+2)(x^3-3)(x^4+4)\cdots(x^{2021}-2021)$$

sind positiv, also echt größer als null?

Aufgabe 46. Die *Würfelstadt von Morgen* hat einen Stadtplan, der wie ein kubisches $4 \times 4 \times 4$ Gitter aussieht. Jeder Punkt mit ganzzahligen Koordinaten wird als *Kreuzung* bezeichnet, und alle zwei Kreuzungen mit der Entfernung 1 sind durch eine gerade Straße verbunden. Die Kreuzung mitten in der Stadt, $(2, 2, 2)$, ist wegen Wartungsarbeiten geschlossen. Sandi möchte über den kürzest möglichen Weg auf den Straßen von der Kreuzung $(0, 0, 0)$ zur Kreuzung $(4, 4, 4)$ gelangen. Wie viele mögliche Wege gibt es?

Aufgabe 47. Ein gleichseitiges Dreieck wird so gefaltet, dass eine Ecke genau auf der gegenüberliegenden Seite zu liegen kommt, siehe Abbildung. Dabei haben die neu entstandenen, nicht überlappenden Dreiecke die Flächeninhalte 100 und 64. Bestimme den Flächeninhalt des überlappenden Dreiecks.



Aufgabe 48. Wir werfen eine faire Münze so lange, bis die Sequenz Kopf-Zahl-Kopf eintritt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sequenz Zahl-Kopf-Zahl-Kopf noch nicht vorgekommen ist?

Aufgabe 49. Finde die kleinste positive reelle Zahl x mit folgender Eigenschaft: Es gibt mindestens ein Tripel (s, t, u) positiver reeller Zahlen, so dass die Gleichungen

$$\begin{aligned} s^2 - st + t^2 &= 12, \\ t^2 - tu + u^2 &= x, \end{aligned}$$

gelten und keine zwei Tripel mit dieser Eigenschaft sich nur im letzten Eintrag u unterscheiden.

Aufgabe 50. Für wie viele $x \in \{1, 2, 3, \ldots 2020\}$ ist Folgendes möglich: Jakob addiert 2020 nicht-negative aufeinander folgende ganze Zahlen, Paul addiert $2020 + x$ nicht-negative aufeinander folgende ganze Zahlen und beide erhalten dieselbe Summe?

Aufgabe 51. Die Kreise k_B und k_C berühren den Kreis k_A in den Punkten P bzw. Q. Bestimme den Radius r_A des Kreises k_A, wenn die Radien der Kreise k_B und k_C durch $r_B = 5$ und $r_C = 3$ gegeben sind, $|PQ| = 6$ gilt und die Länge der berührenden Strecke $|TS| = 12$ ist.