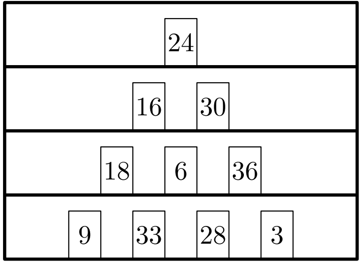
Aufgabe 1. Auf einem Jahrmarkt gibt es ein spezielles Dosenwurfspiel: Auf jeder Dose steht eine Zahl. Man darf beliebige Dosen umwerfen, gewinnt aber nur, wenn die Summe ihrer Zahlen genau 50 ergibt. Finde eine solche Menge von Dosen aus denen in der Abbildung und gib alle ihre Zahlen in aufsteigender Reihenfolge an.

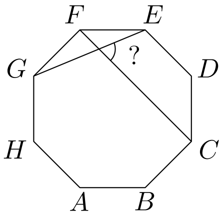


Aufgabe 2. Anna hat drei gewöhnliche sechsseitige Würfel: einen roten, einen blauen und einen gelben. Jeder Würfel hat wie üblich die Augenzahlen 1 bis 6 auf den Seitenflächen. Nachdem sie alle drei Würfel ein Mal geworfen hat, addiert sie die drei Augenzahlen. Auf wie viele verschiedene Arten kann sie die Augensumme 8 erhalten?

Aufgabe 3. Adam hat vier Kinder. Er bemerkt, dass sein derzeitiges Alter der Summe der Alter seiner drei ältesten Kinder entspricht, während sein Alter in sechs Jahren der Summe der Alter seiner drei jüngsten Kinder entsprechen wird. Wie groß ist der Altersunterschied zwischen Adams jüngstem und ältestem Kind?

Aufgabe 4. Eine Digitaluhr mit 24-Stunden-Display zeigt Uhrzeiten zwischen 00:00 und 23:59 an. Wie oft zeigt das Display im Laufe eines ganzen Tages genau vier der fünf Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 an? Die Ziffern dürfen in beliebiger Reihenfolge erscheinen.

Aufgabe 5. Gegeben ist ein regelmäßiges Achteck $ABCDEFGH$, siehe Abbildung. Bestimme die Größe des markierten spitzen Winkels in Grad, den die Diagonalen CF und EG einschließen.



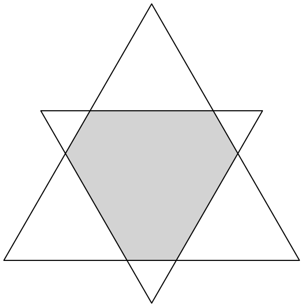
Aufgabe 6. Seien a, b, c, d, e fünf positive ganze Zahlen, sodass $a < b < c < d < e$ gilt und ihr arithmetisches Mittel 16 ist. Bestimme den maximal möglichen Wert von d.

Aufgabe 7. Ein Reisender näherte sich einem antiken Steintor in der Wüste und traf dort auf eine Sphinx, die ihm den Weg versperrte. Die Sphinx sagte: „Löse mein Rätsel und du darfst passieren! Ich denke an eine dreistellige Zahl mit den folgenden Eigenschaften:

- Die Zahl ist ungerade,
- ihre Ziffern sind alle verschieden und werden von links nach rechts größer,
- sie ist durch 9 teilbar, aber wenn man eine beliebige Ziffer entfernt, ist das Ergebnis nicht mehr durch 9 teilbar,
- eine ihrer Ziffern ist 6.“

Welche Zahl hatte die Sphinx gewählt?

Aufgabe 8. Zwei gleichseitige Dreiecke sind wie in der Abbildung dargestellt angeordnet. Ihre entsprechenden Seiten verlaufen parallel und sie haben denselben Umkreismittelpunkt. Die Seitenlängen betragen 17 cm im größeren Dreieck und 11 cm im kleineren Dreieck. Die gemeinsame Fläche beider Dreiecke ist ein Sechseck, das in der Abbildung grau schattiert ist. Bestimme den Umfang dieses Sechsecks (in cm).



Aufgabe 9. Tina möchte sich für ihren Sportverein anziehen. Sie muss genau ein T-Shirt, eine kurze Hose, ein Paar gleichfarbige Socken und ein Paar gleichfarbige Turnschuhe tragen. Zusätzlich darf sie wahlweise ein Haarband tragen. Sie besitzt T-Shirts in den Farben Weiß, Gelb, Grün, Blau und Rot, kurze Hosen und Haarbänder in Weiß, Schwarz und Grau, Socken in Weiß, Rot und Orange und schließlich Turnschuhe in Weiß und Schwarz. Sie trägt weiße Socken nur dann, wenn ihr gesamtes Outfit weiß ist – einschließlich des Haarbands, falls sie eines trägt. Auf wie viele verschiedene Arten kann Tina sich für ihren Sportverein kleiden?

Aufgabe 10. Finde eine vierstellige Zahl mit den folgenden Eigenschaften:

- Die Hunderterziffer ist doppelt so groß wie die Tausenderziffer.
- Die Einerziffer ist dreimal so groß wie die Zehnerziffer.
- Quadriert man jede Ziffer der Zahl, so ergibt die Summe dieser Quadrate 95.

Aufgabe 11. Sandi ist eine positive Person. Daher möchte sie die Kästchen in dem Ausdruck

$$\square\, 1\, \square\, 2\, \square\, 3\, \square\, 4\, \square\, 5$$

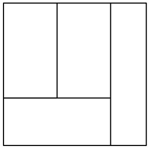
entweder mit einem Pluszeichen oder einem Minuszeichen so ausfüllen, dass das Ergebnis eine positive Zahl ist. Auf wie viele Arten kann sie das tun?

Aufgabe 12. In der unten gezeigten schriftlichen Addition steht jeder Buchstabe für eine Ziffer. Gleiche Buchstaben stehen für dieselbe Ziffer, unterschiedliche Buchstaben für unterschiedliche Ziffern.

$$\begin{array}{cccc} & A & A & A \\ + & A & A & B \\ + & A & C & C \\ \hline 2 & 0 & 2 & 6 \end{array}$$

Finde die dreistellige Zahl ABC.

Aufgabe 13. Das Bild zeigt ein Quadrat mit der Seitenlänge 2, das in vier Rechtecke unterteilt ist. Alle Rechtecke haben gleichen Flächeninhalt. Berechne die Summe ihrer Umfänge.



Hinweis: Eine Seite, die zu zwei Rechtecken gehört, ist in beiden Umfängen zu berücksichtigen.

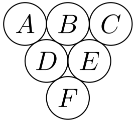
Aufgabe 14. Brigitta bildet eine lange Ziffernfolge, indem sie den vierstelligen Block 2026 gemäß den folgenden Regeln 2026 Mal hintereinander schreibt: Sie beginnt mit der Zahl 2026 und fährt dann mit 6202 fort, was 2026 in umgekehrter Reihenfolge ist, wobei die sich wiederholende Ziffer 6 an der Verbindungsstelle weggelassen wird. Sie fährt fort, indem sie zwischen der normalen und der umgekehrten Reihenfolge von 2026 wechselt und jedes Mal die letzte Ziffer des vorhergehenden Blocks als erste Ziffer des nächsten Blocks verwendet, sodass benachbarte Blöcke sich genau in einer Ziffer überlappen. In der folgenden Darstellung sind die ersten sechs von insgesamt 2026 Blöcken zu sehen.

$$\underbrace{2\;0\;2\;6}_{1}\overbrace{\;2\;0\;2}^{2}\underbrace{\;0\;2\;6}_{3}\overbrace{\;2\;0\;2}^{4}\underbrace{\;0\;2\;6}_{5}\overbrace{\;2\;0\;2}^{6}\;\ldots$$

Bestimme die Summe der Ziffern der resultierenden Zahl.

Aufgabe 15. Es ist 8:00 Uhr morgens. Wie spät wird es in 260320261998 Stunden sein, wenn es in der Zwischenzeit keine Zeitumstellung wie beispielsweise zwischen Sommer- und Winterzeit gibt?

Aufgabe 16. Es gibt eine Weintraube, die wie auf dem Bild angeordnet ist. Eine Beere darf nur gegessen werden, wenn alle Beeren direkt darunter (d.h. die eine oder zwei Beeren, die sie unten berührt) bereits gegessen wurden. Beispielsweise muss Beere D vor A und B gegessen werden. In wie vielen verschiedenen Reihenfolgen kann die gesamte Traube gegessen werden?



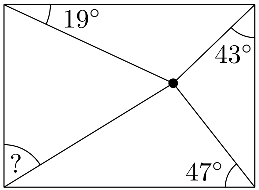
Aufgabe 17. Sei x eine positive ganze Zahl mit

$$\mathrm{kgV}(x, 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^2) = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \quad \text{und} \quad \mathrm{kgV}(x, 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7) = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2.$$

Wie viele verschiedene Werte kann $\mathrm{ggT}(x, 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3)$ annehmen?

Hinweis: $\mathrm{ggT}(a, b)$ und $\mathrm{kgV}(a, b)$ bezeichnen den größten gemeinsamen Teiler bzw. das kleinste gemeinsame Vielfache der ganzen Zahlen a und b.

Aufgabe 18. Ein Punkt befindet sich innerhalb eines Rechtecks, wie in der Abbildung zu sehen ist. Drei Winkel sind markiert. Bestimme die Größe des mit einem Fragezeichen markierten Winkels in Grad.



Aufgabe 19. Alina will sich eine Halskette aus zwei verschiedenen Perlenarten basteln. Dafür hat sie insgesamt 100 Perlen gekauft, und zwar mehr günstige als teure. Die günstigen Perlen kosteten insgesamt 459 Gulden. Jede teure Perle kostete 13 Gulden mehr als jede günstige Perle. Alle Preise in Gulden sind positive ganze Zahlen. Wie viele Gulden hat Alina für die teuren Perlen bezahlt?

Aufgabe 20. In der Gleichung

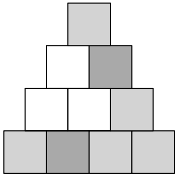
$$\frac{M \cdot A \cdot T \cdot H}{N \cdot A \cdot B \cdot O \cdot J} = G \cdot A \cdot M \cdot E$$

steht jeder Buchstabe für eine Ziffer. Gleiche Buchstaben stehen für dieselbe Ziffer, unterschiedliche Buchstaben für unterschiedliche Ziffern. Das Symbol $\cdot$ bezeichnet die Multiplikation. Wie viele verschiedene Werte kann das Produkt $M \cdot A \cdot N \cdot G \cdot O$ annehmen?

Aufgabe 21. Drei Leuchttürme liegen an einer geraden Küstenlinie. Der Abstand zwischen je zwei benachbarten Leuchttürmen beträgt jeweils 13 km. Ein Schiff auf See ist 10 km von einem der beiden äußeren Leuchttürme und 13 km vom mittleren Leuchtturm entfernt. Wie viele Kilometer ist das Schiff vom anderen äußeren Leuchtturm entfernt?

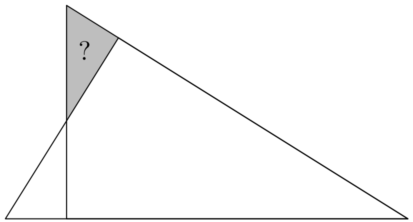
Hinweis: Die Erdkrümmung soll hierbei vernachlässigt werden.

Aufgabe 22. Auf wie viele Arten kann man jedem der zehn quadratischen Bausteine einer Pyramide der Höhe 4 eine von drei Farben zuweisen, sodass jede nach oben ausgerichtete Teilpyramide der Höhe 2 entweder mit allen drei Farben oder nur mit einer Farbe gefärbt ist? Ein Beispiel für eine solche Färbung ist in der Abbildung zu sehen.



Aufgabe 23. Jeder Ecke eines regulären 100-Ecks ist genau eine Zahl aus $1, 2, \ldots, 100$ zugeordnet, und zwar alle verschieden, so dass der absolute Betrag der Differenz der Zahlen jedes Paares von gegenüberliegenden Ecken dieselbe feste Zahl n ist. Bestimme die Summe aller möglichen verschiedenen Werte von n.

Aufgabe 24. Man nehme zwei rechtwinklige Dreiecke mit den Seitenlängen 5, 12 und 13 und lege sie so übereinander, dass sie den Eckpunkt mit dem kleinsten Winkel gemeinsam haben und sich entlang ihrer Kanten teilweise überlappen, so wie es in der Abbildung zu sehen ist. Wie groß ist der Flächeninhalt eines der Dreiecke, das nicht zum überlappenden Gebiet gehört, beispielsweise des grau gefärbten?



Aufgabe 25. Jeder der sieben Zwerge wählte eine positive ganze Zahl. Alle Zwerge kennen die Zahlen, die die anderen gewählt haben. Schneewittchen fragte jeden Zwerg, welche Zahl er gewählt hatte.

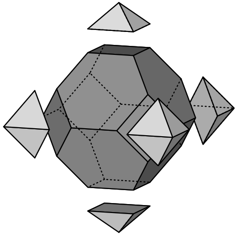
- Der erste Zwerg schwieg.
- Der zweite Zwerg sagte: „Meine Zahl ist gleich der Zahl des ersten Zwergs."
- Der dritte Zwerg sagte: „Meine Zahl ist gleich der Summe der Zahlen des ersten und zweiten Zwergs."
- Der vierte Zwerg sagte: „Meine Zahl entspricht der Summe der Zahlen des ersten, zweiten und dritten Zwergs."
- ...
- Der siebte Zwerg sagte: „Meine Zahl entspricht der Summe der Zahlen des ersten bis sechsten Zwergs."

Es ist bekannt, dass die Summe der sieben ausgewählten Zahlen 46 beträgt. Es ist auch bekannt, dass genau ein Zwerg gelogen hat. Alle anderen Zwerge haben Aussagen gemacht, die sich auf die anfangs ausgewählten Zahlen beziehen. Bestimme alle Zahlen, die der lügende Zwerg ausgewählt haben könnte.

Aufgabe 26. Für die Kommunikation mit einem Satelliten im Orbit werden sechs verschiedene Kanäle aus der Menge $\{1, 2, \ldots, 13\}$ ausgewählt. Dabei ist nur die Kanalauswahl relevant – zwei Auswahlen gelten als gleich, wenn sie dieselben sechs Kanäle enthalten, unabhängig von der Reihenfolge. Um die beste Übertragungsrate zu erzielen, muss die Auswahl mindestens ein Kanalpaar enthalten, dessen Kanalnummern sich um eine ungerade Zahl unterscheiden. Wie viele solcher Kanalauswahlen sind möglich?

Aufgabe 27. Sei N eine 7-stellige Zahl, die durch jede ihrer Ziffern teilbar ist. Wenn alle Ziffern von N verschieden und ungleich Null sind, berechne die Summe der Ziffern von N.

Aufgabe 28. Ein abgestumpftes Oktaeder entsteht, indem man die Ecken eines regelmäßigen Oktaeders so abschneidet, dass ein Polyeder mit acht regelmäßigen sechseckigen Flächen und sechs quadratischen Flächen übrig bleibt. Wie groß ist das Volumen des abgestumpften Oktaeders im Verhältnis zum Volumen des ursprünglichen Oktaeders?



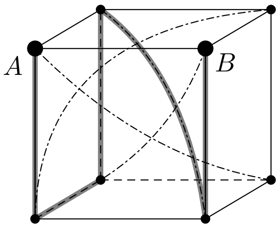
Hinweis: Ein regelmäßiges Oktaeder ist ein Körper mit acht kongruenten gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen.

Aufgabe 29. Bestimme alle reellen Lösungen der Gleichung

$$8\left(4^x + 4^{-x}\right) - 54\left(2^x + 2^{-x}\right) + 101 = 0.$$

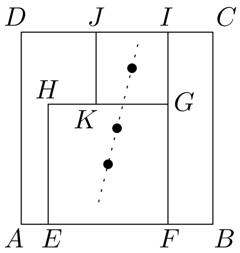
Aufgabe 30. Auf dem würfelförmigen Planeten *Railbox Prime* gibt es acht Städte, eine an jeder Ecke des Würfels. Entlang jeder Kante des Würfels verlaufen Bahnstrecken, sodass Städte, die Endpunkte einer Kante sind, direkt miteinander verbunden sind. Weiter gibt es vier „Tunnelbahnstrecken“, die das Innere des Planeten durchqueren und jeweils zwei gegenüberliegende Eckstädte miteinander verbinden.

Ein Besucher startet in einer Eckstadt A und möchte eine benachbarte Eckstadt B erreichen, die eine Kante entfernt ist. Er möchte genau fünf Bahnstrecken nehmen, keine Stadt mehr als ein Mal besuchen und bei der Ankunft anhalten. Wie viele solcher Routen sind möglich, wenn der Besucher mindestens eine Tunnelbahn auf seinem Weg benutzen will? Das Diagramm zeigt ein Beispiel für eine solche Route.



Aufgabe 31. Einst gab es eine Wahl mit 2026 Wählern und den vier Kandidaten A, B, C und D. Kandidat A schnitt am schlechtesten ab und erhielt nur ein Sechstel der Stimmen von Kandidat B. Kandidat C erhielt genau 446 Stimmen weniger als alle anderen Kandidaten zusammen. Kandidat D gewann die Wahl mit weniger als 800 Stimmen. Jeder Wähler gab genau eine Stimme für einen der vier Kandidaten ab. Wie viele Stimmen erhielt Kandidat A?

Aufgabe 32. Drei Quadrate $ABCD$, $EFGH$ und $KGIJ$ sind so angeordnet wie in der Abbildung dargestellt: Die Punkte E und F liegen auf der Strecke AB, die Punkte I und J liegen auf der Strecke CD und der Punkt K liegt auf der Strecke GH. Außerdem liegen die Mittelpunkte der drei Quadrate auf einer gemeinsamen Geraden. Bestimme die Länge der Strecke FB, wenn die Längen $\overline{AD} = 7$ und $\overline{HK} = 1$ gegeben sind.



Aufgabe 33. An der Tafel stehen mehrere Zahlen, darunter auch die Zahl 2026. Wenn man die Zahl 2026 löscht, verringert sich das arithmetische Mittel der Zahlen auf der Tafel um 6. Wenn man stattdessen eine weitere Zahl 2026 an die Tafel schreibt, erhöht sich das arithmetische Mittel um 4. Berechne die Summe der ursprünglich auf der Tafel stehenden Zahlen.

Aufgabe 34. Ein Floh springt entlang des Umfangs eines Kreises. Sein erster Sprung hat einen Zentriwinkel von $1°$, das heißt, der Winkel zwischen den Radien zu den Endpunkten des Sprungs beträgt $1°$. Jeder nachfolgende Sprung erfolgt in die gleiche Richtung und hat einen Zentriwinkel von $2°$, dann $3°$ und so weiter. Bei welchem Sprung landet der Floh zum ersten Mal wieder an seinem Ausgangspunkt?

Aufgabe 35. Im Königreich *Naboia* gibt es drei magische Gilden: die Gilde des Feuers, die Gilde des Wassers und die Gilde des Windes. Jede Gilde besteht aus zwei Meistermagiern und zwei Magierlehrlingen. Um das Reich zu verteidigen, müssen vier Kampfpaare gebildet werden, die jeweils aus einem Meister und einem Lehrling bestehen, wobei kein Paar zwei Magier derselben Gilde enthalten darf. Außerdem muss jede Gilde mindestens einen Meister und mindestens einen Lehrling zu den vier Paaren beitragen. Auf wie viele Arten können die Kampfpaare gebildet werden?

Hinweis: Jeder Meister und jeder Lehrling ist eine eigenständige Person. Daher ist es wichtig, welcher Magier in welchem Paar auftritt, aber die Reihenfolge, in der die vier Paare aufgeführt sind, ist irrelevant.

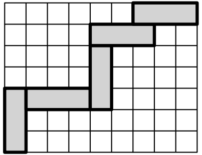
Aufgabe 36. Seien $x \neq 0$ und $y \neq 0$ zwei reelle Zahlen mit den Eigenschaften $x + \frac{1}{y} = \sqrt[3]{2}$ und $y + \frac{1}{x} = 3\sqrt[3]{4}$. Bestimme den Wert von $x^2 y + \frac{1}{xy^2}$.

Aufgabe 37. Gegeben ist ein Sehnenviereck $ABCD$ mit den Winkeln $\angle ADB = 48°$ und $\angle BDC = 56°$. Innerhalb des Dreiecks ABC wird ein Punkt X so gewählt, dass $\angle XCB = 24°$ gilt und der Strahl AX den Winkel $\angle BAC$ halbiert. Bestimme die Größe des Winkels $\angle CBX$ in Grad.

Hinweis: Ein Sehnenviereck ist ein Viereck, bei dem alle vier Eckpunkte auf einem Kreis liegen.

Aufgabe 38. Die Spezies *Nabionicula simplex* hat ein sehr primitives Gehirn, das in eine linke und eine rechte Gehirnhälfte unterteilt ist, die jeweils aus zwei Arten von Zellen bestehen, nämlich aus Neuronen und Gliazellen. Keine Zelle ist mit einer anderen Zelle derselben Gehirnhälfte verbunden, aber zwischen jedem Zellpaar aus verschiedenen Gehirnhälften besteht genau eine bidirektionale Verbindung. In einem Nabionicula simplex gibt es 168 Verbindungen Neuron–Neuron, 48 Verbindungen Gliazelle–Gliazelle und 191 Verbindungen Neuron–Gliazelle. Wie viele Neuronen hat diese Spezies insgesamt?

Aufgabe 39. Agnes hat fünf identische gerade, „I“-förmige Trimino-Steine und möchte damit auf einem rechteckigen 7×9-Gitter einen zusammenhängenden Pfad bilden, der die linke untere Ecke mit der rechten oberen Ecke verbindet. Jedes Trimino besteht aus einem mittleren Quadrat und zwei Endquadraten. Der Pfad muss so gelegt werden, dass sich jeweils zwei aufeinanderfolgende Triminos entlang genau einer gemeinsamen Gitterkante berühren, wobei diese Kante jeweils zu Endquadraten beider Triminos gehören muss. Ein solcher Pfad ist in der folgenden Abbildung dargestellt. Auf wie viele verschiedene Arten kann Agnes einen solchen Pfad bilden?



Aufgabe 40. Seien a, b, c, d reelle Zahlen mit $a + b + c + d = 2$ und

$$\frac{a^2}{a+2b} + \frac{b^2}{b+2c} + \frac{c^2}{c+2d} + \frac{d^2}{d+2a} = 2026.$$

Bestimme den Wert von

$$\frac{b^2}{a+2b} + \frac{c^2}{b+2c} + \frac{d^2}{c+2d} + \frac{a^2}{d+2a}.$$

Aufgabe 41. In einem Quader mit einer quadratischen Grundfläche der Seitenlänge 3 und der Höhe a befinden sich zwei Tischtennisbälle, die beide Radius 1 haben. Der erste Ball liegt so, dass er zwei benachbarte vertikale Flächen des Quaders, die Unterseite des Quaders und den zweiten Ball berührt. Der zweite Ball liegt so, dass er die anderen beiden benachbarten vertikalen Flächen des Quaders, die Oberseite des Quaders und den ersten Ball berührt. Bestimme die Höhe a des Quaders.

Aufgabe 42. Auf wie viele Arten kann eine 3×3-Tabelle mit den Ziffern $0, 1, \ldots, 9$ so gefüllt werden, dass jedes Feld genau eine Ziffer enthält, keine Ziffer mehr als einmal verwendet wird und die sechs Summen, die von den drei Zeilen und drei Spalten gebildet werden, entweder alle gerade oder alle ungerade sind? Hier ist ein Beispiel für eine gültige Tabelle, in der alle Zeilen- und Spaltensummen gerade sind:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 7 \\ 6 & 0 & 8 \end{array}$$

Aufgabe 43. Die Summe von vier paarweise verschiedenen positiven ganzen Zahlen a, b, c und d ist 20 000. Bestimme den kleinstmöglichen Wert von $\mathrm{kgV}(a, b, c, d)$.

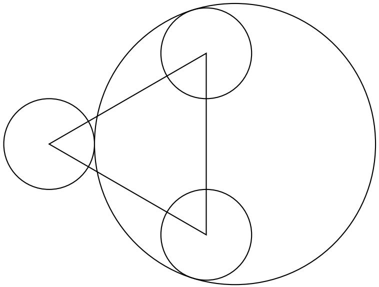
Hinweis: $\mathrm{kgV}(a, b, c, d)$ bezeichnet das kleinste gemeinsame Vielfache der ganzen Zahlen a, b, c und d. Dass die Zahlen a, b, c, d paarweise verschieden sind, heißt, dass keine zwei Zahlen gleich sind.

Aufgabe 44. Die Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sei definiert durch $a_n = \dfrac{n^2}{1.001^n}$. Bestimme den Index n, für den a_n in der Folge das Maximum annimmt.

Aufgabe 45. Fünf Freunde suchen sich Plätze für eine Show aus. Sie möchten alle in einer Reihe sitzen, die wie folgt angeordnet ist:

Es gibt eine Wand, vier Blöcke mit jeweils sechs Plätzen, die durch drei Gänge voneinander getrennt sind, und eine zweite Wand. Die Freunde sind schüchtern und möchten daher fünf Plätze so auswählen, dass sie ihre Plätze verlassen können, ohne Fremde bitten zu müssen aufzustehen, selbst wenn alle anderen Plätze besetzt sind. Wie viele solcher Fünfergruppen von Sitzen gibt es?

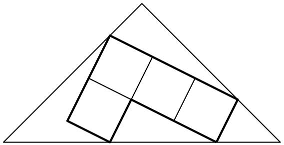
Aufgabe 46. Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 4. Um jeden Eckpunkt des Dreiecks wird ein kleiner Kreis mit Radius 1 gezogen. Bestimme den Radius desjenigen größeren Kreises, den zwei dieser kleinen Kreise von innen berühren und den der dritte kleine Kreis von außen berührt.



Aufgabe 47. Ein Raum ist voll mit Zwergen, die jeweils 1.2 m groß sind, und ein anderer Raum ist voll mit Riesen, die jeweils 4 m groß sind. Nachdem 35 Riesen und 24 Zwerge aus ihrem Raum in den jeweils anderen gewechselt sind, war die durchschnittliche Körpergröße in beiden Räumen exakt gleich. Wie groß war die kleinste mögliche Gesamtzahl an Wesen, damit dies geschehen konnte?

Aufgabe 48. Sechs Piraten betreten eine Taverne und nehmen nach einem chaotischen Durcheinander zufällig Plätze an einem runden Tisch ein. Jeder von ihnen hat einen festen Rang an Wildheit von 1 bis 6, und zwar alle einen unterschiedlichen, der jedes Duell bestimmt. Der Pirat mit dem höheren Rang gewinnt immer. Um zu entscheiden, wer die Crew befehligt, folgen sie einem Ritual. In jeder Runde wird ein verbleibender Pirat nach dem Zufallsprinzip ausgewählt, der den im Uhrzeigersinn nächsten Piraten herausfordern muss, wobei leere Plätze übersprungen werden. Der schwächere Pirat scheidet aus und der stärkere bleibt sitzen. Nach fünf Runden bleibt nur noch ein Pirat übrig. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das letzte Duell zwischen den beiden stärksten Piraten, also denen mit Rang 6 und 5, stattfindet?

Aufgabe 49. Ein L-Tetromino besteht aus vier kongruenten Quadraten, die über gemeinsame Kanten verbunden sind. Ein solches Tetromino wurde in einem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck so positioniert, dass es vollständig innerhalb des Dreiecks liegt und sich vier seiner Ecken auf den Dreiecksseiten befinden, wie in der Skizze zu sehen ist. Wie groß ist das Verhältnis des Flächeninhalts des Tetrominos zum Flächeninhalt des Dreiecks?



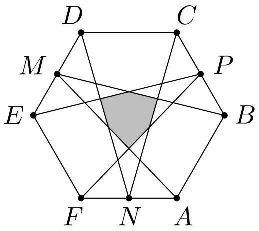
Aufgabe 50. Betrachte die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, definiert durch die Startwerte $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ und die Rekursionsvorschrift

$$a_{n+3} = 3^{a_{n+2}} + 3^{a_{n+1}} + 3^{a_n}$$

für $n \geq 1$. Welchen Rest erhält man, wenn a_{22} durch 49 geteilt wird?

Aufgabe 51. Max startet mit einem leeren Tank am Anfang einer unendlichen Straße. Für jede ganze Zahl $n \geq 0$ gibt es einen Händler, der sich n^2 Meilen vom Startpunkt entfernt befindet. Max kann von jedem Händler eine ganzzahlige Anzahl an Kraftstoffeinheiten kaufen. Die Händler verkaufen jedoch nur ungern große Mengen Kraftstoff, weshalb die Kosten pro Einheit mit jeder zusätzlich gekauften Einheit steigen: Bei jedem Händler kostet die erste Einheit 1 \$, die zweite Einheit 2 \$, die dritte Einheit 3 \$ und so weiter. Mit jeder Kraftstoffeinheit kann Max 1 Meile fahren. Sowohl das Angebot der Händler als auch die Kapazität des Tanks von Max sind unbegrenzt. Wie weit kann Max bei einem Budget von 730 \$ maximal auf der Straße fahren?

Aufgabe 52. Sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges Sechseck mit dem Flächeninhalt 420. Seien M, N und P die Mittelpunkte der Seiten DE, FA bzw. BC. Die Strecken AM, BM, CN, DN, EP und FP werden eingezeichnet und schließen eine grau gekennzeichnete Fläche ein. Bestimme den Flächeninhalt dieser Fläche.



Aufgabe 53. Adele ist eine Meisterin im algebraischen Umformen. Daher hat sie alle Ausdrücke der Form $\pm a \pm b \pm c \pm d$, das sind insgesamt 16 Ausdrücke für alle möglichen Vorzeichenkombinationen, miteinander multipliziert und so ein Polynom in den Variablen a, b, c, d erhalten. Anschließend hat sie alle Terme gestrichen, in denen mindestens eine der Variablen nicht vorkommt. Wie groß ist die Summe der Koeffizienten der verbleibenden Terme?

Aufgabe 54. Sabrina hat 9000 kongruente gleichseitige Dreiecke. Wie viele verschiedene Vierecke kann sie daraus zusammensetzen, indem sie alle 9000 Dreiecke ohne Überlappung zu genau einem Viereck anordnet? Vierecke, die kongruent sind, gelten als identisch.

Aufgabe 55. Thomas hat eine Lichterkette mit zehn Glühbirnen ans Fenster gehängt, aber leider leuchten nicht alle Glühbirnen. Es ist bekannt, dass es keine vier aufeinanderfolgenden Glühbirnen gibt, die abwechselnd leuchten und nicht leuchten, das heißt *leuchtet, aus, leuchtet, aus* oder *aus, leuchtet, aus, leuchtet*. Wie viele verschiedene mögliche Konfigurationen kann es geben?

Aufgabe 56. Finde alle positiven ganzen Zahlen a, die folgende Gleichung erfüllen:

$$\left(\frac{23+\sqrt{23^2-4}}{2}\right)^5=\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^2$$

Aufgabe 57. Im rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel im Eckpunkt C liegt der Punkt D auf der Seite BC so, dass $\overline{BD} = 9$ und $\overline{DC} = 5$ gilt. Zudem gelte $\angle CDA = 3\angle BAD$. Bestimme die Länge der Seite AB.

Das Team hat alle Aufgaben erhalten.

(Do not hand out this leaflet to the team. It is intended for review only.)