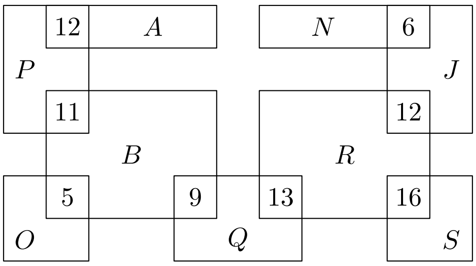
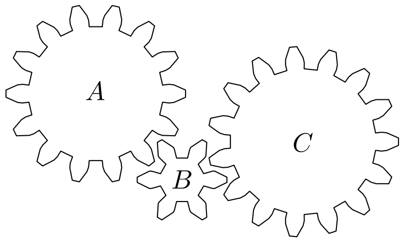
Aufgabe 1. Die Buchstaben in den Rechtecken sind verschiedene Ziffern ungleich Null. In den Überschneidungen je zweier Rechtecke steht die Summe der zugehörigen Buchstaben. Bestimme den Wert der der fünfstelligen Zahl $NABOJ$.



Ergebnis.

Aufgabe 2. Wie viele vollständige Umdrehungen muss das Zahnrad C machen, damit alle drei Zahnräder (nach Beginn der Rotation das erste Mal wieder ?) in ihre ursprüngliche Ausgangsposition zurückkehren?

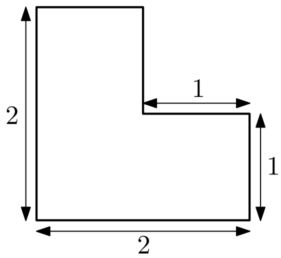


Ergebnis.

Aufgabe 3. Wie lautet die größte zehnstellige Zahl, bei der zwischen je zwei gleichen Ziffern mindestens eine kleinere Ziffer liegt?

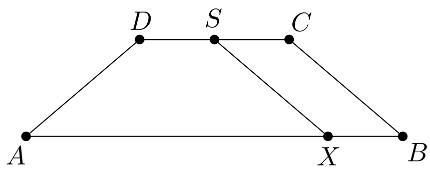
Ergebnis.

Aufgabe 4. Was ist die kleinste Seitenlänge eines Quadrats, welches durch Verwendung von mehreren Kopien der unten gezeigten rechtwinkligen L-Form vollständig und ohne Überlappung der einzelnen L-Formen überdeckt werden kann?



Ergebnis.

Aufgabe 5. In einem gleichschenkligen Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten AB und CD erfüllen die Seitenlängen die Bedingung $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$. Zusätzlich sei S der Mittelpunkt der Seite DC und X ein Punkt auf der Seite AB, so dass XS zu BC parallel ist. Bestimme den Umfang des Parallelogramms $XBCS$, wenn der Umfang von $ABCD$ als 50 und der von $AXSD$ als 38 gegeben ist.



Ergebnis.

Aufgabe 6. Ida wählte eine zweistellige Zahl ohne Nullen und multiplizierte sie mit ihrer Spiegelzahl. Das Ergebnis war eine vierstellige Zahl, die mit 3 begann und mit 7 endete. Was war die größere der beiden Zahlen, die Ida multiplizierte?

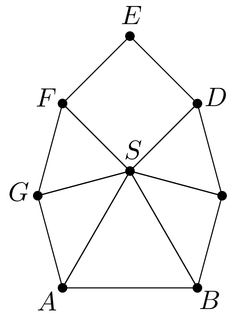
Hinweis: Eine Spiegelzahl zu einer mehrstelligen natürlichen Zahl erhält man, indem man die Ziffern in umgekehrter Reihenfolge aufschreibt.

Ergebnis.

Aufgabe 7. Kurt spielt ein Kartenspiel mit einem Standarddeck von 52 Karten, das aus 13 Rängen in je 4 Farben besteht. In jeder Runde kann ein Spieler entweder eine Karte ziehen oder eine Karte aus seiner Hand ausspielen, die entweder denselben Rang oder dieselbe Farbe hat wie die Karte, die oben auf dem Spielstapel liegt. In den vorangegangenen Runden hatte Kurt enormes Pech und musste sehr viele Karten ziehen, was ihn zum Nachdenken brachte: Wie viele Karten N muss er mindestens auf der Hand haben, damit er garantiert mindestens eine Karte ausspielen kann, egal welche N Karten er auf der Hand hat und egal welche Karte oben auf dem Spielstapel liegt?

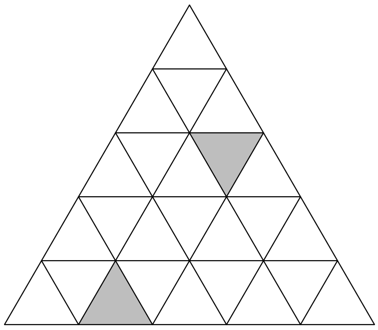
Ergebnis.

Aufgabe 8. Das Siebeneck $ABCDEFG$ besteht aus sechs Vielecken mit einem gemeinsamen Eckpunkt S: aus drei gleichseitigen Dreiecken ABS, CDS und FGS, zwei gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken BCS und GAS mit rechten Winkeln bei C bzw. G sowie einem Quadrat $DEFS$. Bestimme die Größe des Winkels SAE in Grad.



Ergebnis.

Aufgabe 9. Wie viele Dreiecke gibt es in der folgenden Abbildung, sodass diese gesuchten Dreiecke keine der grauen Kacheln enthalten?



Ergebnis.

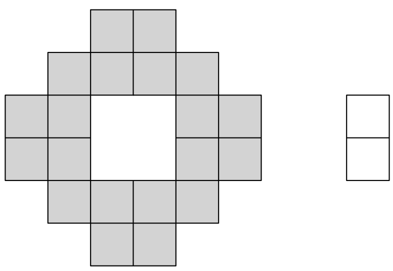
Aufgabe 10. Wir nennen eine vierstellige Zahl *faszinierend*, wenn sie die folgende Eigenschaft hat: Wenn die Hunderterstelle entfernt wird, ist die resultierende dreistellige Zahl ein Neuntel der ursprünglichen vierstelligen Zahl. Zum Beispiel ist die Zahl 2025 faszinierend, da $225 = \frac{1}{9} \cdot 2025$ gilt. Finde die größte faszinierende vierstellige Zahl.

Ergebnis.

Aufgabe 11. Ein Frachtschiff ist für den gleichzeitigen Transport von drei Arten von Flüssigkeiten ausgelegt: Ethanol, Öl und Quecksilber. Jede Flüssigkeit besitzt dabei ihre eigene maximale Kapazität: 10 Tonnen Ethanol, 30 Tonnen Öl und 60 Tonnen Quecksilber. Auf der Reise von Prag nach Hamburg wird das Schiff mit insgesamt 85 Tonnen Fracht, bestehend aus diesen Flüssigkeiten, beladen. Im Vergleich zur ersten Fahrt befördert das Schiff auf der Rückfahrt die gleiche Menge Ethanol, die doppelte Menge Öl und ein Drittel so viel Quecksilber. Wie viele Tonnen Fracht befördert das Schiff auf der Rückfahrt?

Ergebnis.

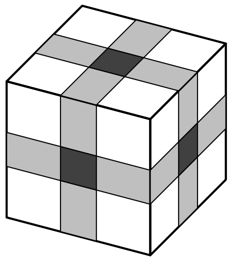
Aufgabe 12. Bestimme die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, die graue Figur mit nicht überlappenden Dominosteinen abzudecken, wobei jeder Stein genau zwei benachbarte Quadrate abdeckt. Ein einzelner Dominostein ist zur Veranschaulichung als weißes Rechteck dargestellt. Er kann so gedreht werden, dass er passt.



Hinweis: Anordnungen, die sich durch Drehung oder Spiegelung der gesamten Figur unterscheiden, werden als verschieden betrachtet. Kein Dominostein darf über die Grenzen der Figur hinausragen.

Ergebnis.

Aufgabe 13. Ein würfelförmiges Paket ist so mit Klebeband umwickelt (die grauen Flächen in der Abbildung), dass die Breite des Klebebandes kürzer ist als die Paketkante. Die dunkelgrauen Bereiche auf der Oberfläche (einschließlich der im Bild nicht sichtbaren) haben einen Gesamtflächeninhalt von216 cm^2. Der Flächeninhalt der hellgrauen Bereiche auf der Oberfläche ist halb so groß wie der Flächeninhalt, der nicht vom Klebeband bedeckt ist. Bestimme die Kantenlänge des Pakets in Zentimetern.



Ergebnis.

Aufgabe 14. In einem Geschäft werden Stifte, Notizbücher und Lineale verkauft. Der Preis eines Notizbuchs entspricht der Summe der Preise eines Stifts und eines Lineals. Wenn der Preis für ein Lineal um 50% erhöht würde, würde er der Summe der Preise für einen Stift und ein Notizbuch entsprechen. Um wie viel Prozent sollte der Preis eines Stiftes erhöht werden, damit er der Summe der Preise eines Notizbuchs und eines Lineals entspricht?

Ergebnis.

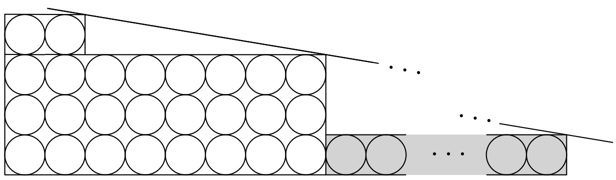
Aufgabe 15. Wir bezeichnen mit $\text{ggT}(a, b)$ und $\text{kgV}(a, b)$ den größten gemeinsamen Teiler bzw. das kleinste gemeinsame Vielfache der ganzen Zahlen a und b. Berechne den folgenden Ausdruck:

$$\text{kgV}(2025, \text{kgV}(2024, \text{ggT}(2023, \text{ggT}(2022, \ldots \text{kgV}(4, \text{ggT}(3, \text{ggT}(2, 1))) \ldots))),$$

wobei sich die Operatoren ggT und kgV nach jeweils zwei Schritten abwechseln.

Ergebnis.

Aufgabe 16. In der Abbildung sind drei Rechtecke mit regelmäßig einbeschriebenen kongruenten Kreisen und einer Linie zu sehen, die durch die oberen rechten Ecken der Rechtecke verläuft. Der mittlere Teil des Bildes ist verdeckt. Wie viele Kreise befinden sich in dem grauen Rechteck?



Ergebnis. **Aufgabe 17.** Tyler lief eine 18 km lange Runde. Er begann mit einem gleichmäßigen Tempo, aber als er sich erschöpft fühlte, verlangsamte er sein Tempo für den Rest des Laufs um 25%. Nach Abschluss des Laufs überprüfte Tyler seine Smartwatch und stellte fest, dass er im langsameren Tempo doppelt so lange gelaufen ist wie im schnelleren. Welche Strecke (in Kilometern) hat Tyler zurückgelegt, bevor er langsamer wurde?

Ergebnis.

Aufgabe 18. Kathi, Laura, Marie, Natalie und Olivia stellen sich in einer Linie vor einem riesigen Náboj-Monument zu einem Gruppenfoto auf. Allerdings gibt es strenge Bedingungen, wer wo stehen darf:

- Natalie muss rechts von Kathi, Marie und Olivia stehen.
- Marie muss links von Kathi, Natalie und Olivia stehen.

Auf wie viele Arten können sich die fünf jungen Damen für dieses fabelhafte Foto aufstellen?

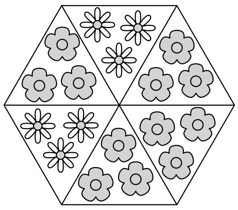
Ergebnis.

Aufgabe 19. Eine Burg besteht aus fünf Türmen, die durch gerade Mauern verbunden sind, deren Längen 50 Ellen, 70 Ellen, 90 Ellen, 110 Ellen und 130 Ellen betragen. Die Mauern können in beliebiger Reihenfolge angeordnet sein. Wie lang (in Ellen) ist der längste gerade Schuss, den ein Bogenschütze innerhalb der Burg abgeben kann, wenn die Mauern zu diesem Zweck optimal angeordnet sind?

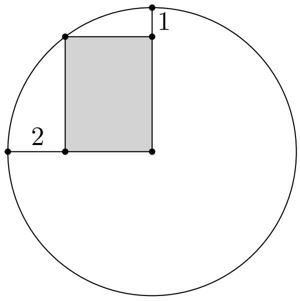
Ergebnis.
Aufgabe 20. Pauline hat 8 Karten, wobei jede mit einer eindeutigen Ziffer von 1 bis 8 beschriftet ist. Sie ordnet die Karten neu an und erstellt damit zwei vierstellige Zahlen. Was ist die kleinstmögliche Differenz zwischen diesen beiden Zahlen?

Ergebnis.
Aufgabe 21. Großmutter hat sich entschlossen, sechs dreieckige Blumenbeete, die in einem Sechseck angeordnet sind, mit zwei Sorten von Blumen zu bepflanzen, nämlich mit Veilchen und Gänseblümchen. Jedes der sechs Blumenbeete im Sechseck kann entweder mit Veilchen oder mit Gänseblümchen bepflanzt werden. Eine solche Möglichkeit ist in der Abbildung zu sehen. Auf wie viele Arten kann sie ihre Anpflanzungen vornehmen, so dass es mindestens ein Paar von benachbarten Beeten gibt, auf denen die gleiche Sorte von Blumen gepflanzt ist?

Hinweis: Anordnungen, die sich durch Symmetrie, also Drehung oder Spiegelung, unterscheiden, werden als verschieden angesehen. Jede der sechs Positionen der Blumenbeete wird als unterschiedlich betrachtet.



Ergebnis.
Aufgabe 22. Lea hat von einem kreisrunden Blatt Papier ein Rechteck so ausgeschnitten, dass eine Ecke auf dem Mittelpunkt des Kreises liegt und die gegenüberliegende Ecke auf dem Rand des Kreises. Die anderen beiden Ecken befinden sich so auf zwei Radien des Kreises, dass eine 1 dm und die andere 2 dm von der Kreislinie entfernt sind. Wie groß ist der Flächeninhalt des Stück Papiers, das nach dem Ausschneiden des Rechtecks übrig bleibt (in dm^2)?



Ergebnis.
Aufgabe 23. Großmeister Náboicus, der unübertroffene Virtuose im Mischen von Essenzen, ist gerade dabei, das legendäre *Algemy* herzustellen – eine makellose Fusion von Algebra und Alchemy, gemischt in einem perfekten Verhältnis von 1 : 1. Um dies zu erreichen, beginnt er mit folgenden Zutaten:

- Algebry: bestehend aus 80% Algebra und 20% Alchemy, mit einer Gesamtmasse von 10 mg,
- Alchema: bestehend aus 30% Algebra und 70% Alchemy, mit einer Gesamtmasse von 14 mg.

Wie viel Algemy (in mg) kann Náboicus höchstens herstellen, wenn er diese Zutaten zur Verfügung hat?

Hinweis: Náboicus kann die einzelnen Bestandteile einer Mischung zu keinem Zeitpunkt im Arbeitsprozess isolieren, er kann nur die zur Verfügung stehenden Substanzen abwiegen und mischen.

Ergebnis.
Aufgabe 24. Eine Zahl $K = n^2$ ist eine vierstellige Quadratzahl, bei der alle Ziffern kleiner als 7 sind. Wenn jede Ziffer von K um 3 erhöht wird, erhält man eine weitere Quadratzahl. Finde n.

Ergebnis.
Aufgabe 25. Seien X, Y zwei gegenüberliegende Eckpunkte eines Würfels mit der Seitenlänge 1 und sei C ein gerader Zylinder, dessen Oberfläche alle Eckpunkte des Würfels enthält, sodass X und Y die Mittelpunkte der kreisförmigen Grund- bzw. Deckfläche von C sind. Wie groß ist das Volumen von C?

Ergebnis.
Aufgabe 26. In einem Dorf mit 60 Einwohnern gehört jede Person einem von drei Typen an: Wahrheitssager, die immer die Wahrheit sagen; Lügner, die immer lügen; und normale Personen, die frei antworten können, wie sie wollen. Alle im Dorf kennen den Typ aller anderen Personen. Ein Außenstehender stellte allen Dorfbewohnern zwei Fragen:

1. "Gibt es mindestens 31 Wahrheitssager?" – und er erhielt genau 43 positive Antworten.

2. "Gibt es mindestens 31 Lügner?" – und er erhielt genau 39 positive Antworten.

Wie viele normale Menschen gibt es im Dorf mindestens?

Ergebnis.

Aufgabe 27. Vier Teams, A, B, C und D, nahmen an einem Jeder-gegen-jeden-Turnier teil, bei dem jedes Team genau einmal gegen jedes andere Team spielen musste. Das Gewinnerteam jedes Spiels erhielt je nach Vorsprung beim Sieg entweder 1 oder 2 Punkte, während das Verliererteam keine Punkte erhielt. Es gab keine Unentschieden. Nach allen Spielen wurde eine Tabelle wie im unteren Beispiel erstellt, die die Ergebnisse aller Spiele veranschaulicht. Wie viele unterschiedliche Ergebnistabellen kann es geben, wenn wir wissen, dass ein Team am Ende insgesamt 4 Punkte erreicht hat, während die anderen drei Teams alle jeweils 1 Punkt erreicht haben?

	A	B	C	D	total
A		1	0	2	3
B	0		0	0	0
C	2	1		2	5
D	0	1	0		1

Hinweis: Tabellen, die sich nur durch die Vertauschung der vier Teams unterscheiden, gelten dennoch als unterschiedlich.

Ergebnis.

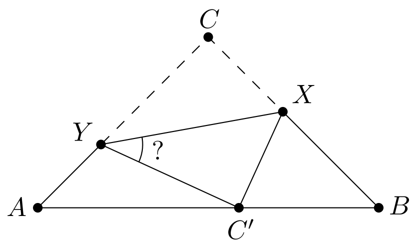
Aufgabe 28. Julia hat die Zahl 2025 als Summe von M Summanden aufgeschrieben, wobei jeder dieser Summanden eine Potenz von 10 (z.B. 10^n, wobei n eine nicht-negative ganze Zahl ist) ist. Die Summanden in der Summe dürfen sich wiederholen. Wie viele verschiedene Werte kann M annehmen?

Ergebnis.

Aufgabe 29. Max und Paul stehen Rücken an Rücken an einem Bahnsteig. Ein Güterzug fährt mit konstanter Geschwindigkeit an ihnen vorbei. In dem Moment wo die Zugspitze die beiden erreicht, gehen sie in entgegengesetzter Richtung und mit gleicher Geschwindigkeit auseinander. Das Zugende erreicht Max 45 Meter von seinem Startpunkt entfernt, kurz danach auch Paul in 60 Meter Entfernung vom Startpunkt.
Wie lang ist der Zug in Meter?

Ergebnis.

Aufgabe 30. Ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C wird entlang der Linie XY so gefaltet, dass der Eckpunkt C auf der Seite AB im Punkt C' zu liegen kommt. Zusätzlich ist noch die Bedingung $\overline{BC'} = \overline{BX}$ gegeben. Finde die Größe des Winkels $\angle C'YX$ in Grad.



Ergebnis.

Aufgabe 31. Alle streng monoton wachsenden 4-Tupel mit Elementen aus der Menge $\{0, 1, 2, \ldots, 15\}$ werden in lexikographischer Ordnung aufgelistet:

$$(0,1,2,3),\ (0,1,2,4),\ (0,1,2,5),\ldots,\ (12,13,14,15).$$

Das bedeutet, dass (a_1, a_2, a_3, a_4) in der Folge genau dann vor (b_1, b_2, b_3, b_4) steht, wenn

$$a_1 < b_1 \quad \text{oder} \quad a_1 = b_1, a_2 < b_2 \quad \text{oder} \quad a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 < b_3 \quad \text{oder} \quad a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, a_4 < b_4.$$

gilt. Bestimme die Position des Tupels $(2, 4, 7, 14)$ in dieser Folge.

Ergebnis.

Aufgabe 32. Zwei Landwirte, Adam und Bettina, verkauften Äpfel auf dem Markt. Zusammen brachten sie 100 Äpfel mit. Adam verkaufte seine Äpfel zu einem Preis von a Münzen pro Apfel, während Bettina ihre Äpfel für b Münzen pro Apfel verkaufte. Als sie alle ihre Äpfel verkauft hatten, hatten sie beide den gleichen Betrag eingenommen. Adam merkte dann an, dass er 45 Münzen eingenommen hätte, wenn er seine Äpfel zu Bettinas Preis von b Münzen pro Apfel verkauft hätte. Bettina fügte hinzu, dass sie 20 Münzen eingenommen hätte, wenn sie ihre Äpfel zu Adams Preis von a Münzen pro Apfel verkauft hätte.

Wie viele Äpfel verkaufte Adam?

Ergebnis.

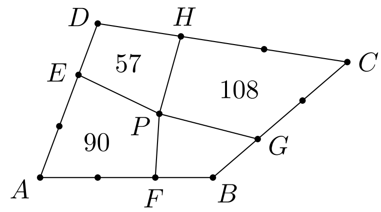
Aufgabe 33. Sue träumte von einer faszinierenden Zahl. Es ist die größte dreistellige Zahl mit einer einzigartigen Eigenschaft: Sie ist gleich der Summe ihrer Hunderterstelle, dem Quadrat ihrer Zehnerstelle und der dritten Potenz ihrer Einerstelle. Von welcher Zahl hat Sue geträumt?

Ergebnis.

Aufgabe 34. Jede Seite eines Vierecks $ABCD$ ist durch zwei Punkte in drei gleich lange Teile unterteilt, nämlich:

- Der Punkt E liegt auf der Seite AD mit $\overline{AE} : \overline{ED} = 2 : 1$.
- Der Punkt H liegt auf der Seite CD mit $\overline{CH} : \overline{HD} = 2 : 1$.
- Der Punkt F liegt auf der Seite AB mit $\overline{AF} : \overline{FB} = 2 : 1$.
- Der Punkt G liegt auf der Seite CB mit $\overline{CG} : \overline{GB} = 2 : 1$.

Im Inneren des Vierecks liegt ein Punkt P, der wie in der Skizze das Viereck in vier kleinere Vierecke aufteilt. Für drei von diesen sind die Maßzahlen des Flächeninhalts vorgegeben. Bestimme den Flächeninhalt des Vierecks $PFBG$.

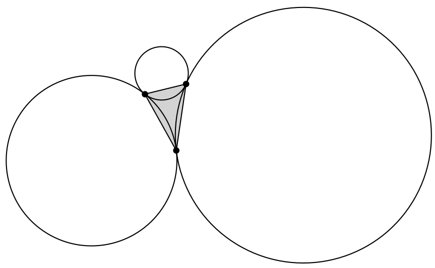


Ergebnis. **Aufgabe 35.** Ein Ring aus zwölf Quadraten wird gebildet, indem aus einem 4×4 Brett die vier inneren Quadrate entfernt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, vier Quadrate in dem Ring zu wählen, so dass mindestens ein Quadrat von jeder Seite des Rings gewählt wird?

Anmerkung: Jedes Eckquadrat gehört zu zwei Seiten. Auswahlmöglichkeiten, die sich nur durch die Symmetrie (Drehungen oder Spiegelungen des Rings) unterscheiden, werden als unterschiedlich angesehen.

Ergebnis.

Aufgabe 36. Drei Kreise mit den Radien 1, 2 und 3 berühren einander von außen, wie in der Skizze zu sehen ist. Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks, das von den drei Berührpunkten gebildet wird.

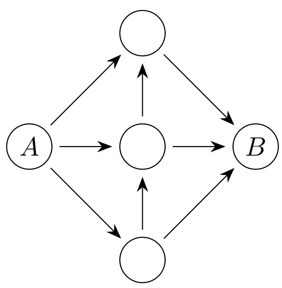


Ergebnis.

Aufgabe 37. Agnes zeichnete ein regelmäßiges n-Eck mit $n > 3$ und zählte seine Diagonalen. Sie stellte fest, dass die Gesamtzahl der Diagonalen ein Vielfaches von 2025 ist. Was ist der kleinstmögliche Wert von n, der diese Bedingung erfüllt?

Hinweis: Die Seiten des n-Ecks zählen nicht als Diagonalen.

Ergebnis. **Aufgabe 38.** David begibt sich auf eine Reise entlang der Wege im unteren Diagramm. Er startet im Knoten A und endet bei Knoten B. Er muss der Richtung der Pfeile im Diagramm folgen, mit Ausnahme einer rebellischen Bewegung, bei der er sich absichtlich entgegen der Pfeilrichtung bewegt. Diese rebellische Bewegung muss während seiner Reise genau einmal vorkommen, auch wenn das bedeuten würde, das endgültige Ziel vorübergehend wieder zu verlassen. David darf beim Navigieren entlang des Diagramms jeden Pfeil mehr als einmal verwenden. Auf wie viele verschiedene Arten kann David seine Reise unter diesen Bedingungen abschließen?



Ergebnis.

Aufgabe 39. In der folgenden Rechnung stehen verschiedene Buchstaben für verschiedene Ziffern ungleich Null.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & N & N & N & N & N\\
 & + & A & A & A & A\\
 & & + & B & B & B\\
 & & & + & O & O\\
 & & & & + & J\\
 & - & 2 & 0 & 2 & 5\\
\hline
= & N & A & B & O & J
\end{array}
$$

Bestimme den größtmöglichen Wert der fünfstelligen Zahl $NABOJ$.

Ergebnis.

Aufgabe 40. Fünfhundert Náboj-Veranstalter stimmten über Probleme, die im Wettbewerb gestellt werden sollen, ab. Bei jedem Problem stimmte jeder anwesende Organisator entweder dafür oder dagegen. Doch schon nach dem ersten Problem fanden einige Veranstalter, die für das Problem gestimmt hatten, das Verfahren so ermüdend, dass sie den Raum verließen. Gleichzeitig verließ keiner derjenigen, die gegen das erste Problem stimmten, den Raum. Bei der Abstimmung über das zweite Problem stimmte die gleiche Anzahl von Veranstaltern dafür wie bei der ersten Abstimmung, aber die Anzahl der Stimmen gegen das Problem betrug nur ein Drittel der Stimmen, die gegen das erste Problem abgegeben worden waren. Außerdem ist bekannt, dass genau 120 Organisatoren für beide Probleme gestimmt haben und 70 gegen beide Probleme. Wie viele Organisatoren haben den Raum nach der ersten Abstimmung verlassen?

Ergebnis.

Aufgabe 41. Bestimmen Sie die Anzahl der Paare (a, b) positiver ganzer Zahlen, die die Bedingung $a \leq b$ erfüllen und für die $\text{ggT}(a, b)$ zusammen mit a und b zu einer arithmetischen Folge angeordnet werden kann, deren Summe 2025 ist.

Hinweis: Eine arithmetische Folge ist eine Folge von Zahlen, bei der die Differenz zwischen einer Zahl und der nächsten immer gleich groß ist.

Ergebnis. **Aufgabe 42.** Jede Gruppe im Kindergarten-Náboj bekommt die ersten 3 aus einem Vorrat von insgesamt 16 nummerierten Aufgaben. Jedes Team hat einen eigenen Vorrat, aber mit den gleichen 16 Aufgaben in gleicher Nummerierung. Wenn eine Gruppe eine Aufgabe löst, wird sie mit der Aufgabe mit niedrigster Nummer aus dem Vorrat der Gruppe ersetzt. Nach dem Bewerb stellt sich heraus, dass keine zwei Gruppen genau die gleichen Mengen an Aufgaben gelöst haben. Was ist die maximale Anzahl an Gruppen, die in diesem Bewerb teilnehmen haben können?

Ergebnis.

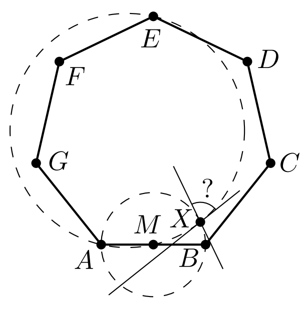
Aufgabe 43. Seien a, b, c, d reelle Zahlen, so dass

$$
\begin{aligned}
2a + 2b - ab &= 2025,\\
2b + 2c - bc &= 47,\\
2c + 2d - cd &= 5.
\end{aligned}
$$

Finde den Wert von $2a + 2d - ad$.

Ergebnis.

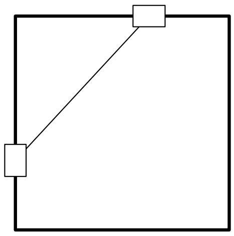
Aufgabe 44. Sei M der Mittelpunkt der Seite AB eines regelmäßigen Siebenecks $ABCDEFG$. Der Kreis, dessen Mittelpunkt M ist und der durch A geht, schneidet den Umkreis des Dreiecks AME in einem Punkt X, der im Inneren des Siebenecks liegt. Wie groß ist der spitze Winkel (in Grad) zwischen den Tangenten an die beiden Kreise in X?



Ergebnis.

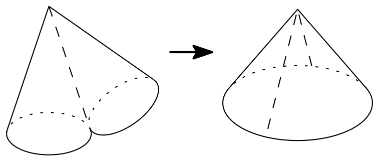
Aufgabe 45. Berechnen Sie die Summe der Werte $(\pm 1 \pm 2 \pm 4 \pm 8 \pm \cdots \pm 2^{99})^2$ über alle Wahlmöglichkeiten der 100 Vorzeichen.

Ergebnis.
Aufgabe 46. Zwei Autos, die durch ein Gummiband verbunden sind, fahren auf einer quadratischen Straße, wie in der Abbildung zu sehen. Zu Beginn starten beide Autos gemeinsam an einer Ecke des Quadrats. Jedes Auto fährt dann unendlich lange mit einer konstanten, ganzzahligen Geschwindigkeit. Das Gummiband ist extrem elastisch, reißt aber, wenn es genau über die Diagonale des Quadrats gespannt wird. Das langsamere Auto fährt mit einer Geschwindigkeit von 24 km/h, während das schnellere Auto mit einer Geschwindigkeit von n km/h fährt, beide in dieselbe Richtung. Bestimmen Sie den kleinsten ganzzahligen Wert von n größer als 24, so dass das Gummiband niemals reißt.



Ergebnis. **Aufgabe 47.** An einem Tisch spielen 2025 Spieler ein Spiel. Am Ende jeder Runde gibt der Verlierer jedem der anderen Spieler die Anzahl von Münzen, die sie gerade besitzen (verschiedene Spieler können unterschiedliche Geldbeträge erhalten). Nach 2025 Runden hat jeder Spieler exakt 2^{3000} Münzen. Außerdem hatte kein Spieler zu irgendeinem Zeitpunkt des Spiels Schulden. Bestimme die Anzahl Startmünzen des Verlierers der ersten Runde, wenn jeder Spieler genau eine Runde verloren hat.

Ergebnis.
Aufgabe 48. Gleb hat drei identische Papiermodelle der Seitenfläche eines geraden Kegels (ohne die Grundfläche). Die Grundfläche des Kegels ist eine kreisförmige Scheibe, die senkrecht zur Achse steht, welche deren Mittelpunkt mit der Spitze des Kegels verbindet. Diese Scheibe ist nicht Teil der Papiermodelle. Zunächst legte Gleb zwei der Kegelflächen Scheitelpunkt an Scheitelpunkt entlang einer gemeinsames Liniensegment ihrer Seitenflächen zusammen. Er schnitt beide entlang dieses Segments auf und fügte die beiden Flächen zusammen, um eine größere Kegelfläche zu schaffen (wie in der Abbildung zu sehen). Das Volumen des vollen Kegels, der dieser größeren Fläche entspricht, beträgt 10. Als nächstes verband Gleb diese größere Kegelfläche mit der dritten ursprünglichen Kegelfläche auf die gleiche Weise und wollte das Volumen des resultierenden Kegels messen. Er stellte jedoch fest, dass das resultierende Volumen gleich null war. Wie groß war das Volumen des ursprünglichen Kegels?



Ergebnis.
Aufgabe 49. Für wie viele positive ganze Zahlen n kleiner oder gleich 200 hat die Gleichung

$$5\left\lfloor\frac{x}{5}\right\rfloor - n\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor = 1$$

mindestens eine ganzzahlige Lösung x mit $1 \leq x \leq 200$?

Hinweis: Das Symbol $\lfloor t \rfloor$ bezeichnet die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich der reellen Zahl t ist.

Ergebnis.
Aufgabe 50. Adam hat einen unbegrenzten Vorrat an 20-seitigen Würfeln, deren Seiten jeweils von 1 bis 20 nummeriert sind. Er würfelt eine beliebige Anzahl von Würfeln auf einmal und versucht, mit einem einzigen Wurf genau eine oder zwei Einsen zu erzielen. Mit wie vielen Würfeln sollte Adam würfeln, um seine Erfolgswahrscheinlichkeit zu maximieren?

Ergebnis.
Aufgabe 51. Sei D ein innerer Punkt der Seite AC eines Dreiecks ABC, so dass $\overline{AD} = \overline{BC}$ und $\overline{BD} = \overline{CD}$ gilt. Außerdem sei $\angle BAC = 30°$. Bestimme die Größe des Winkels $\angle DBA$ in Grad.

Ergebnis.
Aufgabe 52. Sei f eine Funktion, die jedem Paar von nicht negativen ganzen Zahlen eine nicht negative ganze Zahl zuordnet und durch die folgenden Bedingungen definiert ist:

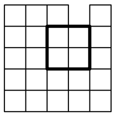
1. Für jedes x: $f(x, x) = 0$.
2. Für jedes x, y: $f(x, y) = f(y, x)$.

3. Für jedes x, y: $f(2x, 2y) = f(x, y)$.
4. Für jedes x, y: $f(2x+1, 2y+1) = f(x, y)$.
5. Für jedes x, y: $f(2x+1, 2y) = f(x, y) + 1$.

Finde die Summe aller nicht negativen ganzen Zahlen t, $t \leq 60$, die $f(20, t) = 2$ erfüllen.

Ergebnis.

Aufgabe 53. Becky hat ein 45×45-Gitter gezeichnet und dann darin die 1×1-Quadrate gezählt und festgestellt, dass dies 2025 sind. Das machte sie unglücklich, da sie aus persönlichen Gründen lieber Grafiken mit 2024 kleinen Quadraten mag. Um dies auszubessern, entfernte sie ein 1×1-Quadrat vom Rand des Gitters. Dann zählte sie alle möglichen Quadrate (nicht nur die 1×1-Quadrate) im ausgebesserten Gitter. Weil Becky abergläubisch ist und Angst vor Zahlen hat, die durch 13 teilbar sind, entfernte sie das Randquadrat so, dass die Gesamtzahl aller Quadrate im nun entstandenen Gitter nicht durch 13 teilbar ist. In unten stehender Abbildung ist ein auf diese Weise angepasstes Gitter dargestellt: ein 5×5-Gitter, bei dem ein Quadrat am Rand entfernt wurde und als Beispiel ein 2×2-Quadrat eingezeichnet ist. Bestimme die Anzahl möglicher Randquadrate, die Becky unter Einhaltung ihrer Bedingungen entfernen kann.



Ergebnis.

Aufgabe 54. Hare and Tortoise are competing in a race. The Tortoise goes slowly but steadily, while the Hare runs 6 times faster, but every time it runs 9 meters forward, it comes back 7 meters to mock the Tortoise. Consider the time interval from the start of the race until the last moment they meet on the track. What fraction of that time was Tortoise in the lead?

Ergebnis.

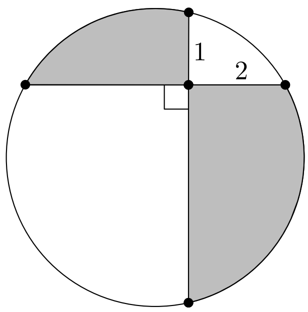
Aufgabe 55. Mark hat als Geschenk eine Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ bekommen, die durch die initialen Werte $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ und die Rekursion

$$a_{n+1}^2 + 3a_n^2 - 4a_{n-1}^2 = 4a_n \cdot (a_{n+1} - a_{n-1}) + 2n - 1$$

für alle $n \geq 2$ bestimmt ist. Diese Folge ist jedoch nicht eindeutig bestimmt. Um die Mehrdeutigkeit zu lösen berechnet Mark die Folgenglieder Schritt für Schritt und wählt jedes Mal, wenn es mehrere Lösungen gibt, den höchsten Wert. Bestimme den Wert von a_{13}.

Ergebnis.

Aufgabe 56. Die Abbildung zeigt einen Kreis, der durch zwei senkrecht zueinander stehende Sehnen geteilt wird. Es sind zwei Streckenlängen angegeben (beide kürzer als der verbleibende Teil der jeweiligen Sehne), zusammen mit der Information, dass das Verhältnis der grauen Fläche zur weißen Fläche $\frac{5\pi-2}{5\pi+2}$ ist. Bestimmen Sie den Radius des Kreises.



Ergebnis. **Aufgabe 57.** Ein Gebäude hat 160 Etagen. Der Flur jeder Etage ist über jede von zwei Flurtüren zugänglich, und in jedem Flur gibt es vier Zimmer. Jedes Zimmer hat eine eigene Tür, und in jedem Zimmer wohnt eine Person. An jeder Tür, auch an den Flurtüren, wird jeweils ein Schloss angebracht. Es sollen Schlüssel verteilt werden, um folgendes sicherzustellen:

- Jede Person Zugang hat zu ihrem eigenen Zimmer, aber nicht zu dem einer anderen Person.
- Jede Person hat Zugang zum Flur auf ihrer Etage.
- Es ist erlaubt, dass jemand Zugang zu Fluren in anderen Etagen hat.

Jedes Schloss ist mit einem eindeutigen Schlüsseltyp verbunden und kann nur mit einem Schlüssel dieses Typs geöffnet werden. Ein Schlüsseltyp kann bei Bedarf mehrere Türen schließen, und es können beliebig viele Kopien eines Schlüsseltyps angefertigt und verteilt werden. Jede Person kann so viele Schlüssel ausgehändigt bekommen, wie sie benötigt. Das für die Installation verantwortliche Unternehmen ist bestrebt, die Gesamtkosten für die Herstellung der Schlüssel zu minimieren. Die Herstellung eines Schlüssels eines neuen Schlüsseltyps kostet 3, die Herstellung einer Kopie eines vorhandenen Schlüssels kostet 2. Wie hoch sind die minimalen Gesamtkosten für alle Schlüssel unter Einhaltung der oben genannten Bedingungen?

Ergebnis.