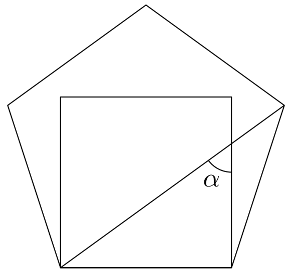
Aufgabe 1. Wenn das arithmetische Mittel von vier verschiedenen positiven ganzen Zahlen gleich 10 ist, was ist dann der größtmögliche Wert einer dieser ganzen Zahlen?

Aufgabe 2. Wenn bekannt ist, dass 4 eine Nullstelle der quadratischen Gleichung $x^2 + mx + 2020 = 0$ mit einer ganzen Zahl m ist, wie lautet dann die zweite Nullstelle?

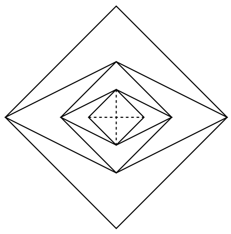
Aufgabe 3. Die Zahl 95 ergibt bei Division durch eine positive ganze Zahl N den Rest 4. Was ist der kleinstmögliche Wert für N?

Aufgabe 4. Auf die Art und Weise wie in der Abbildung zu sehen ist, liegt ein Quadrat in einem regelmäßigen Fünfeck. Bestimme den Winkel α in Grad.



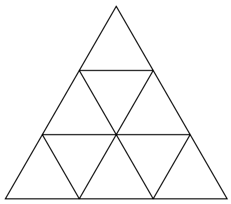
Aufgabe 5. Eine Bushaltestelle wird von drei Buslinien A, B und C angefahren, die im Abstand von 12, 10 und 8 Minuten von der Haltestelle abfahren. Als Brian an der Haltestelle vorbei geht, bemerkt er, dass die drei Busse der drei Linien gleichzeitig von der Haltestelle wegfahren. Nach wie vielen Minuten von diesem Zeitpunkt an wiederholt sich das zum ersten Mal?

Aufgabe 6. Die Rautenblume wächst nach folgendem Muster: In der Mitte ist eine quadratische Blüte mit zwei Diagonalen der Länge 1. Dann verdoppelt sich die horizontale Diagonale und es entsteht eine neue Vierecksblüte. Danach verdoppelt sich die vertikale Diagonale, es entsteht wieder eine neue Vierecksblüte. Diese Art des Wachstums setzt sich fort, bis eine Blume mit fünf Vierecken entstanden ist. Bestimme den Umfang der äußersten, also fünften, Vierecksblüte.



Aufgabe 7. Ein Botaniker pflanzte zwei kleine Pflänzchen P_1 und P_2 der gleichen Sorte und maß ihre Wuchshöhen. Nach einer Woche, in der die beiden Pflanzen mit demselben Prozentsatz in die Höhe gewachsen waren, maß er wieder und stellte fest, dass P_1 genau so groß war wie P_2 eine Woche zuvor und dass P_2 um 44% größer war als P_1 eine Woche zuvor. Um wie viel Prozent wuchsen die Pflanzen in einer Woche in die Höhe?

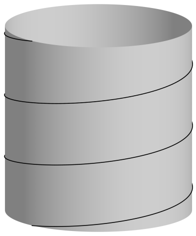
Aufgabe 8. Wie viele Parallelogramme sind auf dem Bild zu sehen?



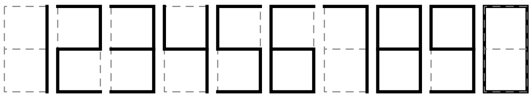
Aufgabe 9. Ein Reiseunternehmen bietet Busse für 27 und für 36 Reisende. Eine Reisegruppe besteht aus 505 Personen und möchte mit Bussen dieses Unternehmens reisen. Das Unternehmen hat die Busse so ausgewählt, dass die Anzahl N an leeren Sitzplätzen so klein wie möglich ist. Bestimme N.

Aufgabe 10. Ein Tierfreund kaufte zwei identische Bilder eines Wolfes und vier identische Bilder eines Fuchses. Er möchte sie nebeneinander an sechs Nägeln an einer Wand in seinem Wohnzimmer aufhängen. Außerdem möchte er ihre Reihenfolge jeden Tag so ändern, dass die resultierende Folge von Bildern anders aussieht als die Folgen an allen vorhergehenden Tagen. Zusätzlich möchte er nicht, dass die beiden Bilder des Wolfes nebeneinander hängen. Was ist die höchste Anzahl von Tagen, für die er das tun kann?

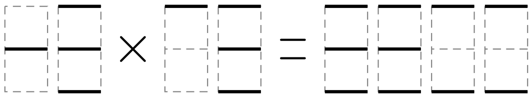
Aufgabe 11. Ein Zylinder mit Höhe 18 cm und Umfang 8 cm ist von zuunterst bis zuoberst exakt drei Mal eng von einer Schnur umwickelt. Der Startpunkt der Schnur liegt dabei am unteren Rand des Zylinders, der Endpunkt am oberen Rand direkt über dem Startpunkt. Wie lang ist die Schnur in cm?



Aufgabe 12. Ein funktionstüchtiger Taschenrechner zeigt die Ziffern wie folgt an:



Adams Taschenrechner ist aus einem Fenster gefallen und zeigt jetzt nur noch die waagrechten Linien an. Um zu überprüfen, ob der Taschenrechner immer noch richtig rechnet, führt Adam die folgende Rechnung durch:

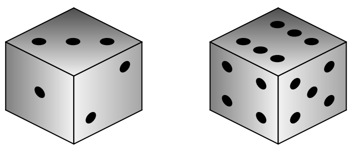


Wie lautet die Summe aller Ziffern, die in dieser Rechnung vorkommen?

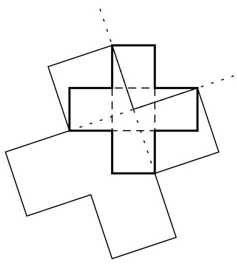
Aufgabe 13. Sandi musste zwei Zahlen addieren, aber sie schrieb versehentlich eine zusätzliche Ziffer ans Ende einer der Zahlen. Als Ergebnis erhielt sie die Summe 44444 anstelle von 12345. Wie lautet die kleinere der beiden Zahlen, die Sandi ursprünglich addieren wollte?

Aufgabe 14. Peter hat 27 normale Spielwürfel bekommen und soll sie zu einem Würfel der Größe $3 \times 3 \times 3$ zusammenkleben, so dass je zwei aneinander geklebte Seiten die gleiche Augenzahl haben. Wie groß kann die Summe der auf der Oberfläche dieses $3 \times 3 \times 3$-Würfels sichtbaren Augen maximal sein?

Hinweis: Hier sieht man zwei Ansichten eines normalen Spielwürfels. Die Augenzahlen sind auf den Seitenflächen so angeordnet, dass sie sich auf gegenüber liegenden Seiten zu 7 ergänzen.



Aufgabe 15. Antonia zeichnet ein kleines X-Pentomino, das bekanntlich aus fünf kongruenten Quadraten zusammengesetzt ist. Dann zeichnet sie zwei senkrecht aufeinander stehende Diagonalen als gepunktete Geraden ein. Schließlich konstruiert sie ein größeres X-Pentomino, von dem einige Seiten auf den diagonalen Geraden des kleinen Pentominos liegen, so wie es in der Abbildung zu sehen ist. Bestimme das Verhältnis der Flächeninhalte von Antonias großem zu ihrem kleinen Pentomino.



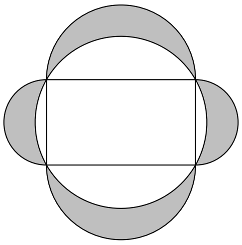
Aufgabe 16. Wie viele Palindrome zwischen 10^3 und 10^7 haben eine gerade Ziffernsumme?

Hinweis: Ein *Palindrom* ist eine ganze Zahl, die von links und rechts gelesen denselben Wert hat. Beispielsweise ist 12321 ein Palindrom.

Hinweis: Ziffernsumme bedeutet Quersumme.

Aufgabe 17. Ein Kinderchor besteht aus sechzig Kindern: Zwanzig Kinder sind der Stimmlage Sopran zugeteilt, zwanzig der Stimmlage Mezzosopran und zwanzig der Stimmlage Alt. In jeder der drei Stimmlagen gibt es allerdings sechs Kinder, die eine so gut ausgebildete Stimme haben, dass sie alle drei Stimmlagen beherrschen. Die restlichen Kinder können jeweils nur in der eigenen Stimmlage eingesetzt werden. Bestimme die größte Anzahl S, für die Folgendes gilt: Wann immer S Kinder gleichzeitig krank werden und nicht singen können, so können die verbleibenden Kinder sich in den einzelnen Stimmlagen umordnen, dass sie einen Chor bilden, in dem in jeder der drei Stimmlagen mindestens zehn Kinder singen.

Aufgabe 18. Ein Rechteck mit den Seitenlängen 3 und 4 wird mit seinem Umkreis gezeichnet. Außerdem werden – wie in der Abbildung dargestellt – jeweils 4 Halbkreise außen an die Rechtecksseiten aufgesetzt. Wie groß ist die Fläche des grau schattierten Bereichs, der aus jenen Punkten der Halbkreise besteht, die nicht innerhalb des Umkreises liegen?



Aufgabe 19. Bestimme die größte dreistellige Primzahl p_1 mit der Eigenschaft, dass die Ziffernsumme von p_1 eine zweistellige Primzahl p_2 ist, deren Ziffernsumme eine einstellige Primzahl p_3 ist.

Hinweis: Ziffernsumme bedeutet Quersumme.

Aufgabe 20. Im Dreieck $\triangle ABC$, das die Bedingung $\overline{AB} = \overline{AC}$ erfüllt, gibt es eine Streckensymmetrale, die eine der Höhen in einem einzigen Punkt trifft, der auf dem Rand des Dreiecks liegt. Bestimme alle möglichen Größen des Winkels $\angle ACB$ in Grad.

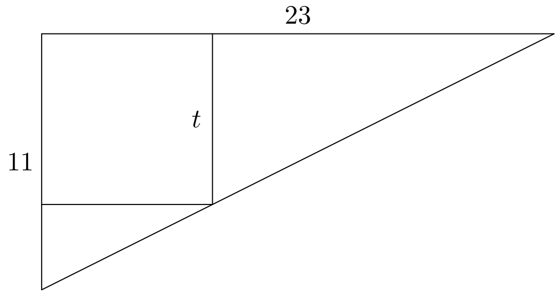
Hinweis: Streckensymmetrale bedeutet Mittelsenkrechte.

Aufgabe 21. Bestimme die Summe aller positiven Teiler von 3599.

Hinweis: Die positiven Teiler umfassen auch 1 und 3599.

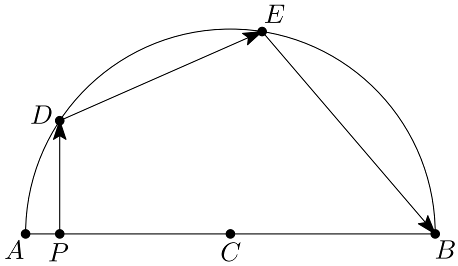
Aufgabe 22. Die drei Schwestern Meehni, Wimlah und Gunnedoo grillen Würstel am Lagerfeuer. Meehni kaufte 17 Würstel, Wimlah 11, Gunnedoo keine. Nachdem sie alle Würstel aufgegessen haben, beschließen sie, die Kosten gleichmäßig auf alle drei aufzuteilen. Wie viele Euro soll Meehni bekommen, wenn Gunnedoo ihren Schwestern insgesamt 28 Euro gibt, um ihre Schulden zu begleichen?

Aufgabe 23. Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten der Längen 11 und 23. Von einem Quadrat mit Seitenlänge t liegen zwei Seiten auf den Katheten und eine Ecke liegt auf der Hypotenuse, so wie in der Abbildung dargestellt. Bestimme t.



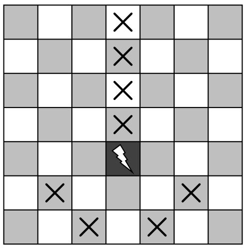
Aufgabe 24. Welche ist die kleinste positive ganze Zahl n, für die das Produkt $11 \cdot 19 \cdot n$ gleich dem Produkt aus drei aufeinander folgenden ganzen Zahlen ist?

Aufgabe 25. Gegeben ist ein Halbkreis mit dem Mittelpunkt C und einem Durchmesser AB. Ein Punkt P auf AB erfüllt folgende Bedingung:
Ein Laserstrahl startet in P wie in der Abbildung senkrecht zu AB in Richtung Halbkreis, wird an diesem in den Punkten D und E nach dem Gesetz der Reflexion (der Einfallswinkel ist genau so groß ist wie der Ausfallswinkel) reflektiert, was hier $\angle PDC = \angle CDE$ und $\angle DEC = \angle CEB$ bedeutet, und trifft dann auf den Punkt B. Bestimme den Winkel $\angle DCP$ in Grad.



Aufgabe 26. In einem Land gibt es 2020 Städte, die mit $1, 2, 3, \ldots, 2020$ bezeichnet werden. Der Präsident beschließt ein Eisenbahnnetz aufzubauen. Um Geld zu sparen, werden nur Direktverbindungen zwischen zwei Städten a und b mit $a < b$ gebaut, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Nummer b ist ein Vielfaches von a und es gibt kein c mit $a < c < b$, so dass c ein Vielfaches von a und b ein Vielfaches von c ist. Mit wie vielen anderen Städten hat die Stadt 42 eine Verbindung?

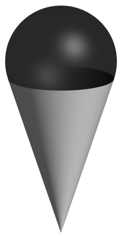
Aufgabe 27. Marek hat eine Schachfigur erfunden, die er *Blitzer* nennt. Wie in der Abbildung gezeigt, kann der Blitzer vorwärts bewegt werden wie ein Turm und rückwärts wie ein Springer. Marek stellt den Blitzer nun auf das mittlere Feld eines anderen Spielbretts der Dimension 3×3 und bewegt ihn 2020 Mal gemäß den Zugregeln. Wie oft kann der Blitzer höchstens dasselbe Feld besuchen? Das Startfeld zählt nicht als Besuch.



Aufgabe 28. David rannte gegen eine Schnecke um die Wette; die Rennstrecke war ein Rundkurs mit Start und Ziel an derselben Stelle. Sie starteten zur gleichen Zeit, rannten in die gleiche Richtung und trafen sich im Ziel. Die Schnecke war jedoch schneller, so dass sie mehr Runden als David absolvierte, der nur drei Runden schaffte, und daher trafen sich die beiden 2020 Mal, einschließlich des Treffens zu Beginn und im Ziel. Am nächsten Tag liefen sie dasselbe Rennen, aber David änderte die Richtung, in die er lief. Ihre Geschwindigkeiten waren die gleichen wie am Vortag. Wie oft haben sie sich im zweiten Rennen getroffen?

Aufgabe 29. Jonathan spielt ein Spiel, in dem seine Spielfigur Gegenstände der drei Kategorien Stärke, Verteidigung und Angriff sammelt. Jeder Gegenstand davon kann einen Wert von 1 bis 10 besitzen. Es ist möglich, Gegenstände mit gleichem Wert aus zwei verschiedenen Kategorien in einen Gegenstand der dritten Kategorie von einem um eins höheren Wert einzutauschen. Beispielsweise kann man für *Verteidigung Wert 3* und *Stärke Wert 3* einen Gegenstand *Angriff Wert 4* erhalten.
Wie viele Gegenstände *Angriff Wert 1* muss Jonathan sammeln, um einen Gegenstand *Angriff Wert 10* erhalten zu können, wenn vorausgesetzt werden kann, dass er eine unbegrenzte Anzahl an Gegenständen *Verteidigung Wert 1* und *Stärke Wert 1* hat?

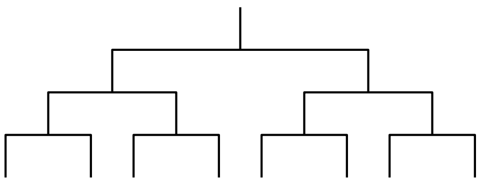
Aufgabe 30. Giuseppe kaufte ein Eis. Das Eis hatte die Form einer Kugel mit einem Radius von 4 cm in einer Eistüte in der Form eines Kegels. Giuseppe bemerkte, dass die Eiskugel auf folgende Weise in die Eistüte passte: Der Mittelpunkt der Kugel lag genau 2 cm über der Grundfläche der Eistüte und die Oberfläche der Eistüte endete genau dort, wo sie die Kugel tangential berührte. Wie groß war das Volumen der Eistüte?



Aufgabe 31. Bob bildet zwei vierstellige Zahlen und verwendet dazu jede der Ziffern 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 und 9 genau ein Mal. Anschließend addiert er diese zwei vierstelligen Zahlen. Finde die höchstmögliche Ziffernsumme des Ergebnisses.

Hinweis: Ziffernsumme bedeutet Quersumme.

Aufgabe 32. In einem Tennisturnier treten acht Spieler im K.O.-System gegeneinander an. Sie werden zufällig den acht freien unteren Enden im Graph aus dem Bild zugeteilt. Dann werden entsprechend dem Graphen drei Runden gespielt. Der Gewinner jedes Spiels kommt in die nächste Runde. In unserem Turnier sind zwei professionelle Spieler und sechs Amateure, von denen einer Bono heißt. Jeder professionelle Spieler siegt immer gegen einen Amateur. In Spielen zwischen zwei professionellen Spielern beziehungsweise zwischen zwei Amateuren sind beide gleich stark. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Bono in die Finalrunde kommt?



Aufgabe 33. Auf einer Tafel stehen die Zahlen

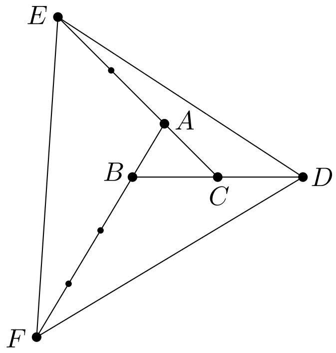
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{100}.$$

Schrittweise wählen wir jeweils zwei Zahlen aus, sagen wir a und b, löschen diese beiden und schreiben dafür die Zahl

$$\frac{ab}{a+2ab+b}$$

an die Tafel. Diese Prozedur wiederholen wir so lange, bis nur noch eine Zahl an der Tafel steht. Finde alle Möglichkeiten für den Wert dieser Zahl.

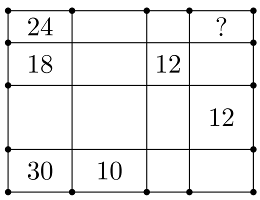
Aufgabe 34. Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$ mit Flächeninhalt 1. Wir erweitern die Seiten BC, CA, AB zu den Punkten D, E, und F wie in der Abbildung, sodass $\overline{BD} = 2 \cdot \overline{BC}$, $\overline{CE} = 3 \cdot \overline{CA}$ und $\overline{AF} = 4 \cdot \overline{AB}$ gilt. Finde den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle DEF$.



Aufgabe 35. Die königlichen Steuereintreiber haben drei Säcke mit Hunderten von Goldmünzen gesammelt. Jede Münze im ersten Sack wiegt 10, im zweiten 11 und im dritten 12 Gramm. Leider sind die Etiketten auf den Säcken verloren gegangen. Der König hat eine Waage, die das Gewicht in Gramm bis zu einem Maximalgewicht von N Gramm anzeigt, wobei N eine natürliche Zahl ist. Wenn das Gewicht größer als N ist, zeigt die Waage einfach N an. Der König will mit einer einzigen Wägung feststellen, in welchem Sack welche Art von Münzen sind, indem er einige Münzen aus den Säcken entnimmt und wiegt. Wie groß ist der kleinste Wert von N, für den er das immer erreichen kann?

Aufgabe 36. Emma hat beschlossen, eine Ananas-Diät zu machen. Jeden Tag um 13 Uhr überprüft sie, wie viele Ananas sie noch vorrätig hat. Wenn sie mindestens eine hat, isst sie eine. Wenn nicht, kauft sie stattdessen eine mehr als sie jemals an einem der Tage zuvor gekauft hatte. Sie kaufte ihre erste Ananas am Tag 1 um 13 Uhr. Wie viele Ananas hatte sie am Tag 2020 um 14 Uhr?

Aufgabe 37. Die Schweinezüchterin Lisi hat für ihre Ferkel einen neuen Stall der Größe $252\,\mathrm{m}^2$ mit flexibel verschiebbaren Trennwänden, so dass sie insgesamt 16 voneinander getrennte rechtwinklige Boxen zur Verfügung hat. Die flexiblen Innenwände können dabei nur über die ganze Länge bzw. Breite des Gebäudes verschoben werden. Jetzt hat sie die Wände so verschoben, dass die in der Abbildung mit Zahlen gekennzeichneten Boxen die angegebenen Größen in m^2 haben. Als Mathematikliebhaberin achtet Lisi stets darauf, dass nur ganzzahlige positive Boxengrößen entstehen. Welche Fläche kann dann die Schweinebox in der rechten oberen Ecke, die ein Fragezeichen enthält, in m^2 haben?



Aufgabe 38. Daniel und Phillip zeichnen jeweils einen Kreis auf ein Blatt Papier mit einem Gitter bestehend aus 1×1 Quadraten. Beide Kreise gehen durch jeweils genau drei Gitterpunkte. Der Kreis von Daniel hat einen Radius von $\frac{5}{4}$. Der Kreis von Phillip hat einen kleineren Radius. Wie groß ist der Radius von Phillips Kreis?

Aufgabe 39. Sieben Zwerge tragen sieben verschiedenfarbige Hüte. Der Zauberer Colorius möchte einen Zauberspruch erfinden, der die Hutfarben wie folgt ändert:

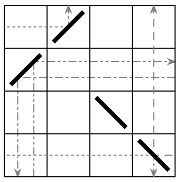
- Die neue Farbe jedes Hutes hängt nur von dessen vorheriger Farbe ab, sie ist unabhängig vom Träger des Hutes und den Farben der anderen Hüte.
- Nach der Anwendung des Zauberspruchs sind immer noch alle sieben ursprünglichen Farben vorhanden.
- Wenn Colorius den Zauberspruch zwei oder drei Mal hintereinander einsetzt, trägt keiner der Zwerge einen Hut derselben Farbe wie am Anfang.

Wie viele solche Zaubersprüche kann sich Colorius ausdenken?

Aufgabe 40. Maria hat ein Zahlenschloss, aber kein normales. Jeder der Zahlenringe hat eine andere Anzahl an Zahlen. Der erste Ring hat Zahlen von 0 bis 4, der zweite Ring von 0 bis 6, der dritte Ring von 0 bis 10 und der vierte Ring von 0 bis 9. Maria weiß Folgendes: Wenn sie bei der Kombination $(0, 0, 0, 0)$ startet und die Ringe simultan dreht, also als nächstes die Kombination $(1, 1, 1, 1)$ bekommt, dann erhält sie schlussendlich eine Kombination, die auf $(5, 1)$ endet. Und wenn diese Endung zum zweiten Mal kommt, kann das Schloss geöffnet werden. Wie lautet die Kombination zum Öffnen?

Aufgabe 41.
In vier der quadratischen Zellen einer 4×4 Tabelle werden doppelseitige Spiegel diagonal platziert. Von jeder der 16 Kanten des Tabellenrandes wird ein Laserstrahl senkrecht zur Kante losgeschickt. Der Laserstrahl ändert seine Richtung um $90°$ jedes Mal, wenn er auf einen Spiegel trifft, und endet, wenn er auf eine Randkante trifft. Nachdem die Spiegel platziert wurden, war die Situation folgende: Genau vier Laser hatten einen Begrenzungspunkt an der unteren Kante der Tabelle und den anderen an der rechten Kante. Weitere vier Laser hatten einen Begrenzungspunkt an der unteren Kante und den anderen an der linken Kante. Auch gab es genau vier Laser, die einen Begrenzungspunkt an der linken Kante und den anderen an der oberen Kante hatten, außerdem gab es vier Laser, die einen Begrenzungspunkt an der oberen Kante und den anderen an der rechten Kante hatten. Wie viele verschiedene Arten gibt es, die Spiegel so zu platzieren, dass dies beobachtet werden kann?
(Das Bild unten zeigt eine solche Art, die Spiegel zu platzieren, und gewisse Laserstrahlen.)

Hinweis: Startpunkt und Endpunkt des Laserstrahls sind unter dem Begriff *Begrenzungspunkt* des Strahls zusammengefasst.



Aufgabe 42. Sei $x_1 = 2020$ der Anfangswert einer Folge ganzer Zahlen. Für $n \geq 2$ sei das Folgenglied x_n definiert als x_{n-1} multipliziert mit der kleinsten Primzahl p, die kein Teiler von x_{n-1} ist, und dividiert durch alle Primzahlen kleiner als p. Finde die Anzahl der verschiedenen Primteiler von x_{2020}.

Aufgabe 43. Die Schwerlinien teilen ein Dreieck $\triangle ABC$ in sechs Teildreiecke, deren Schwerpunkte die Ecken eines Sechsecks $DEFGHI$ bilden. Man bestimme das Verhältnis des Flächeninhalts von $DEFGHI$ zum Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$.

Aufgabe 44. Sei $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_{m+1} = m(-1)^{m+1} - 2a_m$ für alle positiven ganzen Zahlen m und $a_1 = a_{2020}$. Finde den Wert von $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2019}$.

Aufgabe 45. Sandra hält fünf identische Schnüre so in ihrer Hand, dass jeweils das eine Ende auf der einen Seite ihrer Hand und das andere auf der anderen Seite hinunter hängt. Dann bittet sie Willy, auf beiden Seiten zufällig Paare von Schnurenden zusammenzuknoten, bis nur noch je ein Ende übrig ist. Wie wahrscheinlich ist es, dass dabei eine einzige lange Schnur entsteht?

Aufgabe 46. Eine Zahl wird *2-prim* genannt, wenn jedes Paar unmittelbar nebeneinander stehender Ziffern eine zweistellige Primzahl bildet und keine zwei der so entstandenen Primzahlen gleich sind. Beispielsweise hat 237 die Eigenschaft 2-prim zu sein, die Zahlen 136 und 1313 dagegen sind dies nicht. Bestimme die größte Zahl, die 2-prim ist.

Aufgabe 47. Sei O der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$. Ferner liegen die Punkte D und E so auf den Seiten AB und AC, dass O der Mittelpunkt von DE ist. Bestimme die Länge von CE, wenn $\overline{AD} = 8$, $\overline{BD} = 3$ und $\overline{AO} = 7$ sind.

Aufgabe 48. Ein Rechteck der Größe 7×24 ist in 1×1 Quadrate unterteilt. Eine Diagonale des Rechtecks schneidet Dreiecke aus einigen Quadraten. Finde die Summe der Umfänge aller dieser Dreiecke.

Aufgabe 49. Eine positive ganze Zahl n wird *erhebend* genannt, falls es möglich ist, mit einem Aufzug von jedem Stockwerk eines 8787-stöckigen Gebäudes zu jedem anderen Stockwerk zu gelangen, wenn dieser nur entweder 2020 Stockwerke nach unten oder n Stockwerke nach oben fahren kann. Finde die größte erhebende Zahl.

Hinweis: Ein k-stöckiges Gebäude besitzt ein Erdgeschoß und weitere k Stockwerke darüber.

Aufgabe 50. Das Kryptogramm

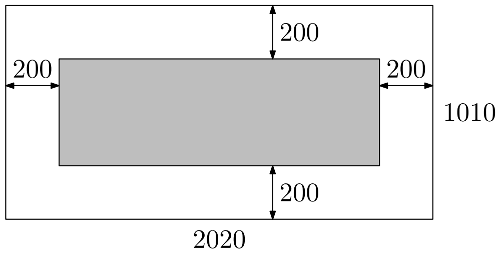
$$\begin{array}{cccccc} & & & R & E & D \\ + & & B & L & U & E \\ + & G & R & E & E & N \\ \hline = & B & R & O & W & N \end{array}$$

hat folgende Eigenschaften: Verschiedene Buchstaben stehen für verschiedene Ziffern und keine der vier Zahlen beginnt mit der Ziffer Null. Außerdem ist bekannt, dass $BLUE$ eine Quadratzahl ist. Bestimme die fünfstellige Zahl $BROWN$.

Aufgabe 51. Finde die kleinste positive ganze Zahl $k > 1$, so dass es keine positive k-stellige ganze Zahl n gibt, die nur ungerade Ziffern hat und für die $S(S(n)) = 2$ gilt. Hierbei bezeichnet $S(x)$ die Ziffernsumme der Zahl x.

Hinweis: Ziffernsumme bedeutet Quersumme.

Aufgabe 52. Martin kaufte ein Schachbrett in Form eines Rechtecks, das aus 1010×2020 Quadraten bestand. Aus diesem Schachbrett wurde ein kleineres Rechteck entfernt, wie in der Abbildung unten als graues Rechteck zu sehen ist. Martin platzierte auf jedem Quadrat des Schachbretts einen Käfer und dieser blieb auch dort sitzen. Allerdings hatten einige der Käfer einen Husten. Der Husten war sehr ansteckend: Jeder Käfer, der auf einem Feld saß, das an mindestens zwei Felder mit hustenden Käfern angrenzte, bekam ebenfalls Husten. Hierbei sind zwei Quadrate angrenzend, wenn sie sich eine Seite teilen. Was ist die kleinstmögliche Anzahl von Käfern, die alle anderen infizieren konnten?



Aufgabe 53. Eine positive ganze Zahl hat 25! unterschiedliche positive Teiler. Finde heraus, wie viele höchstens davon die fünfte Potenz einer Primzahl sein können.

Hinweis: Das Symbol $n!$ bezeichnet das Produkt aller positiven ganzen Zahlen kleiner oder gleich n.

Aufgabe 54. Drei positive reelle Zahlen x, y und z erfüllen folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= 1, \\ y^2 + yz + z^2 &= 2, \\ z^2 + zx + x^2 &= 3. \end{aligned}$$

Bestimme den Wert von $xy + yz + zx$.

Aufgabe 55. Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$ mit Inkreismittelpunkt I, Umkreismittelpunkt O und den Eigenschaften $\overline{AB} = 495$, $\overline{AC} = 977$ und $\angle AIO = 90°$. Bestimme die Länge der Seite BC.

Aufgabe 56. Bestimme alle Tripel (a, b, c) positiver ganzer Zahlen, die die Gleichung $3abc = 2a + 5b + 7c$ erfüllen.

Aufgabe 57. Auf einer Party ist jeder Gast mit genau vierzehn anderen Gästen befreundet (ihn oder sie selbst nicht mit eingeschlossen). Jeweils zwei Freunde haben genau sechs andere anwesende Freunde gemeinsam, hingegen hat jedes Paar von Nicht-Freunden nur zwei Freunde gemeinsam. Wie viele Gäste sind auf der Party?

Aufgabe 58. Ein Punkt P liegt im Inneren des Dreiecks $\triangle ABC$ und es seien die Bedingungen

$$\overline{AP} = \sqrt{3}, \quad \overline{BP} = 5, \quad \overline{CP} = 2, \quad \overline{AB} : \overline{AC} = 2 : 1 \quad \text{und} \quad \angle BAC = 60°$$

erfüllt. Wie lautet dann der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$?

Aufgabe 59. Sei $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ein Polynom mit nicht-negativen ganzzahligen Koeffizienten, sodass

$$P\left(\frac{\sqrt{21} - 1}{2}\right) = 2020.$$

Finde den kleinstmöglichen Wert für $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$.