

Korrespondenzzirkel Mathematik

Beweismittel zum Beweis planimetrischer Sätze

Umstrukturierter Wissensspeicher

Diese Zusammenstellung enthält - in umstrukturierter Form - einen wesentlichen Teil des Grundwissens, über das man verfügen muss, um auch schwierigere planimetrische Beweisaufgaben lösen zu können. Sie ist auf die Methode des *Rückwärtsarbeitens* zugeschnitten. Es werden jeweils mehrere hinreichende Bedingungen genannt, aus denen sich eine bestimmte Feststellung (Behauptung, Aussage) folgern lässt.

Formuliere zu den hier nur stichwortartig festgehaltenen Angaben jeweils die zugehörigen Sätze!

Mache dir deren Inhalt im Bedarfsfall anhand einer Figur klar!

Wenn du bei einem Beweis auf ein hier nicht angegebenes Beweismittel stößt, dann ergänze diese Zusammenstellung!

Präge dir diese Beweismittel gut ein! Eigne dir durch häufiges Lösen von Beweisaufgaben die Fähigkeit an, im konkreten Fall zu entscheiden, welches der möglichen Beweismittel die größte Erfolgchance hat!

1. Beziehungen zwischen Winkeln

$$\alpha = \beta$$

- 1) Entsprechende Winkel in kongruenten oder ähnlichen Dreiecken ;
- 2) Stufen- oder Wechselwinkel an Parallelen ;
- 3) Basiswinkel in gleichschenkligen Dreiecken oder Trapezen ;
- 4) spitze (stumpfe) Winkel mit paarweise orthogonalen oder parallelen Schenkeln;
- 5) Peripheriewinkel über gleichem Bogen ;
- 6) Peripherie- und Sehnentangentenwinkel über gleichem Bogen ;
- 7) Gegenwinkel im Parallelogramm ;
- 8) Winkel an Winkelhalbierenden (z.B. an der Zentralen eines Tangentenpaars) ;
- 9) $\alpha \xrightarrow{\text{Bew}} \beta$;
- 10) Es gibt ein γ , so dass $\alpha = \gamma$ und $\beta = \gamma$.

$$\alpha > \beta$$

- 1) $a > b$ im zugehörigen Dreieck ;
- 2) Außenwinkel und nichtanliegender Innenwinkel ;
- 3) Zentriwinkel oder Peripheriewinkel, die zu ungleichen Bögen gehören .

$$\alpha = 2\beta$$

- 1) Zentri- und Peripheriewinkel über gleichem Bogen ;
- 2) Zentri- und Sehnentangentenwinkel über gleichem Bogen ;
- 3) Außenwinkel an der Spitze und Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck.

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

- 1) Gegenwinkel im Sehnenviereck ;
- 2) entgegengesetzt liegende Winkel an Parallelen;
- 3) Nachbarwinkel im Parallelogramm ;
- 4) Schenkelwinkel im Trapez .

$$\alpha = \beta + \gamma$$

1) Außenwinkel und nichtanliegende Innenwinkel ;

$$\angle (g,h) = \alpha = 90^\circ$$

- 1) $\alpha + \beta = 90^\circ$ (Innenwinkelsatz) ;
- 2) Winkel im Rechteck, im Quadrat ;
- 3) Winkel zwischen Diagonalen eines Rhombus, eines Quadrats ;
- 4) Winkel zwischen Tangente und Berührungsradius ;
- 5) Winkel zwischen Zentrale und Berührungsehne ;
- 6) Peripheriewinkel über einem Durchmesser ;
- 7) vierter Teil eines Vollwinkels ;
- 8) Winkelhalbierende von Nebenwinkeln ;
- 9) es gilt $a^2 + b^2 = c^2$ im Dreieck ;
- 10) Höhe in A zerlegt das Dreieck in ähnliche Dreiecke ;
- 11) $g \frac{Sp(h)}{g} g$; $g \frac{Dr(M;90^\circ)}{h} h$.

2. Beziehungen zwischen Strecken

$$a = b$$

- 1) Entsprechende Seiten (Strecken) in kongruenten Dreiecken ;
- 2) $\alpha = \beta$ im zugehörigen Dreieck ;
- 3) Radien eines Kreises ;
- 4) Tangentenabschnitte ;
- 5) Gegenseiten im Parallelogramm (Rechteck) ;
- 6) Diagonalen im Rechteck ;
- 7) Diagonalenabschnitte im Parallelogramm ;
- 8) zu den Schenkeln eines gleichschenkligen Dreiecks gehörende Ecktransversale ;
- 9) Sehnen mit gleichem Abstand vom Mittelpunkt ;
- 10) $a \stackrel{Bew}{=} b$;
- 11) Es gibt ein c , so dass $a = c$ und $b = c$.

$$a > b$$

- 1) $\alpha > \beta$ im zugehörigen Dreieck ;
- 2) Sehnen mit ungleichem Abstand vom Mittelpunkt .

$$c = a + b$$

- 1) Gesamtstrecke als Summe von Teilstrecken (Streckenabtragung) .

$$a + b > c$$

- 1) Seiten im Dreieck .

$$a = 2b$$

- 1) Basis und Mittellinie im Dreieck ;
- 2) Abschnitte einer Seitenhalbierenden ;
- 3) entsprechende Seiten (Strecken) in ähnlichen Dreiecken mit $k = 1:2$;
- 4) Diagonale und Diagonalenabschnitt im Parallelogramm ;

$$ab = cd$$

- 1) Gleichheit von (Rechtecks-) Inhalten ;

$$a:c = d:b \quad / \quad a:d = c:b$$

- 2) Ähnlichkeit, Strahlensätze ;
- 3) Sehnenabschnitte, Sekantenabschnitte ;
- 4) $a : b = h_b : h_a$.

3. Beziehungen zwischen Geraden

$g \parallel h / AB \parallel CD$

- 1) g, h besitzen eine gemeinsame Orthogonale ;
- 2) gleiche Stufen- oder Wechselwinkel ;
- 3) die Summe entgegengesetzt liegender Winkel beträgt 180° ;
- 4) Parallelogrammseiten ; Grundseiten eines Trapezes ;
- 5) Mittellinie und Grundseite im Dreieck oder im Trapez ;
- 6) $g \stackrel{V(PP')}{=} h$.

$g \perp h$ vgl. 1., $\sphericalangle(g, h) = 90^\circ$.

4. Beziehungen zwischen Dreiecken

$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

- 1) Kongruenzsätze sss , sws , wsw , SsW ;
- 2) $\triangle ABC \stackrel{\text{Bew}}{=} \triangle A'B'C'$.

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

- 1) $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ und $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$;
- 2) $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{AC} = \overline{A'B'} : \overline{B'C'} : \overline{A'C'}$;
- 3) $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ und $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{A'B'} : \overline{A'C'}$;
- 4) $\triangle ABC \stackrel{\ddot{A}(Z:k)}{=} \triangle A'B'C'$.

5. Beziehungen zwischen Punkten , Geraden , Strecken u.ä.

$P \in \overline{AB} / P \in g$

- 1) $\sphericalangle APB = 180^\circ$;
- 2) \overline{AB} ist eine Diagonale im Parallelogramm, P ist der Mittelpunkt der anderen Diagonalen ;
- 3) \overline{AB} ist eine spezielle Dreieckstransversale, P ist der Schnittpunkt der beiden zugehörigen Transversalen ;
- 4) $P \stackrel{SP(AB)}{=} P$; $g \stackrel{Sp(P)}{=} g$.

$P \in k(M, r)$

- 1) Scheitel eines rechten Winkels über einem Durchmesser von $k(M, r)$;
- 2) Endpunkt eines Radius ;
- 3) Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes oder des Peripheriezentriwinkelsatzes .

M ist der *Mittelpunkt* von \overline{AB} : $A \stackrel{Sp(M)}{=} B$;

g ist die *Mittelsenkrechte* von \overline{AB} : $A \stackrel{Sp(g)}{=} B$;

w ist die *Winkelhalbierende* von $\sphericalangle(g, h)$: $g \stackrel{Sp(w)}{=} h$.

6. Eigenschaften von Figuren

- Gleichseitiges Dreieck:*
- 1) Drei gleiche Seiten ;
 - 2) zwei gleiche Winkel , ein 60° -Winkel ;
 - 3) zwei 60° -Winkel ;
 - 4) die Seitenhalbierenden, Höhen, Winkelhalbierenden und Mittelsenkrechten fallen zusammen ;
 - 5) drei Symmetrieachsen ;
 - 6) $B \underline{\text{Dr}(A:60^\circ)} C$.
- Quadrat:*
- 1) Vier gleiche Seiten, ein rechter Winkel ;
 - 2) drei gleiche Seiten, zwei rechte Winkel ;
 - 3) zwei gleiche Nachbarseiten, drei rechte Winkel ;
 - 4) gleich lange, orthogonale, einander halbierende Diagonalen ;
 - 5) vier gleiche Seiten, gleich lange Diagonalen ;
 - 6) drei gleiche Seiten, gleich lange und orthogonale Diagonalen ;
 - 7) vier Symmetrieachsen, Diagonalenschnittpunkt ist Symmetriezentrum ;
 - 8) $B \underline{\text{Dr}(A:90^\circ)} D$ und $C \underline{\text{Dr}(B:90^\circ)} A$.
- Rechteck:*
- 1) Drei rechte Winkel ;
 - 2) zwei Paare paralleler Gegenseiten, ein rechter Winkel ;
 - 3) zwei Paare gleicher Gegenseiten, ein rechter Winkel ;
 - 4) ein Paar gleicher und paralleler Gegenseiten, ein rechter Winkel ;
 - 5) gleich lange, einander halbierende Diagonalen ;
 - 6) zwei Symmetrieachsen (Mittellinien), Diagonalenschnittpunkt ist Symmetriezentrum .
- Rhombus:*
- 1) Vier gleiche Seiten ;
 - 2) orthogonale, einander halbierende Diagonalen ;
 - 3) zwei Symmetrieachsen (Diagonalen), Diagonalenschnittpunkt ist Symmetriezentrum .
- Parallelogramm:*
- 1) Zwei Paare paralleler Gegenseiten ;
 - 2) zwei Paare gleicher Gegenseiten ;
 - 3) ein Paar gleicher und paralleler Gegenseiten ;
 - 4) zwei Paare gleicher Gegenwinkel ;
 - 5) einander halbierende Diagonalen ;
 - 6) Diagonalenschnittpunkt ist Symmetriezentrum ;
 - 7) $\overline{AB} \underline{\text{VPP}'} \overline{CD}$.
- Drachenviereck:*
- 1) Zwei Paare gleicher Nachbarseiten ;
 - 2) ein Paar gleicher Gegenwinkel ;
 - 3) orthogonale Diagonalen, von denen eine die andere halbiert .
- Sehnenviereck:*
- 1) $A, B, C, D \in k(M; r)$;
 - 2) $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$;
 - 3) $ef = ac + bd$ (Satz des Ptolomäus) .
- Tangentenviereck:*
- 1) $a + c = b + d$.