Primzahlen und Teilbarkeit

Axel Schüler

Lange Nacht der Wissenschaften, Leipzig, 16. Juli 2021

Überblick

Was ist eine Primzahl?

Manche Zahlen lassen sich in ein Produkt zerlegen, wie $6 = 2 \cdot 3$ oder $50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$, wobei die Faktoren größer als 1 sein sollen. Andere Zahlen lassen sich nicht zerlegen, wie etwa 2, 3, 5 und 7.

- Eine Primzahl hat genau zwei Teiler, Eins und die Zahl selbst.
- 1 ist keine Primzahl (hat nur einen Teiler).
- Wie viele Primzahlen gibt es zwischen 1 und 100?

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37,$$
$$41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$$

Einfachster Test

Theorem (Hauptsatz der Zahlentheorie)

Jede natürliche Zahl lässt sich als eindeutig als Produkt von Primzahlen schreiben.

$$n = p \cdot q \cdot r \cdots z,$$

wobei $p, q, r, \ldots, z$ Primzahlen sind. Faktoren dürfen mehrmals auftreten.

- Angenommen n ist *keine Primzahl*. Dann gibt es einen Teiler $t > 1$ mit $n = t \cdot s$ und einen Teiler s mit $t \leq s < n$.
- Teiler treten stets paarweise auf: $2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6$.
- Es gilt $t \leq \sqrt{n} \leq s$. Wenn n durch keine der Zahlen $t \leq \sqrt{n}$ teilbar ist, so ist n eine Primzahl.

Das Sieb des Erathostenes

Das Sieb des Eratosthenes ist ein Algorithmus zur Bestimmung einer Tabelle aller Primzahlen kleiner oder gleich einer vorgegebenen Zahl n.

- Alle Zahlen $2, 3, 4, \ldots, n$ aufschreiben. Alle Zahlen sind zunächst unmarkiert. Die kleinste unmarkierte Zahl ist immer eine Primzahl.
- Alle Vielfachen dieser Primzahl werden gestrichen (sind zusammengesetzte Zahlen).
- Das Verfahren endet spätestens, wenn die Vielfachen von $\sqrt{n}$ gestrichen sind.
- Alle nicht gestrichenen Zahlen sind Primzahlen.

Das Sieb des Erathostenes

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Wir streichen zunächst alle **Vielfachen von 2**, die größer sind als 2, also alle geraden Zahlen ab 4.

Quelle: https://www.mathe-lexikon.at/arithmetik/natuerliche-zahlen/teilbarkeit/primzahlen/sieb-des-eratosthenes.html

Das Sieb des Erathostenes

	2	3		5		7		~~9~~	
11		13		~~15~~		17		19	
~~21~~		23		25		~~27~~		29	
31		33		35		37		39	
41		43		45		47		49	
51		53		55		57		59	
61		63		65		67		69	
71		73		75		77		79	
81		83		85		87		89	
91		93		95		97		99	

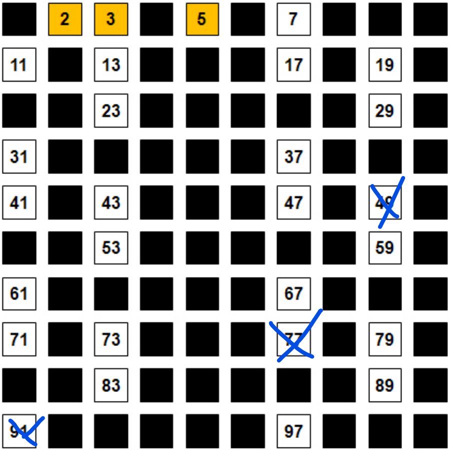
Wir streichen nun alle **Vielfachen von 3**, die größer sind als 3.

Das Sieb des Erathostenes

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23		~~25~~				29	
31				~~35~~		37			
41		43				47		49	
		53		~~55~~				59	
61				~~65~~		67			
71		73				77		79	
		83		~~85~~				89	
91				~~95~~		97			

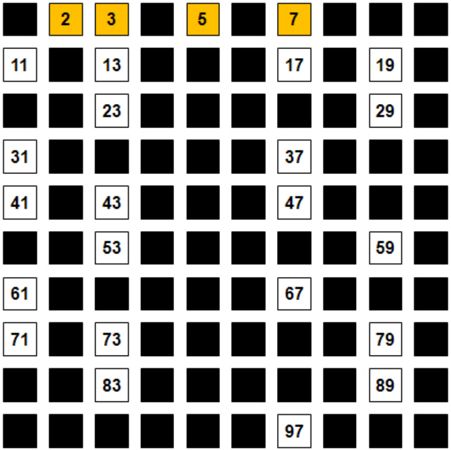
Wir streichen nun alle **Vielfachen von 5**, die größer sind als 5.

Das Sieb des Erathostenes



Wir streichen nun alle **Vielfachen von 7**, die größer sind als 7.

Das Sieb des Erathostenes

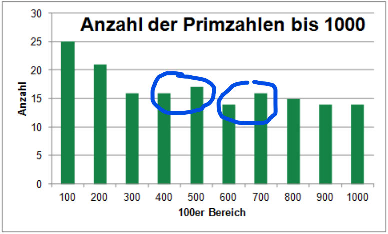


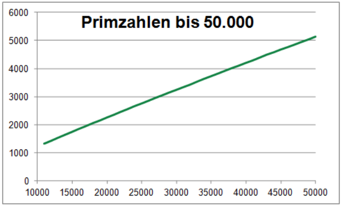
Die übrig gebliebenen Zahlen kleiner 100 sind nun alles Primzahlen. Es gibt 25 Primzahlen von 1 bis 100.

Fragen über Fragen

- Wie viele Primzahlen gibt es zwischen 100 und 200? Werden es „oben“ mehr oder gibt es weniger Primzahlen?
- Gibt es 999 aufeinanderfolgende natürlichen Zahlen, die alle zusammengesetzt sind, also alle keine Primzahlen sind?
- Wie viele Primzahlen gibt es überhaupt?
- Wie groß ist die Summe der reziproken Primzahlen, $s = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$?
- Wie groß ist die Summe der reziproken Primzahlzwillinge, $b = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right) + \cdots$?

Wie viele Primzahlen gibt es?





0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
25	21	16	16	17	14	16	15	14	14

Primzahlsatz: $A(n) \sim \dfrac{n}{\log(n)}$.

Neue Primzahlen I

Zu jeder Menge aus Primzahlen $M = \{p, q, r, \ldots, z\}$ gibt es eine Primzahl x, die in dieser Menge noch nicht enthalten ist.

Beweis.

Produkt aller Primzahlen dieser Menge bilden und addieren 1:

$$n = p \cdot q \cdot r \cdots z + 1.$$

Diese Zahl n lässt bei Division durch alle Primzahlen $p, q, r, \ldots, z$ den Rest 1. Nach dem Hauptsatz der Zahlentheorie ist n das Produkt von Primzahlen. Sämtliche Primfaktoren von n sind „neue" Primzahlen, die in M nicht vorkommen. $\square$

Theorem (Euklid)

Es gibt unendliche viele Primzahlen.

Neue Primzahlen II

Example

Sei

$$x := 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 + 1$$

Dann ist

$$x = 331 \cdot 571 \cdot 34231.$$

Lücken

Wie groß und wie klein können die Lücken zwischen zwei benachbarten Primzahlen sein?

Es gibt 999 aufeinanderfolgende Zahlen, die alle nicht Primzahl sind. Für $n = 1000!$ sind die Zahlen

$n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1000$

$$n+2, n+3, \ldots, n+1000$$

jeweils durch $2, 3, \ldots$ bzw. 1000 teilbar, denn

$$n + 18 = 1000! + 18 = 18(1000!/18 + 1).$$

1000! ist durch *alle* natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 teilbar.

Primzahlzwillinge

Wenn p und $p+2$ beides Primzahlen sind, so spricht man von einem Primzahlzwilling. Es sind $(3,5)$, $(101,103)$, $(107,109)$ Primzahlzwillinge.

Vermutung: Es gibt unendliche viele Primzahlzwillinge.

Terence Tao:

`https://www.youtube.com/watch?v=pp06oGD4m00`

Theorem (Yitang Zhang, Mai 2013)

Der Abstand zweier benachbarter Primzahlen ist unendlich oft kleiner als 70.000.000.

Goldbach

GOLDBACH (1690 bis 1764) formuliert 1742 in einem Brief an EULER diese Vermutung.
Starke Goldbachsche Vermutung: Jede gerade Zahl größer als 2 lässt sich als Summe zweier Primzahlen schreiben.

$$4 = 2 + 2, \quad 6 = 3 + 3, \quad 8 = 5 + 3, \quad 10 = 5 + 5, \quad 12 = 5 + 7,$$
$$14 = 7 + 7, \quad 16 = 13 + 3, \quad 18 = 11 + 7, \quad 20 = 13 + 7,$$
$$\ldots 48 = 29 + 19, \ldots, 100 = 97 + 3$$

Theorem (Schnirelmann, 1905-1938)

Jede natürliche Zahl lässt sich als Summe von höchstens 300.000 Primzahlen schreiben.

Goldbach

$$n = (n-3) + 3$$

Schwache Goldbachsche Vermutung: Jede ungerade Zahl größer als 5 lässt sich als Summe dreier Primzahlen schreiben.

Wie folgt aus der starken die schwache Goldbachsche Vermutung?

Theorem (Terence Tao, 2012)

Jede ungerade Zahl größer als 1 lässt sich als Summe von höchstens 5 Primzahlen schreiben.

https://arxiv.org/pdf/1201.6656.pdf

Mersenne

Die Zahlen $M_n = 2^n - 1$ heißen MERSENNE-Zahlen. Ist $n = pq$ zusammengesetzt, so ist auch M_n zusammengesetzt, denn teilbar durch M_p und M_q. Ist M_n eine Primzahl, so nennt man M_n *Mersenne-Primzahl*. Die ersten acht Mersenne-Primzahlen M_p sind die mit den Exponenten

$$p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31.$$

$2^{23} - 1 = 8388607 = 47 \cdot \ldots$

GIMPS = Great Internet Mersenne Prime Search. Viele Rechner werden zusammengeschaltet, um immer größere Primzahlen zu entdecken. Die 51. Mersenne-Primzahl wurde 2018 entdeckt.

$n = 43.112.609$	$l = 12.978.189$	2008	GIMPS / Edson Smith
$n = 77.232.917$	$l = 23.249.425$	2017	GIMPS / Jonathan Pace
$n = 82.589.933$	$l = 24.862.048$	2018	GIMPS / Patrick Laroche

Vortrag ohne Worte

Im Jahre 1903 präsentierte Frank Nelson Cole (1861-1926) bei einem Treffen der American Mathematical Society in einem ungewöhnlichen Vortrag die Faktoren der Mersenne Zahl $M_{67} = 2^{67} - 1$. Bereits 1876 hatte Édouard Lucas gezeigt, dass diese Zahl, entgegen der Angabe von Marin Mersenne, keine Primzahl ist. Primfaktoren dieser Zahl blieben aber unbekannt. Bei seinem Vortrag ging Cole wortlos zur Tafel und berechnete den Wert von M_{67}. Sodann schrieb er auf die andere Tafelseite die Aufgabe $193.707.721 \cdot 761.838.257.287$.

Vortrag ohne Worte

Er führte die langwierige Multiplikation handschriftlich aus und zeigte am Schluss, dass beide Berechnungen zum gleichen Ergebnis von 147.573.952.589.676.412.927 führten. Ohne ein Wort gesprochen zu haben, ging Cole an seinen Platz zurück, während seine Kollegen aufstanden und ihm applaudierten. Cole gestand später, dass er für die Suche nach den Faktoren drei Jahre lang an den Wochenenden gerechnet habe.

Literatur

- Richard Courant und Herbert Robbins.
  Was ist Mathematik?
  Springer, Berlin. Heidelberg. New York,Springer.
  5. Unveränderte Auflage, 2000.
  ISBN-13: 978-3540637776
- Paulo Ribenboim
  Prime Numbers, Friends Who Give Problems: A Trialogue with Papa Paulo
  World Scientific 2016.

Teileranzahlen

1. Wie viele Teiler hat die Zahl $n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ (sieben Zweien)? 8 Teiler
2. Wie viele Teiler hat die Zahl $m = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot 11^1$ $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$
3. Eine Zahl mit *ungerader* Anzahl von Teilern ist eine Quadratzahl (und umgekehrt).

$$2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$$

Notizen

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+ \quad = 2$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+ \quad = \infty$$

$$> 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{1/2}+\underbrace{\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{8}}_{1/2}+ \quad \frac{\pi^2}{6}$$

Notizen

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\dots=\infty$$

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+b^{n-1})$$

$$2^{pq}-1=(2^p)^q-1^q=(2^p-1)(\dots)$$