

TU Chemnitz · Fakultät für Mathematik · 09107 Chemnitz

Bearbeiter: Eric Legler
Gebäude: Reichenhainer Straße 41
Raum: C47.622
Telefon: +49 371 531-31934
Fax: +49 371 531-831934
E-Mail: eric.legler@mathematik.tu-chemnitz.de
Internet: http://www.tu-chemnitz.de/mathematik/part_dgl

An die Teilnehmer des KZM Mathematik
in den Klassen 11 und 12

Ort, Datum: Chemnitz, 28. 6. 2020

Korrespondenzzirkel Mathematik
Klasse 11/12, **Serie 1**, 2020/21

1. Aus der Folge $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ der Reziproken der natürlichen Zahlen kann man leicht eine dreigliedrige arithmetische Teilfolge auswählen: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$. Ist es auch möglich, arithmetische Teilfolgen der Länge 4, 5 bzw. k ($k \in \mathbb{N}$ beliebig) auszuwählen?

2. Es seien $0 < a, b, c < \frac{\pi}{2}$ drei reelle Zahlen, die die Gleichungen

$$\cos a = a, \sin(\cos b) = b, \cos(\sin c) = c$$

erfüllen. Ordne diese Zahlen der Größe nach!

(Der Nachweis, daß derartige Zahlen existieren und eindeutig bestimmt sind, wird nicht verlangt.)

3. Es seien A, B, C die Eckpunkte eines Dreiecks und P ein beliebiger Punkt auf der Seite AC . Durch P werden die Parallelen zu den Seitenhalbierenden AK bzw. CL der Seiten BC bzw. AB gezeichnet. Diese Parallelen schneiden die Seiten BC bzw. AB in den Punkten E bzw. F .
Zeige, daß die Seitenhalbierenden AK und CL die Strecke EF in drei gleiche Teile zerlegen.

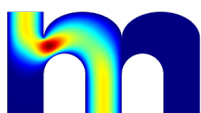
4. Es seien a, b, c, d positive natürliche Zahlen und $ab = cd$. Zeige, daß die Zahl

$$z = a^{2^{2005}} + b^{2^{2005}} + c^{2^{2005}} + d^{2^{2005}}$$

keine Primzahl ist.

5. a) Eine Kreislinie wird durch zehn Punkte in gleichlange Bögen zerlegt. Ist es möglich, diese Punkte so durch fünf Strecken zu verbinden, daß von jedem Punkt eine Strecke ausgeht und jede der Strecke eine andere Länge hat?
b) Man beantworte dieselbe Frage für 100 Punkte und 50 Strecken.
6. Find, with proof, the smallest possible value of $|12^m - 5^n|$, where m and n are positive integers.

Einsendeschluss: **30.10.2020**



Bitte senden an: Eric Legler
Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
09107 Chemnitz
oder:
eric.legler@mathematik.tu-chemnitz.de

Lösungshinweise

1. Beginne mit einer einfachen arithmetischen Teilfolge und konstruiere den Nenner so, dass sie Teil der gegebenen Zahlenfolge ist.
2. Die Nullstelle der Funktion $f(x) = \cos x - x$ ist äquivalent zu $\cos x = x$, d.h. $f(a) = 0$. Betrachte nun die Monotonie der Funktion und schließe daraus die Reihenfolge von a , b und c .
3. Nutze die Ähnlichkeit von bestimmten Dreiecken.
4. Stelle z als ein Bruch dar und finde eine Zerlegung indem du die Summe im Zähler mit Hilfe des größten gemeinsamen Teilers als Produkt zerlegst.
5. Überlege zuerst, wann genau zwei Strecken die gleiche Länge haben können. Was kann man dann über die unterschiedlichen Längen aussagen? Tipp: Es macht einen Unterschied, ob die Anzahl der Verbindungsstrecken gerade oder ungerade ist.
6. Start with $n = m = 1$ and rule out all smaller (possible) values.