Kozi Klasse 6 - Lösungen zur 3. Serie

1. Orangen werden zu einer dreieckigen Pyramide gestapelt. Die Orangen einer Schicht befinden sich immer in den Lücken der nächst tieferen Schicht, wobei eine Lücke immer durch drei aneiandergrenzende Orangen gebildet wird. Eine einschichtige Pyramide besteht nur aus einer Orange, eine zweischichtige somit aus 4 Orangen. Aus wie vielen Orangen besteht eine siebenschichtige Pyramide? Wie viele schichten kann man mit 300 Orangen höchstens aufbauen und wie viele Orangen bleiben dann übrig?
Zusatz: Aus wie vielen Orangen besteht eine Pyramide mit n Schichten?

Lösung: Jede Schicht der Pyramide ist ein aus Zeilen von Orangen gebildetes Dreieck. Jede Zeile enthält eine Orange mehr als die (in der gleichen Schicht) überliegende Zeile (s. Bild). Eine Schicht mit nur einer Zeile besteht aus einer Orange. Eine Schicht mit zwei Zeilen aus $1 + 2 = 3$ Orangen, eine mit drei Zeilen aus $1 + 2 + 3 = 6$ Orangen und eine Schicht mit n Zeilen aus $1 + 2 + \ldots + n$ Orangen.
Jede Schicht enthält wiederum eine Zeile mehr als die darüberliegende Schicht. Damit enthält eine siebenschichtige Pyramide die oberste Schicht mit einer Orangen, die zweite Schicht mit 3 Orangen, die dritte Schicht mit 6, die vierte mit 10, die fünfte mit 15, die sechste mit 21 und die siebente mit 28 Orangen. Eine siebenschichtige Pyramide enthält also $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 = 84$ Orangen.
Eine achtschichtige Pyramide hat dann $84 + 36 = 120$, eine neunschichtige $120 + 45 = 165$, eine zehnschichtige $165 + 55 = 220$, eine elfschichtige $220 + 66 = 286$ und eine zwölfschichtige $286 + 78 = 364$ Orangen. Da $286 < 300 < 364$ ist, kann man mit 300 Orangen also eine elfschichtige Pyramide bauen und behält $300-286 = 14$ Orangen übrig.
Zusatz: Nach obiger Erklärung enthält eine n-schichtige Pyramide die folgende Anzahl von Orangen (die einzelnen Schichten sind in den Klammern zusammengefasst):

$$\begin{aligned}1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + (1 + 2 + 3 + 4) + \cdots + (1 + 2 + 3 + \cdots + n)\\ = n \cdot 1 + (n - 1) \cdot 2 + \cdots + 1 \cdot n\end{aligned}$$

Die Gleichheit erhält man wenn man die einzelnen Summanden umsortiert, die 1 kommt n-mal vor (nämlich in jedem Summanden), die 2 kommt $n - 1$-mal vor (überall außer im ersten Summanden), usw. bis zur n, die nur einmal, nämlich im letzten Summanden vorkommt.

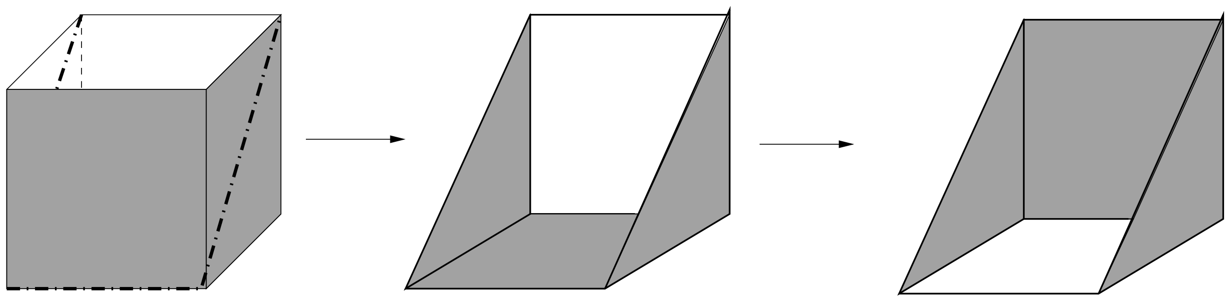
2. Ines, Jana, Klaus, Leo und Martin tauschen Fotos aus. Jeder hat 4 Fotos, die er an seine Freunde verteilt. Am Ende hat jeder der Fünf wieder 4 Fotos. Keiner verteilt seine Bilder in gleicher Weise an seine Freunde, das heißt: Gibt einer der Freunde zwei Fotos an einen Freund und zwei Fotos an einen anderen (dann bekommen die restlichen beiden Freunde natürlich keine Bilder mehr.), kann man diese Verteilung mit $(2, 2, 0, 0)$ darstellen. Diese Verteilungsmöglichkeit kommt dann – wie jede andere auch – nicht noch einmal vor. Es ist bekannt, dass Leo alle seine Bilder an Ines gibt und dass Jana drei Bilder von Klaus erhält.
Welche Verteilungsmöglichkeiten gibt es? Gib an, wer wem wie viele Bilder gab, und begründe!

Lösung: Als erstes überlegen wir uns, welche Verteilungsmöglichkeiten es überhaupt geben kann: $(4, 0, 0, 0)$, $(3, 1, 0, 0)$, $(2, 2, 0, 0)$, $(2, 1, 1, 0)$ und $(1, 1, 1, 1)$. Das sind fünf Möglichkeiten. Da wir auch 5 Freunde haben und keine Verteilungsmöglichkeit doppelt vorkommen darf, muss auch jede dieser Verteilungsmöglichkeiten vorkommen. Wir wissen schon, dass Leo alle seine Bilder an Ines gibt, also die Verteilungsmöglichkeit $(4, 0, 0, 0)$ hat. Damit hat Ines schon 4 Bilder erhalten, kann also von keinem weiteren mehr Bilder erhalten. Das heisst, in den Verteilungen von Jana, Klaus und Martin muss immer mindestens eine Null vorkommen, da sie Ines ja keine Bilder mehr geben können. Damit bleibt die Verteilung $(1, 1, 1, 1)$ nur für Ines.
Weiterhin wissen wir das Jana drei Bilder von Klaus erhält. Damit muss Klaus als Verteilung $(3, 1, 0, 0)$ haben, wobei bis jetzt noch nicht klar ist, an wen das vierte Bild von ihm geht.
Es verbleiben nun noch die Verteilungen $(2, 2, 0, 0)$ und $(2, 1, 1, 0)$. Jana hat jetzt schon drei Bilder von und eines von Ines erhalten, damit hat sie alle 4 Bilder. Damit kann Martin weder an Ines noch an Jana Bilder geben, muss also mindestens zwei Nullen enthalten. Es bleibt für Martin nur die Verteilung $(2, 2, 0, 0)$, die damit an Leo und Klaus gehen müssen. Für Jana bleibt dann nur die Verteilung $(2, 1, 1, 0)$. Bis jetzt hat Klaus 2 Bilder von Martin und eines von Ines erhalten. Damit fehlt ihm noch ein Bild. Dieses kann er nicht von Leo erhalten. Es muss also Jana ihm ein Bild geben. Martin hat bis jetzt nur das Bild von Ines erhalten. Ihm fehlen also noch 3. Da er von Leo keine erhält, müssen diese von Jana und Klaus kommen. Damit erhält er von Jana zwei Bilder und von Klaus eines. Damit bleibt für das verbleibende Bild von Jana nur noch Leo und damit hat jeder 4 Bilder erhalten.
Zusammenfassend haben wir also:
Leo gibt 4 Bilder an Ines - $(4, 0, 0, 0)$.
Klaus gibt 3 Bilder an Jana und eines an Martin - $(3, 1, 0, 0)$.
Martin gibt je 2 Bilder an Leo und Klaus - $(2, 2, 0, 0)$.

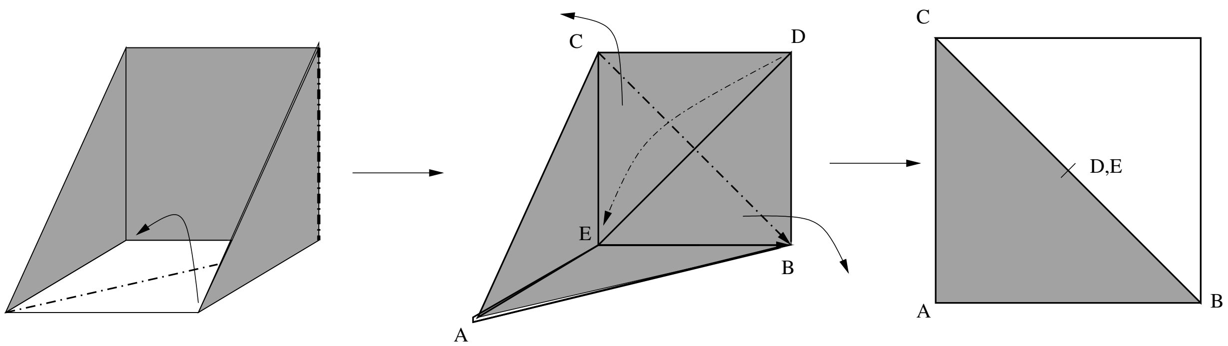
Jana gibt 2 Bilder an Martin und jeweils eines an Klaus und Leo - $(2, 1, 1, 0)$.
Ines gibt jeweils ein Bild an die anderen - $(1, 1, 1, 1)$.

3. Lösung: Dieses Falträtsel findet man unter dem Namen Flexatube. Die folgende Anleitung gibt nur eine mögliche Lösung, vielleicht hast du ja eine andere gefunden.

Als ersten Schritt klappe das Quadrat der Vorderseite nach innen auf den Boden. Falte dazu entlang der gestrichelten Linien. Das entstandene Gebilde wird nun so gedreht, dass das Quadrat auf dem Boden nun die Rückseite bildet (rechts im Bild).



Falte die nun vordere rechte Ecke des auf dem Boden liegenden Quadrat auf die linke hintere Ecke dieses Quadrates. Die Faltlinien sind wieder im nächsten Bild links gestrichelt dargestellt. Du erhälst dann die mittige Figur (Diese ist noch dreidimensional - auch wenn man es im Bild nicht erkennt.) Auf der Rückseite gibt es ein (abstehendes) halbes Quadrat. Drehe es so, dass es senkrecht von der Rückseite absteht. Nun kannst du gleichzeitig entlang der durchgehenden Pfeile im Bild vorsichtig den entstandenen Schlitz auseinanderziehen. Dabei bewegt sich die obere rechte Ecke entlang des gestrichelten Pfeiles und du erhälst die Figur rechts im Bild.



Drehe das erhaltene Quadrat auf die Rückseite und führe alle bisherigen Schritte umgekehrt aus und du erhälst wieder die Ausgangsstellung des Flexatubes, aber mit der Innenseite nach außen.

4. Alle Katzen sind Stofftiere. Manche Katzen sind grau. Einige Stofftiere sind lila. Wenn eine Katze ein lila Stofftier ist, dann singt sie Weihnachtslieder.
Entscheide mit Begründung, welche der untenstehenden Aussagen, aus obigen Sätzen (und nur aus diesen - wir haben also keine zusätzlichen Informationen) folgt:

a) Alle grauen Katzen sind Stofftiere.
b) Alle Stofftiere sind Katzen.
c) Wenn eine Katze keine Weihnachtslieder singt, ist sie kein lila Stofftier.
d) Einige Katzen sind lila Stofftiere.
e) Wenn eine Katze kein lila Stofftier ist, dann singt sie auch keine Weihnachtslieder.
f) Keine graue Katze ist ein lila Stofftier.
Zusatz Einige Katzen singen Weihnachtslieder.

Lösung:
a) Das folgt, denn alle Katzen sind Stofftiere und somit insbesondere auch die grauen.
b) Das weiss man nicht, denn es ist nicht gesagt, ob es nicht auch andere Stofftiere, z.B. Blumenvasen gibt oder so.
c) Das folgt direkt aus dem 4. Satz. Allgemein ist es so wenn aus einer Aussage A eine Aussage B folgt, dann wissen wir: Ist B falsch, kann A auch nicht stimmen.

d) Das wissen wir nicht. Zwar wissen wir, dass alle Katzen Stofftiere sind und einige Stofftiere lila sind. Doch es könnte ja sein, dass nur die anderen Stofftiere, die keine Katzen sind, z.B. Blumenvasen, lila sind. Das widerspricht auch nicht dem 4. Satz. Denn dort steht nur etwas davon, wenn eine Katze ein lila Stofftier ist. Es sagt niemand, dass dieser Fall auch eintreten muss.
e) Auch das wissen wir nicht. Es könnte ja sein, das in Wirklichkeit alle Katzen Weihnachtslieder singen. Das wird nicht gesagt.
f) Das wissen wir nicht, vielleicht gibt es ja graue Katzen, die lila Stofftiere sind. Das würde keiner der obigen Aussagen widersprechen.
(Einige von Euch haben argumentiert, dass eine Katze nicht gleichzeitig grau und lila sein kann, doch das wissen wir nicht. Das mag in der Realität vielleicht stimmen (doch auch hier könnte sie gestreift sein), aber dann wäre es eine Zusatzinformation und nichts, was man einzig und allein durch die obigen vier Sätze folgern könnte)
Zusatz: Das wissen wir nicht. Wenn wir wüssten, dass es lila Stofftiere gibt, dann würde es aus dem vierten Satz folgern. Aber das steht nicht in den oberen vier Sätzen. Vielleicht gibt es ja nur graue Stofftierkatzen, die niemals singen, wer weiss...

5. Nina und Olaf spielen folgendes Spiel. Sie starten mit einer Zahl und in jedem Zug muss einer der Spieler eine Quadratzahl von der Zahl subtrahieren. Gezogen wird abwechseld, Nina beginnt und gewonnen hat der Spieler, der die letzte Subtraktion durchführt. Ein Beispiel wäre: Wenn sie mit der Zahl 5 starten, kann Nina entweder 1 oder 4 subtrahieren und erhält dann entweder 4 oder 1. In beiden Fällen wäre es eine Quadratzahl, so dass Olaf durch deren Subtraktion einen Sieg erzielen könnte.
Für welche Startzahlen zwischen 1 und 20 kann Nina durch eine geeignete Strategie immer einen Sieg erzielen und für welche Startzahlen hat sie diese Möglichkeit nicht? Begründe!

Lösung:
Eine Zahl, bei der der Spieler der am Zug ist, gewinnen kann, nennen wir Gewinnposition (G). Eine Zahl, bei der er bei richtigem Spiel des Gegners nicht gewinnen kann als Verlustposition (V). Eine Zahl ist eine Gewinnposition, wenn es einen Zug gibt, der den Gegner auf eine Verlustposition führt, z.B. ist 3 eine Gewinnposition. Denn subtrahiert der Spieler 1, hat der Gegner nur noch die Zahl 2 vor sich, eine Verlustposition. Weiterhin ist eine Zahl eine Verlsutposition, wenn es keinen solchen Zug gibt, er also egal welche Quadratzahl er subtrahiert, er den Gegner immer mit einer Gewinnposition konfrontiert. Z.B. ist die Zahl 10 eine Verlustposition. Als Zugmöglichkeiten kann man nur 1, 4 oder 9 abziehen und überlässt den Gegner damit die Zahl 9, 6 oder 1. Das sind alles Gewinnpositionen. Wenn der Gegner richtig weiter spielt, hat man also keine Chance mehr.
In der nebenstehenden Tabelle sind für die Zahlen 1 bis 20 jeweils der nächste Zuge aufgeführt. Falls die Zahl eine Gewinnposition ist, die Zahl die man subtrahieren kann, um den Gegner vor eine Verlustposition zu stellen. Falls die Zahl eine Verlustposition ist, werden alle möglichen Züge aufgeführt und damit gezeigt, dass alle die Züge auf Gewinnpositionen führen.

1	G	1 weg
2	V	1 weg → 1
3	G	1 weg →2
4	G	4 weg
5	V	1 weg → 4 oder 4 weg → 1
6	G	1 weg → 5
7	V	1 weg → 6 oder 4 weg → 3
8	G	1 weg
9	G	9 weg
10	V	1 weg → 9 oder 4 weg → 6 oder 9 weg → 1
11	G	1 weg
12	V	1 weg → 10 oder 4 weg → 7 oder 9 weg → 2
13	G	1 weg
14	G	4 weg
15	V	1 weg → 14 oder 4 weg →11 oder 9 weg → 6
16	G	16 weg
17	V	1 weg → 16 oder 4 weg → 13 oder 9 weg → 8 oder 16 weg → 1
18	G	1 weg
19	G	4 weg
20	V	1 weg → 19 oder 4 weg → 16 oder 9 weg → 11 oder 16 weg → 4