Leipziger SchülerGesellschaft
für Mathematik

http://www.lsgm.de

Dr. Hans-Gert Gräbe, apl. Prof. am Inst. f. Informatik, Univ. Leipzig, 04009 Leipzig
email: graebe@informatik.uni-leipzig.de, tel.: 0341-9732248

Korrespondenz-Seminar 2008/09 der LSGM
Klasse 8 – Aufgabenserie 2

Bitte beachtet auch das Informationsblatt sowie die Hinweise zu den Aufgaben weiter unten! **Aufgabe 4 ist gegenüber dem Chemnitzer Blatt ausgetauscht**.

1. Ermittle die Lösungsmengen der folgenden linearen Kongruenzen: (6 Pkt.)

a)	$28\,x \equiv 84$	(mod 35)	b)	$314\,x \equiv 17$	(mod 11)
c)	$95\,x \equiv 7$	(mod 15)	d)	$1547\,x \equiv 2737$	(mod 595)
e)	$93\,x \equiv 152$	(mod 17)	f)	$55\,x \equiv 385$	(mod 99)

2. Ermittle die Lösungsmenge L_p der Gleichung

$$\sqrt{p\,x-2} - \sqrt{2\,x+1} = 0\,,$$

wobei p ein reeller Parameter ist.

a) Bestimme die Lösungsmenge zunächst für die Parameterwerte $p = 0$, $p = 5$ und $p = -10$ (das sind drei Aufgaben). Vergiss nicht, in jedem Fall die Probe auszuführen! (3 Pkt.)

b) Wie kann die Lösungsmenge für andere Werte für p bestimmt werden? Gib eine Formel für die Lösungsmenge L_p in Abhängigkeit von p an! (3 Pkt.)

3. Beweise folgende Aussage: Ist 7 ein Teiler von $a^3 + b^3 + c^3$, dann ist wenigstens eine dieser Kubikzahlen durch 7 teilbar. (6 Pkt.)

Hinweis: Untersuche, welche Reste eine Kubikzahl bei Division durch 7 lassen kann und führe dann eine vollständige Fallunterscheidung durch.

4. Zwei Primzahlen p_1, p_2 heißen *Primzahlzwillinge*, wenn $p_1 - p_2 = 2$ gilt.

Beweise, dass für alle Primzahlzwillinge p_1, p_2 mit $p_2 > 3$ die Summe $p_1 + p_2$ durch 12 teilbar ist.

5. Über drei rationale Zahlen werden folgende Aussagen gemacht:

(1) Der Quotient aus der ersten und der dritten Zahl ist positiv.
(2) Die Summe aus der ersten und der dritten Zahl ist negativ.
(3) Das Produkt aller drei Zahlen ist positiv.

a) Was lässt sich auf Grund dieser drei Bedingungen über die Vorzeichen der drei Zahlen aussagen?

Es gelten weiter folgende Aussagen:

(4) Subtrahiert man die dritte von der ersten Zahl, dann erhält man die zweite.

(5) Bildet man den Kehrwert der drei Zahlen, dann erhält man drei ganze Zahlen.

(6) Die Summe aller drei Zahlen beträgt $-\frac{1}{3}$. Dieses Ergebnis erhält man auch, wenn man die zweite durch die dritte Zahl teilt.

b) Ermittle alle Tripel rationaler Zahlen, welche die Bedingungen (1 – 6) gleichzeitig erfüllen! (6 Pkt.)

Hinweise zu den Aufgaben:

In Aufgabe 1 geht es um das Lösen linearer Kongruenzen. Hinweise dazu findet ihr im beiliegenden Arbeitsmaterial „Rechnen mit Resten – Teil 2“. Dieses Thema haben wir auch zum ersten Arbeitstreffen besprochen.

In Aufgabe 2 geht es um das Lösen einer Parametergleichung. Hinter einer solchen Gleichung verbirgt sich eigentlich eine ganze Schar von Gleichungen. Im Teil a) der Aufgabe sollst du zunächst drei spezielle Gleichungen aus dieser Schar betrachten und jeweils lösen. Du wirst feststellen, dass jedesmal etwa dieselben Umformungen auszuführen sind. Vergiss die Probe nicht! Im Teil b) sollst du dann die Umformungen für „beliebiges, aber festes p“ (wie die Mathematiker sagen) beschreiben, also das „Rezept“ angeben, nach welchem die verschiedenen Aufgaben aus a) gerechnet worden sind. Beachte, dass es einige Werte von p geben kann, wo *nicht* nach Rezept gerechnet werden kann, weil z.B. durch Null geteilt würde. Welche Werte p sind solche Ausnahmen? Für diese Werte von p musst du gesonderte „Rezepte“ finden.

In Aufgabe 3 und 4 geht es um Teilbarkeitsaussagen. Zu Aufgabe 3 ist bereits oben ein Hinweis gegeben. Eine einfache Fallunterscheidung wie die hier erforderliche kann am besten in Tabellenform aufgeschrieben werden. Für Aufgabe 4 gebe ich den Hinweis, dass eine Zahl genau dann durch 12 teilbar ist, wenn sie durch 3 und durch 4 teilbar ist. Du kannst die Aufgabe also schnell in zwei Teilaufgaben zerlegen.

Zu Aufgabe 5, denke ich, sind keine weiteren Hinweise erforderlich.

Eure Lösungen zu diesen Aufgaben könnt ihr **bis zum 15.12.2008** einschicken an die Adresse

Prof. H.-G. Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig.

Viel Spaß und Erfolg beim Lösen der Aufgaben wünscht Euch

Dr. H.-G. Gräbe.