

Korrespondenz-Seminar 2008/09 der LSGM Klasse 8 – Aufgabenserie 1

Bitte beachtet auch das Informationsblatt sowie die Hinweise zu den Aufgaben weiter unten!

1. Beweise mit Hilfe des Dirichletschen Schubfachprinzips:

- a) Unter 40 ganzen Zahlen kann man stets mindestens zwei finden, deren Differenz durch 39 teilbar ist. (2 Pkt.)
- b) Eine Schießscheibe habe die Form eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 3 cm. Sie werde zehnmal getroffen.
Wie groß kann der kleinste Abstand a zwischen zwei Einschusslöcher, die alle gut zu unterscheiden sind, höchstens sein?
Verallgemeinere deine Antwort, wenn die Seitenlänge nicht 3 cm, sondern 25 cm (allgemein: n cm) beträgt. (4 Pkt.)

Hinweis: Im Teil b) sind zwei Aussagen zu beweisen:

- (b₁) Der kleinste Abstand kann in keinem Fall *größer* als a sein. Versuche, einen Beweis mit dem Schubfachprinzip zu finden.
- (b₂) Es gibt eine Konfiguration, in welcher der kleinste Abstand *gleich* a ist. Gib am besten eine entsprechende Konfiguration von Einschusslöchern an.

2.

- a) Beweise: Wenn $x, y > 0$ und $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$ gilt, dann gilt auch $3\sqrt{xy} \geq 2$. (3 Pkt.)
- b) Beweise: Wenn $a, b, c > 0$ gilt, dann gilt auch $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$. (3 Pkt.)

Gib für jede der beiden Aufgaben an, wann das Gleichheitszeichen gilt!

3. Ermittle alle Primzahlen p , für die $q = 20p^2 + 1$ ebenfalls eine Primzahl ist. (6 Pkt.)

4. Vier Freunde A, B, C und D verstecken einen Brief, indem ihn einer von ihnen an sich nimmt. Anschließend macht jeder von ihnen die folgenden drei Aussagen, von denen wenigstens je zwei wahr sind.

- (A) 1. Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn C.
2. Ich habe den Brief nicht.
3. Mein Freund hat den Brief.

- (B) 1. Entweder A oder C hat den Brief.
 2. Alle Aussagen von A sind wahr.
 3. D hat den Brief nicht.
- (C) 1. Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn B.
 2. Ich habe den Brief.
 3. B macht keine falschen Aussagen.
- (D) 1. Ich habe den Brief nicht.
 2. Entweder A hat den Brief oder er hat ihn nicht.
 3. B hat sich das Spiel ausgedacht.

Weise nach, dass sich aus diesen Angaben der Besitzer des Briefs eindeutig ermitteln lässt und gib den Besitzer an. (6 Pkt.)

5.

- a) Ermittle alle rationalen Zahlen x , für die gilt (2 Pkt.)

$$\frac{2x}{x-1} + 2 + \frac{1}{x-1} = 4 - \frac{3(x+1)}{x-1}.$$

- b) Ermittle alle rationalen Zahlen x , für die $\frac{7}{x-3} \leq 4$ gilt. (2 Pkt.)

- c) Zerlege den Ausdruck $12a^2c - 12abc + 3b^2c$ so weit wie möglich in Faktoren. Wende dabei die binomischen Formeln an! (2 Pkt.)

Hinweise zu den Aufgaben:

Aufgabe 1 lässt sich mit dem Dirichletschen Schubfachprinzip lösen. Lies dazu auch das Arbeitsblatt zum Schubfachprinzip und versuche, diesen Ansatz richtig auf die gegebene Situation zu übertragen. Aufgabe 2, 3 und 5 knüpfen an Themen an (Beweisen von Ungleichungen, Rechnen mit Resten, Umformen von Termen), die bereits im Seminar der Klasse 7 eine Rolle gespielt haben. Auch dazu habe ich zwei Arbeitsmaterialien beigelegt. Aufgabe 4 ist eine Logikaufgabe, die am besten durch eine vollständige Fallunterscheidung gelöst werden kann.

Lösungen zu diesen Aufgaben könnt ihr **bis zum 15. Oktober 2008** einschicken an

Dr. H.-G. Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig.

Zur erfolgreichen Arbeit gehören in guter Tradition **Arbeitstreffen**, welche etwa einmal pro Quartal geplant sind.

Das **erste Arbeitstreffen** wird am 8. 11. 2008 stattfinden. Wir treffen uns um 9:00 Uhr vor dem Städtischen Kaufhaus, Universitätsstraße 16. Unser Arbeitstreffen (wie immer bis 12 Uhr) wird dort im Raum 2-06 stattfinden. **Bitte teile mir rechtzeitig mit, ob du am Arbeitstreffen teilnimmst.**

Für die aktive Teilnahme am Seminar und den Arbeitstreffen ist eine **Anmeldung** erforderlich. Das Anmeldeformular schicke ich mit der zweiten Serie heraus.

Viel Spaß und Erfolg beim Lösen der Aufgaben wünscht Euch

Dr. H.-G. Gräbe.