Bericht vom
1. Leipziger Seminar am 25. November 2006

Das Wythoff-Nim-Spiel

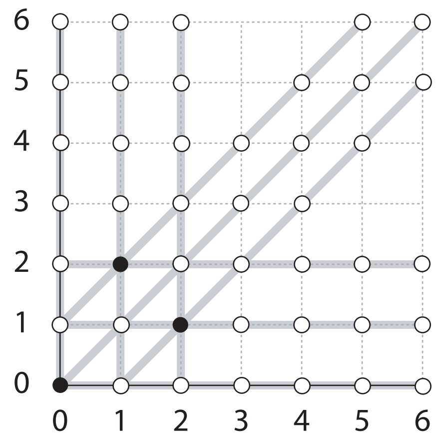
Wir wollen uns ein Spiel für zwei Personen ansehen, welches sich W.A.Wythoff 1907 ausgedacht hat:

> Vor den Spielern liegen zwei Haufen von Spielsteinen. Wie viele Steine am Anfang auf jedem Haufen liegen, kann man z.B. mit zwei oder drei Würfeln bestimmen. Die Spieler nehmen abwechselnd Steine weg, und zwar
>
> | | |
> |---|---|
> | entweder: | von *einem* Haufen *beliebig viele* Steine, |
> | oder: | von *beiden* Haufen *gleich viele* Steine. |
>
> Gewonnen hat derjenige Spieler, der in einem Zug alle verbleibenden Steine nehmen kann.

Wir wollen dieses Spiel genauer analysieren. Dabei interessiert uns, ob bzw. wann es für einen Spieler möglich ist, den Sieg zu erzwingen. Wenn ein Spieler eine solche Gewinnstrategie hat, kann der Gegenspieler ziehen, wie er möchte, doch er wird immer verlieren.
Das einfachste Beispiel sehen wir, wenn schon am Anfang ein Haufen leer ist. Dann kann natürlich immer der Spieler gewinnen, der anfängt, denn er muss nur einfach alle Steine dieses Haufens entfernen. Genauso kann der anziehende Spieler immer gewinnen, wenn am Anfang auf beiden Haufen gleich viele Steine liegen.
Im Weiteren werden wir die Verteilung der Steine auf die Haufen immer durch ein Zahlenpaar angeben. So bedeute z.B. $(0, 5)$, dass ein Haufen leer ist und auf dem anderen 5 Steine liegen. Da wir die Haufen nicht nummerieren, stimmen die Verteilungen $(0, 5)$ und $(5, 0)$ überein. Deshalb wollen wir immer zuerst den kleineren Haufen aufführen, also in diesem Fall immer $(0, 5)$ schreiben.
Wir haben schon festgestellt, dass bei den Verteilungen $(0, n)$ und (n, n) mit $n \in \mathbb{N}$ immer der anziehende Spieler gewinnen kann. Solche Verteilungen nennen wir *Gewinnpositionen*. Doch wie sieht es mit den anderen Verteilungen aus? Unser Ziel ist es, eine allgemeine Vorschrift zu finden – sofern diese existiert – wie man Gewinnpositionen ermitteln kann. Um zu einer Vermutung zu gelangen, ist es jedoch sinnvoll, sich zuerst Beispiele mit kleinen Haufengrößen anzuschauen.

Wir beginnen mit $(1, 2)$. Wie kann der anziehende Spieler ziehen? Er hat drei Möglichkeiten, er kann dem gegnerischen Spieler folgende Verteilungen überlassen: $(0, 2)$, $(1, 1)$ und $(0, 1)$. Doch alle diese drei sind Gewinnpositionen. Das heißt, egal wie der erste Spieler zieht, der zweite kann bei richtigem Spiel immer gewinnen. Deshalb nennen wir eine solche Verteilung eine *Verlustposition*.
Haben wir nun eine Anfangsverteilung, bei der der anziehende Spieler durch einen Zug dem Gegenspieler die Verteilung $(1, 2)$ überlassen kann, ist diese automatisch eine Gewinnposition. Mit welchen Verteilungen kann man innerhalb eines Zuges $(1, 2)$ erreichen? Dies sind recht viele und zwar $(1+n, 2)$, $(1, 2+n)$ und $(1+n, 2+n)$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Wir wollen alles, was wir bis jetzt herausgefunden haben, einmal grafisch mittels eines Koordinatensystems darstellen. Dabei gibt jede Koordinate die Anzahl der Steine eines Haufens an und die Punkte (n, m) und (m, n) gehören wieder zur gleichen Verteilung. Am Anfang haben wir also eine gewisse Verteilung, dargestellt durch einen Gitterpunkt.
Wie sieht denn ein Zug auf dem Gitter aus? Wir könnten von einem Haufen beliebig viele Steine nehmen. Das bedeutet auf dem Gitter, dass wir unseren Punkt parallel zu der x-Achse nach links oder parallel zur y-Achse nach unten bewegen. Die andere Möglichkeit ist, dass wir von beiden Haufen gleich viele Steine entfernen, d.h. wir bewegen den Punkt entlang der Parallen zur Winkelhalbierenden $y = x$ in Richtung Ursprung.



Gewinn- und Verlustpositionen beim Wythoff-Nim

Wie wir schon festgestellt haben, stellt ein Punkt eine Gewinnposition dar, wenn wir ihn durch einen Zug auf eine Verlustposition V (das sind die in der Abbildung schwarz gezeichneten Gitterpunkte) bewegen können. Auf dem Gitter sind dies alle Punkte, die

- auf der waagerechten Gerade durch V rechts von V liegen,
- auf der senkrechten Gerade durch V oberhalb von V liegen oder
- auf der Gerade durch V, die parallel zur Winkelhalbierenden ist, oberhalb rechts von V liegen.

(Siehe Abbildung: Die Gewinnpositionen, die uns bis jetzt bekannt sind, sind durch weiße Punkte dargestellt).

$(3,4)$ ist z.B. keine Verlustpostion: Indem wir von beiden Haufen 2 Steine wegnehmen, können wir die Verlustposition $(1,2)$ herstellen. An der Grafik sieht man das, da $(3,4)$ auf der durch $(1,2)$ verlaufenden zur Winkelhalbierenden parallelen Geraden liegt.
Mit Hilfe dieser Visualisierung sehen wir nun auch sofort, dass auch $(3,5)$ eine Verlustposition ist. Warum? Egal, wie man zieht, man landet immer auf einer der Geraden, d.h. man kann seinem Gegenspieler nur eine Gewinnposition hinterlassen und hat – sofern dieser richtig zieht – keine Chance. Finde auf diesem Wege, die nächsten Verlustpositionen!
Wir wollen nun versuchen eine allgemeine Charakterisierung der Verlustpositionen zu finden. Dazu nummerieren wir diese. $(a_0, b_0) = (0,0)$ sei die nullte, $(a_1, b_1) = (1,2)$ die zweite, $(a_2, b_2) = (3,5)$ die dritte usw. Wie kommen wie nun von einer Verlustposition auf die nächste? Unsere Konstruktion lässt uns folgendes Schema erahnen:

Theorem 1 *Die Verlustpositionen (a_i, b_i) sind durch folgende Eigenschaften charakterisiert:*

$(A0)$ $a_0 = 0,\ b_0 = 0$

$(A1)$ *Für alle $i > 0$ ist a_i die kleinste natürliche Zahl, die unter den Zahlen $a_0, \ldots, a_{i-1}$ und $b_0, \ldots, b_{i-1}$ nicht vorkommt.*

$(A2)$ *Für alle $i > 0$ ist $b_i = a_i + i$*

Alle anderen Verteilungen sind Gewinnpositionen.

Wie konnten wir dieses Schema erahnen? Wir wollen die Verlustpositionen iterativ beschreiben. Dazu benötigen wir eine Anfangsbedingung, also die Verlustposition mit den kleinsten Haufen. Das ist $(0,0)$, also unsere Bedingung $(A0)$.

$(A1)$ stellt sicher, dass jede Zahl in den Verlustpositionshaufen genau einmal vorkommt. Wäre dies nicht der Fall und zwei Verlustpositionen hätten einen Haufen mit gleicher Anzahl von Steinen, kann aus einer Verlustposition – aus der, deren zweiter Haufen größer ist – durch einen Zug die andere erzeugt werden. Doch dies kann nicht sein, wenn beide Verteilungen Verlustpositionen sein sollen.
Zu guter Letzt sichert Bedingung $(A2)$, dass auch jede Zahl in der Folge der Differenzen der Haufengrößen der Verlustpositionen genau einmal vorkommt. Warum ist das wichtig? Überlege selbst, was passiert, wenn zu zwei Verlustpositionen die gleiche Differenz gehört.
Erinnern wir uns auch noch einmal, wie wir die Verlustpositionen (a_i, b_i) im Koordinatensystem gefunden haben. Ist (a_k, b_k), $k < i$, eine schon bekannte Verlustposition, bedeutet Bedinung $(A1)$, dass (a_i, b_i) weder auf der Senkrechten durch den Punkt (a_k, b_k) liegen darf, noch auf der Senkrechten durch den Punkt (b_k, a_k). Allerdings haben wir nicht irgendein mögliches a_i genommen, sondern das kleinstmögliche, genau wie es auch $(A1)$ fordert.
Bedingung $(A2)$ sagt, dass die Punkte für neue Verlustpositionen auf Parallelen zur Winkelhalbierenden $y = x$ liegen müssen, auf denen noch noch keine Punkte von anderen Verlustpositionen liegen. So gehört die Verlustposition $(0, 0)$ zur Gerade $y-x = 0$, die Verlustposition $(1, 2)$ zu $y-x = 1$ und $y-x = -1$, die Verlustposition $(3, 5)$ zu $y - x = \pm 2$ usw.
Jetzt kommt uns dieser Satz vielleicht etwas plausibler vor, aber wir müssen ihn natürlich erst noch beweisen. Doch zuerst sehen wir noch, dass es wesentlich mehr Gewinn- als Verlustpositionen geben wird. Würden wir die Anfangsverteilung zufällig bestimmen, hätte der anziehende Spieler einen klaren Vorteil.

Beweis des Theorems: Da wir erst noch zeigen müssen, dass alle Positionen, die durch (A0) bis (A2) charakterisiert werden, Verlustpositionen sind, nennen wir sie erst einmal *Schlüsselpositionen*. Nun überlegen wir uns erst einmal genau, was wir im Einzelnen alles zeigen müssen:

1. Wir müssen zeigen, dass von einer Schlüsselposition jeder Zug zu einem Punkt führt, der keine Schlüsselposition ist.

2. Wir müssen zeigen, dass es von jeder Nichtschlüsselposition einen Zug zu einer Schlüsselposition gibt.

Zu 1.: Wir befinden uns auf der Schlüsselposition (a_i, b_i) mit $i > 0$. Dabei ist nach $(A2)$ $b_i = a_i - i$. Wir können nun zu folgenden Positionen ziehen: $(a_i - n, b_i)$, $(a_i - n, b_i - n)$ und $(a_i, b_i - n)$ mit $n \in \mathbb{N}$. Nehmen wir zuerst an, dass es ein n gäbe, so dass $(a_i - n, b_i)$ die Schlüsselposition (a_j, b_j) ist. Dann muss $i > j$ sein. Wegen

$a_i - n < b_i$ und $b_i \neq 0$ ist dann nach $(A2)$ $a_i - n + j = b_i$. Mit $b_i = a_i + i$ folgt somit $n = j - i < 0$. Dies ist ein Widerspruch zu $n \in \mathbb{N}$.

Als nächstes betrachten wir $(a_i - n, b_i - n)$ als Schlüsselposition (a_j, b_j). Dies führt auf demselben Weg zu einem Widerspruch. Versuche es selbst! Bei der letzten Möglichkeit $(a_i, b_i - n)$ als j-te Schlüsselposition müssen wir etwas aufpassen. Ist dann immer noch $a_i < b_i - n$, funktioniert wieder dasselbe Argument. Ist jedoch $a_i \geq b_i - n$, wäre dann $a_i = b_j$ und $a_j = b_i - n$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu $(A1)$, denn a_i muss von allen b_k mit $k \leq i$ verschieden sein. Damit sind wir mit dem ersten Schritt fertig, denn egal zu welcher Position wir ziehen, ist diese keine Schlüsselposition.

Zu 2.: Befinden wir uns nun auf einer Nichtschlüsselposition (x, y) mit $x \leq y$. Wegen Bedingung $(A1)$ muss es eine Schlüsselposition (a_i, b_i) mit $a_i = x$ oder $b_i = x$ geben.

1. Fall: Sei $a_i = x$. Wenn $y > b_i$ ist, entfernen wir von diesem Haufen einfach $y - b_i$ Steine und gelangen zu einer Schlüsselposition. Wenn aber $y < b_i$ ist, gilt $i = b_i - a_i = b_i - x > y - x =: j$. Sei (a_j, b_j) die j-te Schlüsselposition, so ist $a_j < a_i = x$ und wir nehmen von beiden Haufen $x - a_j$ Steine weg, um so zur j-ten Schlüsselpostion zu gelangen. Warum kann der Fall $y = b_i$ nicht auftreten?

2. Fall: Sei $b_i = x$. Dann ist $a_i = b_i - i = x - i < x \leq y$. Wie müssen also nur vom Haufen mit y Steinen $y - a_i$ Steine entfernen und landen damit bei der i-ten Schlüsselposition.

Damit haben wir gezeigt, dass wir durch den "richtigen" Zug von einer Nichtschlüsselposition immer eine Schlüsselposition erreichen können. □

Wir haben nun ein Spiel kennen gelernt, für das es eine Gewinnstrategie gibt. Besitzt denn jedes Spiel eine Gewinnstrategie? Die Spieltheorie beschäftigt sich mit solchen Fragen. Das Spiel, welches wir uns ausgesucht haben, ist ein sogenanntes *Spiel mit vollständiger Information*. Das heißt soviel wie: Es gibt keine zufälligen oder verdeckten Elemente und das Spiel ist endlich. Jeder Spieler weiß genau, welche Zugmöglichkeiten der Gegner im nächsten Zug hat und die Spieler ziehen abwechselnd. Der Zweig der Spieltheorie, der sich mit solchen Spielen beschäftigt, heißt *kombinatorische Spieltheorie*. Typische Spiele mit vollständiger Information sind Schach, Go, Mühle, Dame, Vier in einer Reihe und Tic Tac Toe. Dagegen sind Schiffe versenken oder Mau Mau keine Spiele mit vollständiger Information.

Für Spiele mit vollständiger Information gibt es – zumindest theoretisch – für mindestens einen Spieler immer eine Gewinnstrategie oder besser: Nichtverlierstrategie (denn diese kann z.B. wie bei Tic Tac Toe nur auf ein Unentschieden hinauslaufen). Praktisch kann es viel zu schwer oder zu aufwändig sein, so eine Strategie wirklich aufzuschreiben.

Zum Schluß wollen wir Euch noch einige Spiele vorstellen, an denen ihr allein versuchen könnt, eine Gewinnstrategie zu finden:

Spiel 1 *Zwei Spieler haben eine Tafel Schokolade der Größe* $m \times n$*. In einem Eckstück befindet sich eine Rosine. Nun brechen die Spieler abwechselnd ein Teil der Tafel ab. Aber die Brüche gehen immer durch die gesamte Tafel und immer entlang der Sollbruchstellen. Verloren hat der, wer das Rosinenstück nehmen muss. Gezogen (bzw. abgebrochen) wird abwechselnd.*

Spiel 2 (Klassisches Nim) *Gegeben ist ein Haufen von 13 Streichhölzern. Abwechselnd nehmen zwei Personen 1, 2 oder 3 Streichhölzer. Derjenige, der den Haufen leerräumt, hat gewonnen.*

Spiel 3 (Tic Tac Toe) *Tic Tac Toe ist ein Spiel für zwei Spieler auf einem* 3×3 *Brett. Die Spieler besetzen abwechselnd ein Feld, klassischerweise malt der eine einen Kreis hinein und der andere ein Kreuz. Es gewinnt derjenige Spieler, der zuerst drei seiner Symbole in einer Reihe, Spalte bzw. Diagonale hat. Überlege dir, wie man bei Tic Tac Toe immer ein Unentschieden erzwingen kann.*

Formulierungsecke – Artikel?

Wie ändert sich die Bedeutung des folgenden Satzes, wenn man den Artikel „die“ weglässt?

Seien a, b und c die Elemente der Menge M.

Welcher Artikel gehört hier hin, ein bestimmter oder ein unbestimmter?

- ____ leere Menge
- ____ Kreis durch die Punkte A und B
- ____ Kreis durch drei nichtkollineare Punkte

Erklärung

Es heißt **die** leere Menge, aber **eine** nicht-leere Menge. Man sagt **der** Kreis durch nichtkollineare Punkte, aber **ein** Kreis durch die Punkte A und B. Warum?
Den bestimmten Artikel benutzt man nur dann, wenn die zu bestimmende Sache eindeutig bestimmt ist. Es gibt nur eine leere Menge und durch drei nichtkollineare Punkte existiert nur ein Kreis. Dahingegen gibt es unendlich viele nicht-leere Mengen. Der Ausdruck *die nicht-leere Menge* ergibt also nur dann Sinn, wenn wir diese Menge noch irgendwie so auszeichnen, dass sie eindeutig bestimmt ist, z.B. *die nicht-leere Menge der Kreise durch zwei gegebene Punkte.*
Manchmal ist es gar nicht von vornherein klar, dass das fragliche Objekt eindeutig bestimmt ist. In diesem Fall sagen wir zumeist erst ëinünd nachdem wir die Eindeutigkeit bewiesen haben, können wir zum bestimmten Artikel übergehen. Ein einfaches Beispiel ist: Durch Einsetzen sehen wir, dass 5 **eine** Lösung der Gleichung $x^3 - 15x^2 + 75x - 125 = 0$ ist. Da $(x-5)^3 = x^3 - 15x^2 + 75x - 125$ ist, ist 5 sogar die einzige Lösung. Wir können also sagen: 5 ist **die** Lösung dieser Gleichung.
Wie die Verwendung bzw. das Weglassen des Artikels den Sinn eines Satzes ändern kann, sehen wir am Beispiel *Seien a, b und c die Elemente der Menge M.* Durch den bestimmten Artikel wissen wir, dass die Menge M die Elemente a, b, c aber keine weiteren enthält. Ohne diesen Artikel wüssten wir nur, dass a, b, c in M liegen. Dies können alle sein, genauso gut aber kann es noch unendlich viele weitere geben.

Anworten auf alle Fragen und Lösungen zu den Aufgaben, die offen geblieben sind, könnt Ihr uns gern zuschicken. Am besten an

Andreas Nareike
Eilenburger Straße 51
04509 Delitzsch

oder per E-Mail an

`nadgr@gmx.de` oder `andreas.nareike@gmx.net`

Natürlich nehmen wir auch Eure Fragen, Ideen und Anregungen zu diesen oder anderen Themen gern entgegen.

Nadine Große und Andreas Nareike