Leipziger SchülerGesellschaft
für Mathematik
http://lsgm.uni-leipzig.de

Prof. Hans-Gert Gräbe, Institut f. Informatik, Univ. Leipzig, 04009 Leipzig
email: graebe@informatik.uni-leipzig.de

Korrespondenz-Seminar 2006/07 der LSGM
Klasse 8 – Aufgabenserie 4

1. Ermittle alle geordneten Pare $(x; y)$ ganzer Zahlen, welche folgende Gleichung erfüllen:

a) $143\,x + 77\,y = 297$

b) $187\,x + 221\,y = 247$

c) $522\,x - 1422\,y = 774\,.$ (je 2 Pkt.)

2. Beweise die folgenden Sätze indirekt: (je 3 Pkt.)

a) Es gibt kein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen a, b und der Hypotenusenlänge c, für welches $\sqrt{2} \cdot c < a + b$ gilt.

b) Eine natürliche Zahl, welche genau 300 mal die Ziffer 1 und sonst nur noch beliebig oft die Ziffer 0 in ihrer Dezimaldarstellung enthält, kann keine Quadratzahl sein.

3. Gegeben sei ein Würfel $ABCDEFGH$ mit der Grundfläche $ABCD$, der Deckfläche $EFGH$, einer Seitenfläche $BCGF$ und der Kantenlänge a. Durch die Punkte A und F, A und H sowie F und H seien drei ebene Schnitte so gelegt, dass sie jeweils parallel zur Raumdiagonalen CE verlaufen. Durch diese Schnitte werden drei Teilkörper vom Würfel abgetrennt.

Berechne das Volumen des verbliebenen Restkörpers. (6 Pkt.)

4. Es sei k ein Kreis um den Mittelpunkt M, auf dessen Peripherie die Punkte A, B, C, D in dieser Reihenfolge so liegen, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) $\overline{AB}$ ist Durchmesser von k.

(2) Die Strecken $\overline{BD}$ und $\overline{AM}$ haben die gleiche Länge.

(3) Die Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ haben die gleiche Länge.

Zeige, dass aus diesen Angaben die Größen der Innenwinkel des Vierecks $ABCD$ eindeutig bestimmt sind und gib diese Innenwinkelgrößen an. (6 Pkt.)

5. Das Kryptogramm

$$\begin{array}{cccccc} & P & R & O & S & T \\ - & & & N & E & U \\ \hline & & J & A & H & R \end{array}$$

enthält genau 11 verschiedene Variable, die mit den zehn Ziffern $0, 1, 2, \ldots, 9$ so zu belegen sind, dass jede dieser Ziffern mindestens einmal vorkommt und eine korrekte Subtraktionsaufgabe entsteht. Es sei weiter bekannt, dass die Ziffern E und H bei der Angabe des Silvesterdatums 31. 12. 2006 (ich habe das mal aktualisiert) benötigt werden.

Ermittle alle Belegungen des Kryptogramms, welche diese Bedingungen erfüllen. (6 Pkt.)

Hinweise zu den Aufgaben:

In Aufgabe 1 gilt es, lineare diophantische Gleichungen zu lösen. Das Vorgehen bei solchen Aufgaben haben wir zum Arbeitstreffen am 27. 01. besprochen. Lies dazu bitte auch noch einmal das beiliegende Arbeitsblatt.

In Aufgabe 2 ist die Methode des indirekten Beweises anzuwenden, die sich auf folgende Kurzformel bringen lässt: Der mathematische Satz „*Wenn (A), dann (B)*“ wird bewiesen, indem „*Wenn (A) und (nicht B), dann Widerspruch*“ gezeigt wird – wobei die Teile in den Klammern durch die jeweiligen Aussagen zu ersetzen sind. Ein solcher Beweis beginnt also mit dem Satz „*Nehmen wir an, es gilt (A) und (nicht B)*“ und endet mit dem Satz „*Dies ist ein Widerspruch*“. Identifiziere zunächst die konkreten Aussagen (A) und (B) und halte dich beim Aufschreiben der Lösung an dieses Grundschema.

Für Aufgabe 3 benötigst du Formeln zur Berechnung des Volumens von Quadern und dreiseitigen Pyramiden (also Tetraedern), während für Aufgabe 4 Sätze über Winkel am Kreis hilfreich sind.

Aufgabe 5 (in der Originalversion) ist schon etwas älter. Du kannst sie auch in der hier angegebenen alternativen Version mit dem Datum 31.12.2006 bearbeiten. Beachte, dass es nicht nur darum geht, eine Lösung zu finden, sondern auch (und sogar vorrangig) um das Aufschreiben dieser Lösung in einer möglichst knappen und doch wasserdichten Schlusskette.

Lösungen zu diesen Aufgaben kannst du **bis zum 1. März 2007** einschicken wie immer an

Prof. H.-G. Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig.

Viel Spaß und Erfolg beim Lösen der Aufgaben wünscht dir

Prof. H.-G. Gräbe.