Korrespondenz-Seminar der LSGM 2006/7

Klasse 7, Serie 5

Aufgabe 1 a) Gegeben seien zwei natürliche Zahlen a und b. Bei der Division durch 7 lässt a den Rest 5 und b den Rest 3.
Welchen Rest lässt dann die Summe der Quadrate dieser Zahlen bei der Division durch 7?

b) Ermittle alle natürlichen Zahlen t, für die gilt: Wenn a und b natürliche Zahlen sind, wobei a bei der Division durch 24 den Rest 7 lässt und b den Rest 5 lässt, dann ist t ein Teiler der Differenz der Quadrate dieser Zahlen a und b.

Hinweis. Verwende das Rechnen mit Kongruenzen.

Aufgabe 2 Vom Diagonalenschnittpunkt M eines Rhombus $ABCD$ werden die Lote auf die Seiten gefällt.

a) Beweise, dass die Fußpunkte dieser Lote ein Rechteck bilden.
b) In welchem Fall bilden die Lotfußpunkte ein Quadrat? Beweise deine Vermutung.

Hinweis. Lies dazu in „Sätze“ auf Seite 5 den Abschnitt V (Vierecke).

Aufgabe 3 a) Was lässt sich über das Produkt von vier beliebigen natürlichen Zahlen sagen, wenn ihre Summe eine ungerade Zahl ist? Finde eine Vermutung und beweise sie.

b) Suche nach einer wahren Verallgemeinerung des gefundenen Satzes indem du die Voraussetzung, dass es sich um *vier* natürliche Zahlen handelt, geeignet abschwächst.

Hinweis. Lies dazu im „Arbeitsmaterial“ den Abschnitt 1.2.3 (Verallgemeinern und Spezialisieren von Sätzen).

Aufgabe 4 Berechne und vereinfache so weit, wie möglich! Versuche vor allem, vorkommende Summen oder Differenzen in Faktoren zu zerlegen, um dann kürzen zu können. Das Auflösen der Klasmmern führt hier nicht zum Ziel. Achte auf Rechenvorteile.

$$\text{a)}\quad \frac{(7a+7b)(6a^2-6b^2)}{(3a^2+6ab+3b^2)(14a-14b)} =$$

$$\text{b)}\quad \left(\frac{x+y}{2x-3y} - \frac{x+y}{2x+3y}\right) : \frac{3x^2-3y^2}{4x^2-9y^2} =$$

Hinweis. Lies dazu im „Arbeitsmaterial“ im Abschnitt 4.3 (Einige wichtige Gleichungen und Ungleichungen) den „Satz“, den „Beweis“ und die „Beispiele“. Beachte dabei vor allem das Umwandeln von Summen in Produkte durch Ausklammern und das Anwenden der binomischen Formeln.

Aufgabe 5 Es seien x und y zwei rationale Zahlen. Verkleinert man x auf 75%, dann erhält man 225. Vergrößert man y um 20%, dann erhält man ebenfalls 225.

a) Berechne x und y.
b) Wie viel Prozent von x beträgt y?
c) Um wie viel Prozent muss man y vergrößern um x zu erhalten?
d) Auf wie viel Prozent muss man x verkleinern, so dass $x + y = 225$ gilt?