Bericht vom
1. Leipziger Seminar am 5. November 2005

Der Eulersche Satz und die Eulersche Phi-Funktion

Wir wollen einen berühmten Satz der Zahlentheorie behandeln, den Eulerschen Satz. Dazu müssen wir etwas mit Kongruenzen umgehen können. Kongruenzrechnung ist im Prinzip das Rechnen mit der Division mit Rest. Für alle, die das noch nicht können oder mit der Schreibweise noch nicht so vertraut sind, sei hier auf den Seminarbericht des ersten Leipziger Seminars des letzten Jahres hingewiesen. Dieser ist zu finden unter:

http://lsgm.uni-leipzig.de/KorrespondenzSeminar/Klasse-9/lesem1.pdf

Wir beginnen aber mit einem anderen Satz der Zahlentheorie:

Der kleine Satz von Fermat
Sei p eine Primzahl und a eine natürliche Zahl mit $\mathrm{ggT}(p, a) = 1$. Dann gilt

$$a^{p-1} \equiv 1 \mod p$$

Bemerkung: Ist p keine Primzahl, gilt dieser Satz so nicht, z.B. $3^3 \equiv 3 \mod 4$. Aber es gibt eine Verallgemeinerung: *der Eulersche Satz.* Aus diesem folgt der kleine Satz von Fermat als Spezialfall. Trotzdem soll hier unabhängig davon ein Beweis für obigen Satz gegeben werden, da er eine sehr schöne Anschauung liefert.

Beweis: Wir haben Perlen mit a verschiedenen Farben und bilden alle möglichen Perlenketten der Länge p. Davon gibt es a^p (es seien von jeder Farbe genügend Perlen vorhanden). Die einfarbigen Ketten werfen wir weg. Bleiben $a^p - a$ Ketten übrig aus denen wir Ringe bilden.
Wir wollen nun zeigen, dass jeder Ring genau p mal vorkommt:
Ein gegebener Ring kann an p Stellen zu einer Kette aufgeschnitten werden. Gebe es eine Periodizität in den Farben des Ringes würden zwei der entstehenden Ketten identisch sein, d.h. umgekehrt gäbe es einen Ring, der weniger als p mal vorkommt. Da p eine Primzahl ist, ist die einzig mögliche Periode die Eins, also einfarbige Ketten. Diese wurden jedoch schon ausgeschlossen. Also kommt jeder Ring p mal vor, d.h.

$$a^p - a \equiv 0 \mod p$$

und wegen ggT $(a, p) = 1$ können wir dividieren und es folgt die Behauptung. $\square$

Bevor wir nun zum Eulerschen Satz kommen können, müssen wir erst noch die Eulersche Phi-Funktion behandeln.

Definition Sei n eine natürliche Zahl. Dann ist die *Eulersche Phi-Funktion* gegeben durch

$$\phi(n) = \text{Anzahl der Zahlen } m \leq n \text{ mit } \mathrm{ggT}(n,m) = 1.$$

Wir berechnen zuerst einige Beispiele:
1. $n = 10$. Die zu 10 teilerfremden Zahlen, die kleiner als 10 sind, lauten: $\{1, 3, 7, 9\}$, d.h. $\phi(10) = 4$.
2. $n = 5$. Hier ist die Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ und damit $\phi(5) = 4$.

Am zweiten Beispiel sehen wir sofort eine erste Eigenschaft der ϕ-Funktion: Ist p eine Primzahl, so gilt $\phi(p) = p-1$, weil alle Zahlen von 1 bis $p-1$ zu p teilerfremd sind.

Doch was können wir über $\phi(p^k)$ mit $k \in \mathbb{N}$ sagen? Nur die Vielfachen von p, also $p, 2p, 3p, \ldots, p^{k-1}p$ sind nicht zu p^k teilerfremd. Somit haben wir $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$.

Da nach dem Fundamentalsatz der Arithmetik jede natürliche Zahl eindeutig (bis auf die Reihenfolge) als ein Produkt von Primfaktoren geschrieben werden kann, können wir versuchen, ob wir $\phi(ab)$ aus $\phi(a)$ und $\phi(b)$ bestimmen können. Wenn a und b teilerfremd sind, ist das tatsächlich möglich und es gilt:

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) \text{ für } \mathrm{ggT}(a,b) = 1.$$

Wie schon bei $\phi(p^k)$ werden wir dies beweisen, indem wir nicht die teilerfremden Zahlen zählen, sondern die Komplementärmenge, d.h. alle Zahlen kleiner gleich n, die mit n einen gemeinsamen Teiler haben. Diese Anzahl bezeichnen wir mit $\psi(n)$. Offensichtlich gilt $\phi(n) + \psi(n) = n$. Wir wollen nun $\psi(ab)$ bestimmen. Hat eine Zahl einen gemeinsamen Teiler mit ab, so können die folgenden drei Fälle auftreten:

1. Der Teiler ist auch ein Teiler von b (und damit wegen der Teilerfremdheit von a und b teilerfremd zu a), dafür gibt es $\psi(b)\phi(a)$ Möglichkeiten.

2. Der Teiler ist auch ein Teiler von a (und damit teilerfremd zu b), also $\psi(a)\phi(b)$ Möglichkeiten.

3. Der Teiler setzt sich aus einem Teiler von a und einem von b zusammen, d.h. $\psi(b)\psi(a)$ Möglichkeiten.

Insgesamt gilt:

$$\begin{aligned}\psi(ab) &= \psi(b)\phi(a) + \psi(a)\phi(b) + \psi(a)\psi(b) \\ &= (\psi(b) + \phi(b))(\psi(a) + \phi(a)) - \phi(a)\phi(b).\end{aligned}$$

Also folgt $\psi(ab) + \phi(a)\phi(b) = ab$ und daraus $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$.

Nun haben wir alles Nötige beisammen, um allgemein $\phi(n)$ zu berechnen. Sei dazu $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ die Primfaktorzerlegung von n. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\phi(n) &= \phi(p_1^{\alpha_1})\phi(p_2^{\alpha_2}) \cdots \phi(p_r^{\alpha_r}) && \text{(da die } p_i \text{ teilerfremd sind)} \\ &= (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}) \cdots (p_1^{\alpha_1} - p_r^{\alpha_r - 1}) \\ &= n(1 - \tfrac{1}{p_1}) \cdots (1 - \tfrac{1}{p_r}).\end{aligned}$$

Berechnen wir noch einmal $\phi(10)$ aber dieses Mal mittels obiger Formel, so erhalten wir: $\phi(10) = 10(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{5}) = 4$.

Mittels der ϕ-Funktion können wir nun den Eulerschen Satz formulieren:

Der Eulersche Satz

Seien a und n zwei teilerfremde natürliche Zahlen. Dann gilt

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \mod n.$$

Bemerkung: Der Spezialfall, dass n eine Primzahl ist, ergibt mit $\phi(n) = n - 1$, wie schon eingangs erwähnt, den kleinen Satz von Fermat.

Beweis: Wir betrachten das *reduzierte Restesystem modulo n*, gegeben durch $\{x_1, \ldots, x_{\phi(n)}\}$. Diese Menge enthält genau alle Reste, die zu n teilerfremd sind. $\{1, 3, 7, 9\}$ ist z.B. das reduzierte Restesystem modulo 10. Wenn wir die einzelnen Reste x_i mit a ($\mathrm{ggT}(a, n) = 1$) multiplizieren, so bildet die Menge wieder ein reduziertes Restesystem modulo n (Beispiel: $a = 3$ und $n = 10$. Dann ist $\{1 \cdot 3 \equiv 3, 3 \cdot 3 \equiv 9, 7 \cdot 3 \equiv 1, 9 \cdot 3 \equiv 7\}$ wieder $\{1, 3, 7, 9\}$). Wir liefern zuerst den Beweis dieser Aussage: Dazu reicht es zu zeigen, dass die Menge $\{a \cdot x_1, \ldots, a \cdot x_{\phi(n)}\}$
a) nur aus Elementen besteht, die zu n teilerfremd sind,
b) für $i \neq j$ die Elemente $a \cdot x_i$ und $a \cdot x_j$ auch wirklich verschieden sind.

Dies ist ausreichend, da wir dann aufgrund der richtigen Mächtigkeit der Menge, nämlich genau $\phi(n)$, auch wirklich alle zu n teilerfremden Reste gefunden haben.

zu a) Da sowohl das Paar (a, n) als auch alle Paare (x_i, n) mit $i = 1, \ldots, \phi(n)$ teilerfremd sind, sind auch $a \cdot x_i$ und n für alle i teilerfremd.

zu b) Nehmen wir an es gelte $a \cdot x_i \equiv a \cdot x_j \mod n$. Mit $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$ folgt sofort $x_i \equiv x_j \mod n$, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht.

Nachdem wir jetzt wissen, dass die Mengen $\{x_1, \dots, x_{\phi(n)}\}$ und $\{a \cdot x_1, \dots, a \cdot x_{\phi(n)}\}$ modulo n die gleichen Restklassen enthalten, haben wir:

$$ax_1 \cdot ax_2 \cdots ax_{\phi(n)} \equiv x_1 \cdot x_2 \cdots x_{\phi(n)} \mod n$$

Da jedes x_i zu n teilerfremd ist, dürfen wir auf beiden Seiten durch x_i dividieren und erhalten

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \mod n. \quad \square$$

Dieser Satz bietet z.B. große Vorteile im Ausrechnen von Kongruenzen. Suchen wir z.B. die letzten beiden Ziffern, das entspricht dem Rest modulo 100, von 7^{325}. Dazu berechnen wir zuerst $\phi(100) = 40$ und nach dem Eulerschen Satz wissen wir, dass gilt: $7^{40} \equiv 1 \mod 100$. Damit haben wir

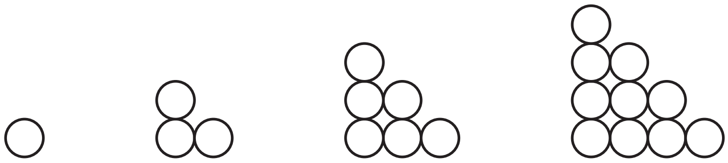
$$7^{325} \equiv 7^{8 \cdot 40 + 5} \equiv (7^{40})^8 7^5 \equiv 7^5 \equiv 7 \mod 100.$$

Aber wie wir an diesem Beispiel sehen können, muss $\phi(n)$ nicht die kleinste Zahl m sein, für die gilt $a^m \equiv 1 \mod n$. Für $a = 7$ und $n = 100$ liefert schon $m = 4$ eine Lösung.

Aufgabe: Berechne 3^{123} modulo 256, 8^{435} modulo 11 und 12^{456} modulo 26. (Beachte, dass 12 und 26 nicht teilerfremd sind. Wie kann man hier den Eulerschen Satz nutzen?)

Geometrische Zahlen

In diesem Teil geht es um geometrische Zahlen, die auch „figurative“ Zahlen genannt werden. Die Idee dabei ist, dass man Zahlen als bestimmte geometrische Figuren darstellt. Mit diesen Figuren kann man dann neue zusammenlegen und aus diesen Formeln ableiten. Wir schauen uns gleich ein Beispiel an. Dazu betrachten wir die sogenannten **Dreieckszahlen**, die angeben, wie viele Punkte (Kreise, Münzen, Bierdeckel) man braucht, um solche Dreiecke wie die folgenden zu bilden:



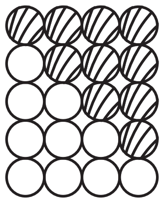
Dreieckszahlen

Um z.B. ein Dreieck mit einer Seitenlänge von drei Punkten zu legen, benötigen wir insgesamt sechs Punkte. Wir bezeichnen mit D_n für $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Punkte, die wir für ein Dreieck mit einer Seitenlänge von n Punkten benötigen. Unmittelbar aus dem Bild können wir schon einige Dreieckszahlen ablesen:

$$D_1 = 1 \qquad D_2 = 3 \qquad D_3 = 6 \qquad D_4 = 10$$

Der Einfachheit halber bezeichnen wir auch die Dreiecke in der Abbildung der Reihe nach mit $D_1, \dots D_4$ bzw. allgemein mit D_n.

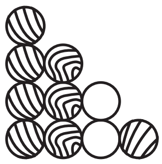
Wie groß ist die n-te Dreieckszahl? Wir bemerken, dass wir zwei Exemplare von D_n zu einem Rechteck mit den Seitenlänge n und $n+1$ zusammenlegen können, so dass wir folgende Formel für die n-te Dreieckszahl erhalten:



Zwei D_n

$$D_n = \frac{1}{2}n(n+1) \tag{1}$$

Alternativ können wir D_n auch aus n Streifen von $1, 2, 3, \dots, n$ Punkten bilden, d.h.



D_n in Streifen

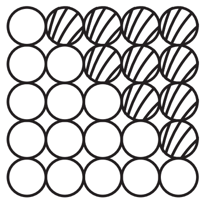
$$D_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

Indem wir dies mit Formel (1) kombinieren, haben wir also einen geometrischen Beweis für die Gaußsche Summenformel gefunden:

$$\sum_{i=1}^{n} i = D_n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

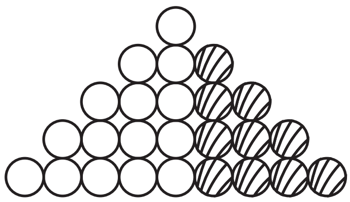
Als nächstes sehen wir, dass wir aus D_n und D_{n-1} ein Quadrat legen können, was uns sofort auf folgende Formel führt:

$$D_n + D_{n+1} = n^2$$



$D_n + D_{n-1}$

Andererseits können wir uns die Summe von D_n und D_{n-1} auch wie folgt veranschaulichen:

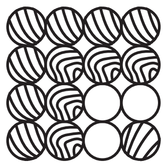


Eine andere Darstellung für $D_n + D_{n-1}$

Zusammen mit der Formel aus der ersten Darstellung für $D_n + D_{n-1}$ erhalten wir:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} n^2 & = & D_n + D_{n-1} & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & n \\ & & & & & + & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & (n-1) \\ & & & = & 1 & + & 3 & + & 5 & + & \ldots & + & (2n-1) \end{array}$$

D.h. also in Worten: die n-te Quadratzahl ergibt sich als Summe der ersten n ungeraden Zahlen. Dies können wir auch einsehen, indem wir ein Quadrat in Haken aus $1, 3, 5, \ldots$ Punkten zerlegen, wie es rechts im Bild zu sehen ist.



n^2 in Haken

Aufgabe 1 *Beweise die Formel $D_n + D_{n-1} = n^2$ direkt durch Einsetzen der „Dreiecksformel“ (1), die wir oben gefunden haben.*

Aufgabe 2 *Beweise durch Rückgriff auf die Formel (1) folgendes „Additionstheorem“:*

$$D_{m+n} = D_m + D_n + mn$$

Wie kann man diesen Zusammenhang geometrisch veranschaulichen?

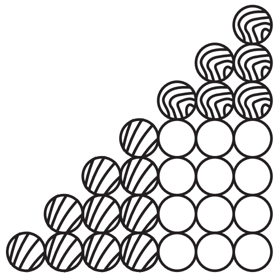
Lösung: Die Rechnung ist leicht ausgeführt, wir beginnen auf der rechten Seite:

$$D_m + D_n + mn = \frac{1}{2}m(m+1) + \frac{1}{2}n(n+1) + mn$$

$$= \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + mn = \frac{1}{2}(m^2 + 2mn + n^2) + \frac{1}{2}(m+n)$$

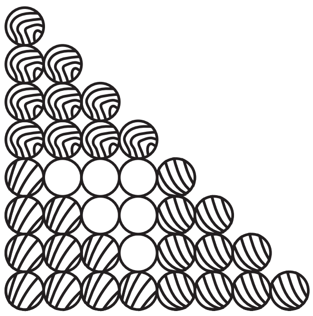
$$= \frac{1}{2}(m+n)^2 + \frac{1}{2}(m+n) = \frac{1}{2}(m+n)((m+n)+1) = D_{m+n}$$

Um eine geometrische Veranschaulichung der Aussage zu bekommen, zerlegen wir die Dreieckszahl D_{m+n} in die beiden kleineren Dreiecke D_m und D_n, sowie ein Rechteck mit den Seitenlängen m und n, wie es in der nebenstehenden Abbilung zu sehen ist.

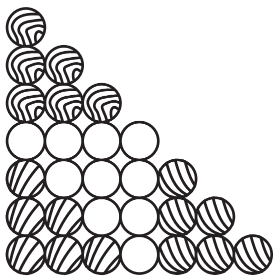


$D_{m+n} = D_m + D_n + mn$

Aufgabe 3 *In den beiden folgenden Abbildungen sind Zerlegungen von D_{2n} und D_{2n+1} in vier kleinere Dreieckszahlen zu sehen. Welche Formeln kann man daraus ableiten? Beweise diese Formeln auch mit Hilfe von Formel* (1)*.*



D_{2n}

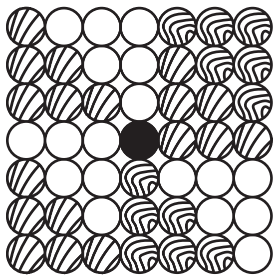


D_{2n+1}

Schließlich betrachten wir noch folgende Gleichung:

$$8D_n + 1 = (2n+1)^2 \tag{2}$$

Ein arithmetischer Beweis ergibt sich wieder einfach aus der Dreiecksformel (1). Die geometrische Veranschaulichung ist rechts zu sehen. Aus dieser Zerlegung ergibt sich aber noch ein interessanter Fakt, den wir in folgender Aufgabe diskutieren.



$8D_n + 1 = (2n+1)^2$

Aufgabe 4 *Sei $D_n = m^2$ für $m \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann gilt:*

$$D_{4n(n+1)} = D_{8D_n} = (2m(2n+1))^2$$

Wir wissen aber, dass $D_n = 1 = 1^2$ ist. Welche Schlußfolgerung können wir damit aus obiger Gleichung ziehen?

Lösung: Es ist direkt aus (1) ist ersichtlich, dass $D_{4n(n+1)} = D_{8D_n}$ gilt. Wir schließen nun weiter mit Hilfe der letzten Gleichung:

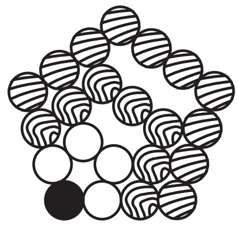
$$D_{8D_n} \underset{(1)}{=} 4D_n(8D_n+1) = 4m^2(8D_n+1) \underset{(2)}{=} 4m^2(2n+1)^2 = (2m(2n+1))^2$$

Insbesondere besagt diese Formel in Worten folgendes: Wenn die Dreieckszahl D_n eine Quadratzahl ist (eine „quadratische Dreieckszahl“), so ist auch $D_{4n(n+1)}$ eine Quadratzahl. Da wir bereits eine quadratische Dreieckszahl kennen, können wir mit dieser Formel nun beliebig viele weitere berechnen. Aus $D_n = 1 = 1^2$ erhalten wir, dass D_8 eine Quadratzahl ist, was wir unmittelbar bestätigen: $D_8 = 36 = 6^2$. Die nächste quadratische Dreieckszahl, die unsere Formel liefert, ist $D_{8 \cdot 36} = 41616 = 204^2$. Wir wissen nun also: Es gibt unendlich viele quadratische Dreieckszahlen.

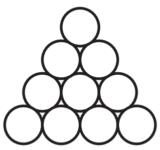
Die Dreieckszahlen sind damit noch längst nicht erschöpfend behandelt. Hier sind einige Punkte, über die man nachdenken kann:

- Welche weiteren Figuren lassen sich aus Dreieckszahlen bilden und auf welche Formeln führen sie?
- Es ist $D_2 = 3$ eine Primzahl. Gibt es weitere Dreieckszahlen, die Primzahlen sind?
- Wenn wir die ersten sieben Dreieckszahlen berechnen sehen wir, dass für ungerades n die Dreieckszahl D_n stets ein Vielfaches von n ist. Gilt dies allgemein? Warum gilt es nicht für gerades n?
- Auf zwei ungerade Dreieckszahlen scheinen zwei gerade zu folgen, dann wieder zwei ungerade usw. Ist dies allgemein richtig?

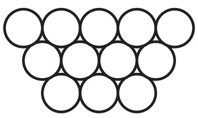
Wir können aber statt Dreiecks- und Quadratzahlen auch Pentagonal- oder Hexagonalzahlen betrachten. Auf der Abbildung links ist dargestellt, wie man ausgehend von der Pentagonalzahl $P_1 = 1$ zu den Pentagonalzahlen $P_2 = 5, P_3 = 12$ und $P_4 = 22$ gelangt, indem man „Klammern“ um die jeweils letzte Pentagonalzahl legt. Wie lässt sich daraus eine Formel für P_n ableiten?



Pentagonalzahlen



D_4



P_3 *als Trapez*

Man kann die Dreieckszahlen auch etwas anders darstellen, nämlich als gleichseitiges Dreieck. Wenn man das „Dach“ der Pentagonalzahlen abflacht, erhält man Trapeze. Mit diesen Darstellungen kann man leicht sehen, dass sich jede Pentagonalzahl als Differenz von zwei „passenden“ Dreieckszahlen darstellen lässt. Welche Formel für P_n ist damit ableitbar?

Außerdem ist jede Pentagonalzahl ein Drittel einer Dreieckszahl:

$$P_n = \frac{1}{3} D_{3n-1}$$

Wie kann man diese Gleichung geometrisch einsehen?

Aufgabe 5 *Indem wir z.B. die gleichseitigen Dreieckszahlen D_3, D_2 und D_1 übereinanderstapeln wie Orangen im Obstgeschäft, erhalten wir einen Tetraeder. Wir definieren allgemein für $n \in \mathbb{N}$ die n-te Tetraederzahl als*

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} D_k.$$

Zeige mittels vollständiger Induktion, dass sich T_n wie folgt berechnen lässt:

$$T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

Aufgabe 6 *Analog zur vorherigen Aufgabe können wir auch die Quadratzahlen $n^2, (n-1)^2, \ldots, 1$ übereinanderstapeln und erhalten Pyramidenzahlen, d.h.*

$$\mathrm{Pyr}_n = \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Versuche, auch für diese Zahlen eine Formel zu finden und beweise diese.

Zum Schluss wollen wir noch einmal auf die Frage der quadratischen Dreieckszahlen zurückkommen. Wir haben schon gesehen, dass es unendlich viele solche Zahlen gibt. Mit Hilfe der Formel von oben erhalten wir folgende quadratische Dreieckzahlen:

$$1, 36, 41616, 55420693056, \ldots$$

Wir testen, z.B. mit einem Computer, ob das überhaupt alle quadratischen Dreieckszahlen sind. Mit einer systematischen Suche finden wir die folgenden quadratischen Dreieckszahlen:

$$1, 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900, \ldots,$$

oder anders geschrieben:

$$1^2, 6^2, 35^2, 204^2, 1189^2, 6930^2, \ldots$$

Da haben wir also eine Zahlenfolge. Vielleicht können wir ein einfaches Bildungsgesetz entdecken? Wir betrachten dazu die Folge der Basen, d.h. die Folge

$$1, 6, 35, 204, 1189, 6930, \ldots$$

Die Größe der Zahlen macht es natürlich schwierig ein Bildungsgesetz zu entdecken, aber mit ein wenig Probieren erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_1 & = & 1 \\ a_2 & = & 6 \\ a_n & = & 6a_{n-1} - a_{n-2} \end{array}\right\} \tag{3}$$

Wir haben nun mit (3) eine rekursive Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert. Jetzt müssten wir eigentlich beweisen, dass a_n^2 tatsächlich immer eine Dreieckszahl ist, denn das ist ja keineswegs klar! Ebenso wissen wir immer noch nicht, ob wir durch unsere Folge *alle* quadratischen Dreieckszahlen bekommen.
Tatsächlich ist es so, dass a_n^2 stets eine Dreieckszahl ist und dass andererseits auch keine quadratischen Dreieckszahlen fehlen. Die entsprechenden Beweise hier auszuführen würde aber den Rahmen sprengen.
Stattdessen wollen wir uns noch etwas anderes anschauen: Wir wollen aus der Rekursionsgleichung (3) eine explizite Formel ableiten. Wir lassen dabei zunächst die Anfangswerte $a_1 = 1$ und $a_2 = 6$ außer Acht und betrachten nur die Gleichung

$$a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}. \tag{4}$$

Um diese Gleichung zu „lösen“ machen wir den Ansatz

$$a_i = x^i$$

und erhalten damit aus (4) die Gleichung

$$x^n = 6x^{n-1} - x^{n-2}$$

bzw. nach Multiplikation mit x^{2-n} die quadratische Gleichung

$$x^2 - 6x + 1 = 0. \tag{5}$$

Wir lösen nun diese quadratische Gleichung und erhalten die beiden Lösungen

$$x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{8} = 3 \pm 2\sqrt{2} = (1 \pm \sqrt{2})^2. \tag{6}$$

Setzen wir $a_1 = x_i$ und $a_2 = x_i^2$ gemäß unseres Ansatzes für $i \in \{1, 2\}$ und berechnen weitere Folgenglieder mit der Gleichung (4), so gilt also $a_n = x^n$. Weiterhin prüft man schnell nach, dass mit x_1 und x_2 auch die Folgen der Gestalt

$$(c_1 x_1^n + c_2 x_2^n)_{n\in\mathbb{N}} \tag{7}$$

für beliebige $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die Rekursionsgleichung (4) erfüllen.

Aufgabe 7 *Prüfe diese Behauptungen nach.*

Was wir nun also tun müssen ist lediglich, die Konstanten c_1 und c_2 so anzupassen, dass a_1 und a_2 gerade die Werte aus (3) annehmen. Wir suchen somit also c_1 und c_2, so dass folgendes Gleichungssystem erfüllt ist:

$$\begin{aligned} c_1 x_1 + c_2 x_2 &= 1 \\ c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 &= 6 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist linear in c_1 und c_2, man findet also ohne Schwierigkeiten die (eindeutige) Lösung

$$c_1 = \frac{1}{8}\sqrt{2} \qquad\qquad c_2 = -\frac{1}{8}\sqrt{2}.$$

Wir können nun damit für die rekursiv definierte Folge (3) gemäß (7) eine explizite Bildungsforschrift angeben:

$$a_n = \frac{1}{8}\sqrt{2}(1+\sqrt{2})^{2n} - \frac{1}{8}\sqrt{2}(1-\sqrt{2})^{2n} \tag{8}$$

Das ist unsere Formel, die uns für $n \in \mathbb{N}$ genau die Zahlen k liefert, für die k^2 eine Dreieckszahl ist (und natürlich trivialerweise auch eine Quadratzahl.)

Aufgabe 8 *Bekanntlich sind die Fibonaccizahlen definiert durch:*

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 1 \\ a_{n+1} &= a_n + a_{n-1} \end{aligned}$$

Versuche genau parallel zu obigem Vorgehen eine rekursive Formel für die Fibonaccizahlen zu finden.

Anworten auf alle Fragen und Lösungen zu den Aufgaben, die offen geblieben sind, könnt Ihr uns gern zuschicken. Am besten an

Andreas Nareike
Eilenburger Straße 51
04509 Delitzsch

oder per E-Mail an

`nadgr@gmx.de` oder `andreas.nareike@gmx.net`

Natürlich nehmen wir auch Eure Fragen, Ideen und Anregungen zu diesen oder anderen Themen gern entgegen.

Nadine Große und Andreas Nareike