Leipziger SchülerGesellschaft für Mathematik
http://lsgm.uni-leipzig.de

Prof. Hans-Gert Gräbe, Institut f. Informatik, Univ. Leipzig, 04009 Leipzig
email: graebe@informatik.uni-leipzig.de

Korrespondenz-Seminar 2005/06 der LSGM
Klasse 8 – Aufgabenserie 7

Hinweise zu den Aufgaben

In Aufgabe 1 geht es noch einmal um das Beweisen von Ungleichungen. Sieh dir dazu noch einmal das Arbeitsblatt zu Ungleichungen (letzte Serie) an.

In Aufgabe 2 sind die beiden Quadratzahlen in der Folge schnell gefunden. Find einen Grund, warum die anderen Zahlen der Folge keine Quadratzahlen sein können. Was haben sie gemeinsam und warum hilft das bei der Frage weiter? Auch in der Aufgabe 4 geht es um Teilbarkeit.

Aufgabe 3 ist wieder eine Aufgabe zur ebenen Geometrie – und dieses Thema wird wie besprochen auch im Mittelpunkt des **nächsten Arbeitstreffens am 17.6.2006** stehen. Wir treffen uns wie immer um 9:30 Uhr beim Pförtner im Hauptgebäude der Universität.

Aufgabe 5 schließlich ist eine Textaufgabe, wo du zunächst eine sinnvolle „Übersetzung“ in die Sprache der Mathematik finden musst. Dann aber sollte die Lösung keine übermäßigen Schwierigkeiten bereiten.

Eure Lösungen zu diesen Aufgaben könnt ihr **bis zum 30. Mai 2006** einschicken an die Adresse

Prof. H.-G. Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig.

Viel Spaß und Erfolg beim Lösen der Aufgaben wünscht Euch

Prof. H.-G. Gräbe.

Die Aufgaben

1. Beweise folgenden Satz: Wenn a, b, c reelle Zahlen sind mit $a\,b\,c = 1$, dann gilt (6 Pkt.)

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8\,.$$

2. Es gelte $S(n) = 1! + 2! + \cdots + n!$, wobei $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ (gelesen „n Fakultät“) das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen bezeichnet.

Beweise, dass die Folge $S(1), S(2), \ldots, S(n), \ldots$ genau zwei Quadratzahlen enthält. (6 Pkt.)

3. Der Inkreis k eines Dreiecks ABC berührt die Dreiecksseiten $\overline{AB}, \overline{BC}$ und $\overline{AC}$ in den Punkten D, E, F.

Ermittle die Größe der Innenwinkel $|\angle DEF|, |\angle EFD|, |\angle FDE|$ des Dreiecks DEF in Abhängigkeit von den Größen α, β, γ der Innenwinkel des Dreiecks ABC. (6 Pkt.)

4. Zwei Primzahlen p_1, p_2 heißen *Primzahlzwillinge*, wenn $p_1 - p_2 = 2$ gilt.

Beweise, dass für alle Primzahlzwillinge p_1, p_2 mit $p_2 > 3$ die Summe $p_1 + p_2$ durch 12 teilbar ist.

Formuliere und beweise eine Verallgemeinerung dieses Satzes. (6 Pkt.)

5. Über drei rationale Zahlen werden folgende Aussagen gemacht:

(1) Der Quotient aus der ersten und der dritten Zahl ist positiv.

(2) Die Summe aus der ersten und der dritten Zahl ist negativ.

(3) Das Produkt aller drei Zahlen ist positiv.

(a) Was lässt sich auf Grund dieser drei Bedingungen über die Vorzeichen der drei Zahlen aussagen?

Es gelten weiter folgende Aussagen:

(4) Subtrahiert man die dritte von der ersten Zahl, dann erhält man die zweite.

(5) Bildet man den Kehrwert der drei Zahlen, dann erhält man drei ganze Zahlen.

(6) Die Summe aller drei Zahlen beträgt $-\frac{1}{3}$. Dieses Ergebnis erhält man auch, wenn man die zweite durch die dritte Zahl teilt.

(b) Ermittle alle Tripel rationaler Zahlen, welche die Bedingungen $(1-6)$ gleichzeitig erfüllen! (6 Pkt.)