Leipziger SchülerGesellschaft
für Mathematik
http://lsgm.uni-leipzig.de

Prof. Hans-Gert Gräbe, Institut f. Informatik, Univ. Leipzig, 04009 Leipzig
email: graebe@informatik.uni-leipzig.de

Korrespondenz-Seminar 2005/06 der LSGM
Klasse 8 – Aufgabenserie 6

Hinweise zu den Aufgaben

In Aufgabe 1 geht es um das grafische Lösen von Gleichungen. Das Vorgehen ist ähnlich wie in Aufgabe 5 der 4. Serie. Sieh dir deine Lösung (sofern vorhanden) sowie die Musterlösung dieser Aufgabe noch einmal an. Du findest dort auch die Erklärung des Symbols $\lfloor x \rfloor$.

In Aufgabe 2 geht es um das Beweisen von Ungleichungen. Beachte neben den Hinweisen auf die Chemnitzer Materialien auch das Arbeitsblatt „Beweisen von Ungleichungen“, in dem exemplarisch einige Beweise von Ungleichungen ausgeführt sind und Merksätze zum Vorgehen formuliert werden. Versuche, auf dieser Grundlage einen Zugang zu den drei gestellten Problemen zu finden.

Aufgabe 3, 4 und 5 sind Aufgaben zur Geometrie – und dieses Thema wird auch im Mittelpunkt des **nächsten Arbeitstreffens am 8.4.2006** stehen. Wir treffen uns wie immer um 9:30 Uhr beim Pförtner im Hauptgebäude der Universität.

Aufgabe 5 ist allerdings – weil ja $a, b \in \mathbb{N}$ vorausgesetzt wird – nicht wirklich eine Geometrieaufgabe, sondern hat etwas mit Zahlentheorie, Teilbarkeit und dem Euklidschen Algorithmus zu tun. Ich habe die Aufgabenstellung gegenüber dem Chemnitzer Aufgabenblatt in – hoffentlich – leichter verständliche Form gebracht. Schau dir dazu auch das beiliegende Arbeitsmaterial aus Klasse 7 zum „Euklidschen Algorithmus“ an.

Eure Lösungen zu diesen Aufgaben könnt ihr zum Arbeitstreffen mitbringen oder aber **bis zum 20. April 2006** einschicken an die Adresse

Prof. H.-G. Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig.

Viel Spaß und Erfolg beim Lösen der Aufgaben wünscht Euch

Prof. H.-G. Gräbe.

Die Aufgaben

1. Ermittle die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen auf grafischem Weg! (6 Pkt.)

a) $|x-2| = \left\lfloor \frac{1}{2}x + 1 \right\rfloor$ b) $\left\lfloor \frac{1}{2}x + 4 \right\rfloor - |2\,x| - 1 = 0$

2. Beweise folgende Sätze (im Bereich der rationalen Zahlen):

a) Stets gilt $\dfrac{x^2}{1+x^4} \leq \dfrac{1}{2}$. (2 Pkt.)

b) Wenn $a > 0$ und $b > 0$, dann gilt $a\,(a+1) + \dfrac{b^2}{a} \geq 2\,b + a^2$. (2 Pkt.)

c) Wenn $x > 0$ und $y > 0$, dann gilt $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)(x+y) \geq 4$. (2 Pkt.)

3. Gegeben sei ein konvexes Viereck $ABCD$, bei dem sich die Verlängerungen der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ unter einem rechten Winkel schneiden. Die Mittelpunkte der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ seien E bzw. F. (6 Pkt.)

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets gilt

$$|EF|^2 = \frac{1}{4}\left(|AB|^2 + |CD|^2\right) .$$

Lässt sich der Satz durch Abschwächen der Voraussetzungen verallgemeinern?

4. Sei $ABCD$ ein Quadrat und P ein Punkt auf dem Halbkreis über $\overline{AB}$ im Inneren dieses Quadrats. Die Gerade BP schneide den Vietelkreis um B durch A und C im Punkt S. Der Fußpunkt des Lots von S auf $\overline{AD}$ heiße Q.

Beweise, dass dann stets $|SP| = |SQ|$ gilt! (6 Pkt.)

5. Gegeben sei ein Parallelogramm $ABCD$ mit dem Innenwinkel $|\angle DAB| = 60°$ sowie den Seitenlängen $|AB| = |CD| = a$ und $|BC| = |DA| = b$, wobei a und b natürliche Zahlen seien und $a > b$ gelte.

Dieses Parallelogramm ist durch Punkte $E_1, E_3, \ldots$ auf $\overline{AB}$ und $E_2, E_4, \ldots$ auf $\overline{CD}$ wie folgt in gleichseitige Dreiecke zu zerlegen:

- Das erste Dreieck ist das Dreieck AE_1D.
- Das zweite Dreieck ist das Dreieck E_1E_2D.
- Das dritte Dreieck ist das Dreieck $E_1E_3E_2$, usw.

Dies wird so lange fortgesetzt, bis E_i mit B zusammenfällt oder außerhalb von $\overline{AB}$ liegt.

Falls $E_i = B$, so ist E_iBC ein letztes gleichseitiges Dreieck und der Zerlegungsprozess beendet.

Anderenfalls betrachten wir das „letzte“ so entstandene Parallelogramm $E_{i-1}E_{i-2}BC$ und verfahren mit ihm genauso wie mit dem Ausgangsparallelogramm usw., bis schließlich nach (hoffentlich) endlich vielen Schritten das Ausgangsparallelogramm vollständig in gleichseitige Dreiecke zerlegt worden ist. (6 Pkt.)

a) Weise nach, dass dieser Prozess stets nach endlich vielen Schritten terminiert und gib eine Formel an, mit der sich die Kantenlänge des letzten gleichseitigen Dreiecks, welches in diesem Prozess entsteht, durch a und b ausdrücken lässt!

b) Bestimme die Seitenlänge des kleinsten Dreiecks für $a = 1986$ cm und $b = 1800$ cm!

c) Wie viele gleichseitige Dreiecke entstehen, wenn das Parallelogramm die in b) angegebenen Seitenlängen hat?

   Verallgemeinere die Lösung von c), indem du eine Formel für die Anzahl der Dreiecke in Abhängigkeit von a und b aufstellst!