Korrespondenz-Seminar der LSGM 2005/6

Klasse 7, Serie 7

Aufgabe 1 Ermittle die Lösungsmengen der Gleichungen bzw. Ungleichungen im Bereich der rationalen Zahlen.

a) $3 + \sqrt{x+1} < 0.$ (1 Pkt).
b) $\sqrt{x-1} + \sqrt{1-x} = 0.$ (1 Pkt).
c) $\dfrac{3x-1}{5} - \dfrac{13-x}{2} = \dfrac{7x}{3} - \dfrac{11(x+3)}{6}.$ (2 Pkt).
d) $(5+x)(4x-2) < (2x+1)(2x-1).$ (2 Pkt).

Aufgabe 2 Zu konstruieren sind alle Dreiecke ABC, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

(a) $a + b = 10\,\mathrm{cm}$,
(b) $\beta = 45°$,
(c) $\gamma = 60°$,

wobei, wie üblich, a, b, c bzw. α, β, γ die Seitenlängen bzw. die Innenwinkelgrößen sind.
Gib eine Konstruktionsbeschreibung an und beweise, dass jedes so konstruierte Dreieck alle Bedingungen erfüllt.

Hinweis. Wähle auf der Verlängerung von $\overline{BC}$ über B hinaus einen geeigneten Hilfspunkt C'.

Aufgabe 3 Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\left|\overline{AB}\right| < \left|\overline{AC}\right|$ und $\angle BAC = \alpha$. Es sei D derjenige Punkt auf $\overline{AC}$, für den $\left|\overline{CD}\right| = \left|\overline{AB}\right|$ gilt; ferner seien M der Mittelpunkt von $\overline{AD}$ und N der Mittelpunkt von $\overline{BC}$. Schließlich sei E der Schnittpunkt der Geraden AB und MN. Beweise, dass dann gilt $|\angle AEM| = \frac{1}{2}\alpha$.

Hinweis. Betrachte den Hilfspunkt F auf der Verlängerung von $\overline{CA}$ über A hinaus, für den $\left|\overline{AF}\right| = \left|\overline{AB}\right|$ gilt.

Aufgabe 4 Über eine natürliche Zahl x werden vier Paare von Aussagen gemacht:

Paar A (1) x ist eine zweistellige Zahl.
(2) x ist kleiner als 1000.

Paar B (1) Die zweite Ziffer von x ist eine 0.
(2) Die Quersumme der Zahl x ist 11.

Paar C (1) x besitzt drei Ziffern, die einander gleich sind.
(2) x ist durch 37 teilbar.

Paar D (1) Die Quersumme der Zahl x ist 27.
(2) Das Produkt der drei Ziffern der Zahl x ist 0.

Untersuche, ob es natürliche Zahlen x mit $x \neq 0$ gibt, für die in jedem der vier Paare A, B, C und D eine Aussage wahr und die andere Aussage falsch ist. Gibt es solche Zahlen x, dann ermittle alle diese Zahlen.

Aufgabe 5 Zwei Kerzen von unterschiedlicher Dicke wurden zu Beginn eines Tages um 0 Uhr angezündet; damals hatten sie verschiedene Längen. An demselben Tag um 2 Uhr wurde beobachtet, dass sie gleiche Länge hatten. Am selben Tag um 3 Uhr 30 Minuten war die ursprünglich längere Kerze vollständig niedergebrannt, um 5 Uhr (am selben Tag) war schließlich auch die ursprünglich kürzere Kerze niedergebrannt.
In welchen Verhältnis stand zu Anfang die Länge der kürzeren zur Länge der längeren Kerze.