Korrespondenz-Seminar der LSGM 2005/6

Klasse 7, Serie 4

Aufgabe 1 Zu konstruieren sind alle Vierecke $ABCD$, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

(a) $\overline{AB} = a = 8\,\mathrm{cm}$;

(b) $\overline{CD} = c = 3\,\mathrm{cm}$;

(c) $\overline{AC} = e = 7\,\mathrm{cm}$;

(d) $\overline{BD} = f = 6\,\mathrm{cm}$;

(e) $ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \| CD$.

a) Beschreibe eine Konstruktion und fertige eine Konstruktionszeichnung an!
b) Beweise: Wenn ein Viereck $ABCD$ wie beschrieben konstruiert wird, dann erfüllt es die Bedingungen (a) bis (e). (Existenznachweis)
c) Beweise: Wenn ein Viereck die Bedingungen (a) bis (e) erfüllt, dann lässt es sich wie beschrieben konstruieren. (Einzigkeitsnachweis)

Aufgabe 2 a) Untersuche, welche der drei Kongruenzaussagen wahr und welche falsch sind. Vereinfache die wahren Kongruenzaussagen durch eine entsprechende Division auf beiden Seiten so weit wie möglich.

$$666 \equiv 414 \pmod{63}, \quad 401276 \equiv 25362 \pmod{99} \quad 9945 \equiv 4590 \pmod{357}.$$

b) Ermittle die letzte Ziffer des folgenden Produktes

$$z = 123456^{789}\,1999^{1999}\,3553^{35}.$$

Dabei sind Taschenrechner nicht zugelassen.

Aufgabe 3 In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}$ habe der Winkel $\angle ACB$ eine Größe von $120°$.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Mittelsenkrechten der Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ die Seite $\overline{AB}$ in drei gleiche Teile teilen.

Aufgabe 4 Eine quadratförmige schachbrettartige Tabelle bestehe aus 15×15 Feldern. Eine der beiden Diagonalen des Quadrates werde mit d bezeichnet. In jedes der 225 Felder der Tabelle kann eine der Zahlen von 1 bis 15 so eingetragen werden, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) Jede waagerechte Zeile enthält jede der 15 Zahlen genau einmal.
(b) Liegen zwei Felder symmetrisch zu d, so sind ihre Zahlen gleich.

Für jede derartige Eintragung kann man die Summe der 15 Zahlen auf der Diagonalen d bilden. Beweise, dass diese Summe eindeutig bestimmt ist und ermittle sie.

Aufgabe 5 Drei Pumpen A, B und C arbeiten mit unterschiedlicher Leistung. Bei gleichzeitigem Einsatz füllen sie ein Wasserbecken W in genau einer Stunde.
Eines Morgens werden die drei Pumpen um 8 Uhr in Betrieb gesetzt; um 8.30 Uhr wir Pumpe A abgeschaltet. Es dauert nun bis 9.20 Uhr bis die Pumpen B und C gemeinsam das Becken W gefüllt haben.
Am folgenden Tag soll das Becken nur durch die Pumpe A gefüllt werden.
Wie lange dauert das?