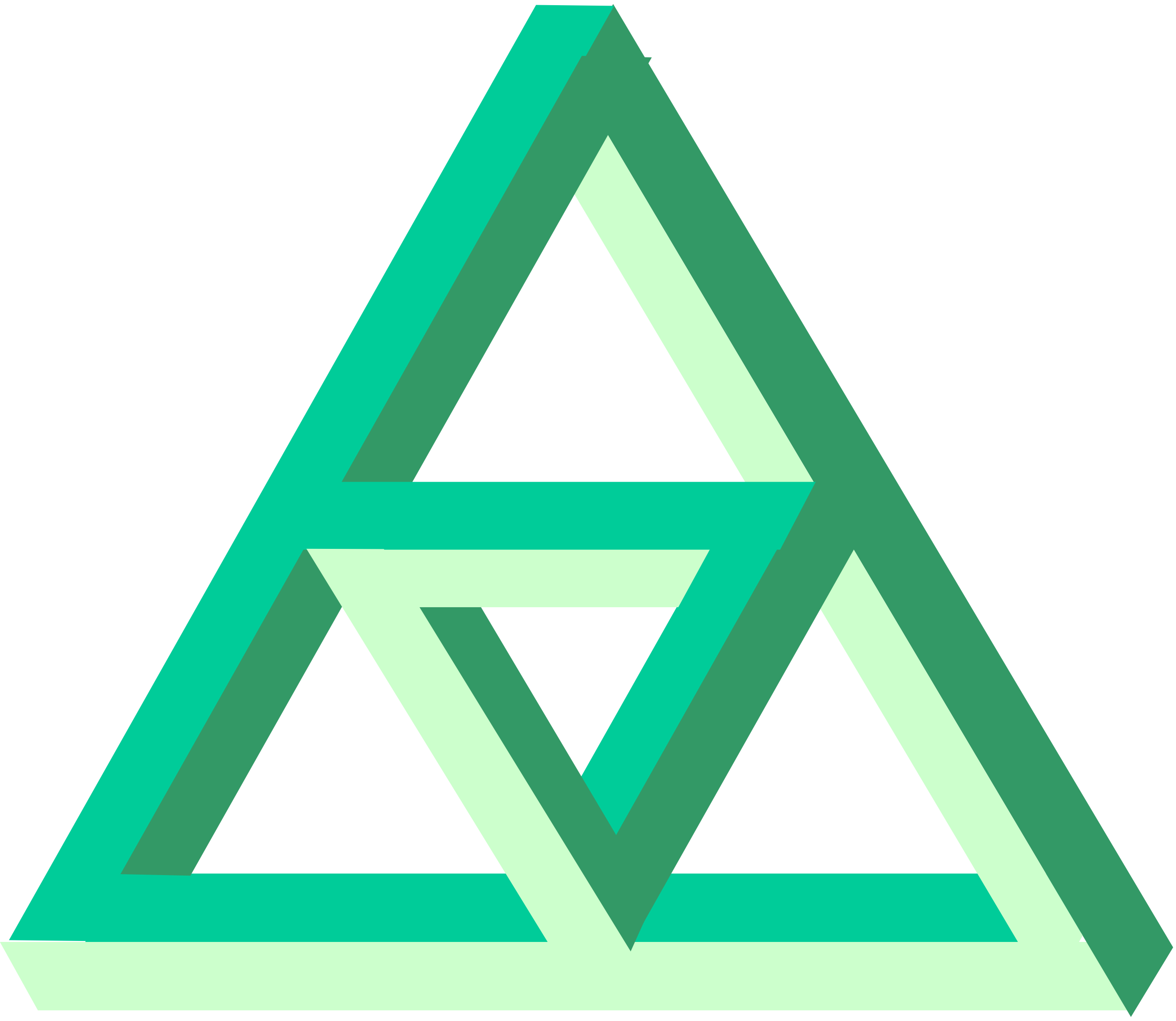
Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Chemnitzer Bezirkskomitees
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Heft 6/03 2. Jahrgang

Willkommen zum Korrespondenzzirkel im Schuljahr 2003/04

Zur individuellen Förderung mathematisch interessierter Schülerinnen und Schüler bietet das Chemnitzer Bezirkskomitee „Zur Förderung mathematisch - naturwissenschaftlich interessierte und begabter Schüler“ den Korrespondenzzirkel „Mathematik“ an. Der Zirkel orientiert sich an mathematischen Problemen, die neben der Vermittlung von Kenntnissen zu mathematischen Begriffen, Sätzen und Verfahren durch wettbewerbstypische Aufgabenstellungen die Vorbereitung auf mathematische Wettbewerbe (Mathematik-Olympiaden und Bundeswettbewerb „Mathematik“) unterstützen. Sachsenweit kann jeder in seiner (oder in einer höheren) Klassenstufe teilnehmen und ist hiermit herzlich dazu eingeladen.

Für die Teilnahme ist eine Anmeldung mit der vollständig ausgefüllten Teilnahmeerklärung (s. S. 12) erforderlich. Jeder Teilnehmer erhält im Verlaufe des Schuljahres 7 Serien zugesandt, die Aufgaben mit unterschiedlichen Schwierigkeitsgrad umfassen. Das Spektrum reicht von „Einstiegsfragen“ über Wettbewerbsaufgaben bis zu komplexen Themen. Es wird empfohlen, zu allen Aufgaben Lösungsideen einzureichen, auch wenn keine vollständige Lösung erreicht wurde. Die eingereichten Lösungen werden korrigiert, für die Selbsteinschätzung kommentiert, mit Punkten bewertet und zusammen mit Lösungshinweisen zurückgegeben. Zu ausgewählten Aufgaben werden in den Heften methodische Einführungen oder weiterführende Ergänzungen gegeben. Diese sollen vor allem zur individuellen Beschäftigung anregen. Insbesondere wird diese Vertiefung durch die Wahlaufgaben gefördert.

An vier Sonnabenden wird zu Seminaren (voraussichtlich am 27.09.03, 13.12.03., 20.03.04, 12.06.04) eingeladen, auf denen Aufgaben diskutiert und Anwendungsfälle für Mathematik vorgestellt werden. Für alle, denen der Weg zum Veranstaltungsort (verständlicherweise) zu weit ist, wird eine kurze Zusammenfassung des Seminars zugesandt. Zusätzlich wird der Zirkel durch Informationen wie Aufgaben, Musterlösungen und statistischen Auswertungen der Mathematik-Olympiade, des Bundeswettbewerbs Mathematik und anderer Wettbewerbe sowie durch historische Bezüge oder Literaturhinweise ergänzt.

Anregungen der Teilnehmer zur inhaltlichen Gestaltung sind jederzeit willkommen.

Magische Quadrate für die Urlaubszeit [1]

Zu einem der ältesten Themen mathematischer Unterhaltung zählen **magische Quadrate**:

> *Ein magisches Quadrat n-ter Ordnung ist eine n x n-Matrix, die die Zahlen 1 bis n^2 enthält und die Eigenschaft hat, dass die Summen der n Elemente in jeder Spalte, in jeder Zeile und in den beiden Diagonalen gleich sind.*

Der Summenwert S wird **magische Konstante** genannt und beträgt nach der Summenformel der ersten n^2 natürlichen Zahlen

$$S = \frac{n \cdot (n^2 + 1)}{2}.$$

Für n = 1 existiert trivialer Weise nur ein magisches Quadrat, nämlich das mit der Zahl 1. Leicht zeigt man, dass es kein magisches Quadrat zweiter Ordnung gibt. Bei der Suche nach der Anzahl der verschiedenen magischen Quadrate ab n = 3 ist es zunächst zweckmäßig, die magischen Quadrate als gleich zu betrachten, die durch Spiegelung (an einer der Symmetrieachsen der Matrix) oder Drehungen (um Vielfache von 90°) ineinander überführt werden können. Unter dieser Voraussetzung gibt es nur ein magisches Quadrat 3. Ordnung, das schon 4000 Jahre v.u.Z. in China bekannt war:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Für n = 4 existieren bereits 880 im oben genannten Sinne verschiedene magische Quadrate. Diese Zahl ist schon seit dem 17. Jh. bekannt und wurde erstmals von Bernard Frénicle de Bessy (1605 bis 1675) ermittelt. Das berühmteste derartiger Quadrate ist sicherlich das von Albrecht Dürer (1471 bis 1528) in seinem Stich Melancholie 1514 eingearbeitete Quadrat:

---

[1] Nach Devendran, T. (Hrsg.): Das Beste aus dem Mathematischen Kabinett. Deutsche Verlagsanstalt GmbH Stuttgart, 1990 und „Mathematik lehren", Heft 57 (1990), S. 55-60.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Für n = 5 beträgt die Zahl der verschiedenen magischen Quadrate immerhin schon über 275 Millionen. Auch wenn dieser Wert bereits 1973 veröffentlicht wurde, war diese Fragestellung ein erfolgreiches Thema einer „Jugend forscht" - Arbeit. Heinrich Frank (damals Schüler am Humboldt-Gymnasium Werdau) erreichte mit seiner Computerlösung zur Ermittlung dieser Anzahl einen 2. Preis im sächsischen Landesausscheid 1995.

Verzichtet man auf die Bedingung, dass magische Quadrate die Zahlen 1 bis n^2 enthalten sollen und lässt eine beliebige Zahlenauswahl (ohne Wiederholung) zu, so kann die Frage nach **magischen Primzahlquadraten** gestellt werden, also nach solchen Quadraten, bei denen nur Primzahlen verwendet werden. Bereits Henry Ernest Dudeney entwarf 1900 ein solches – allerdings zählte er die 1 zu den Primzahlen:

7	61	43
73	37	1
31	13	67

Die magische Konstante beträgt 111. Es ist beweisbar, dass für magische Primzahlquadrate 3. Ordnung kein kleinerer Summenwert existiert. Verwendet man nicht die Zahl 1, so findet man für S = 177 das nächste derartige Quadrat

17	89	71
113	59	5
47	29	101

Bezeichnet man die Zahl in der Mitte der Matrix als **Kernzahl**, so kann man feststellen, dass es kein (echtes, also ohne die Zahl 1 verwendendes) magisches Primzahlquadrat gibt, dass eine kleinere Primzahl als Kernzahl besitzt. Durch Vorgabe der Kernzahl und zwei weiterer Zahlen ist das Quadrat vollständig bestimmt. Es ist dann mit einem Computer recht einfach, systematisch zu probieren, ob es zu einer Kernzahl auch wirklich ein Primzahlquadrat gibt. Notwendig ist allerdings eine Abschätzung bis zu welchen Werten man das Probieren durchführen muss, um keine Möglichkeiten auszuschließen! Interessanterweise gibt es für die Kernzahl 127 erstmalig zwei verschiedene Primzahlquadrate, die sich nicht nur in der Anordnung, sondern auch in der Auswahl der Primzahlen unterscheiden. Bei 241 findet man bereits drei verschiedene Lösungen. Und wie weiter?

Eine weitere amüsante Variante der magischen Quadrate sind **bimagische Quadrate**: Zum Einen ist es ein ganz normales magisches Quadrat der Zahlen 1 bis n^2 mit der magischen Konstante S_1, zum Anderen ergeben die quadrierten Zahlen (an den gleichen Plätzen belassen) ebenfalls ein magisches Quadrat mit der Konstanten S_2. Da sich S_2 als Summe der ersten n^2 Quadratzahlen berechnen lässt, ist das Verhältnis von S_2 und S_1 bekannt:

$$S_2 : S_1 = \frac{1}{3}\left(2n^2 + 1\right).$$

Solche bimagischen Quadrate gibt es wirklich, das kleinstmögliche wurde ebenfalls von H.E. Dudeney gefunden. Es ist 8. Ordnung und besitzt die magische Konstante $S_1 = 260$.

Die Fortsetzung der Spielerei ist naheliegend: Gibt es auch **trimagische Quadrate**, also solche, bei denen zusätzlich auch die Kuben der Zahlen ein magisches Quadrat bilden? Ja, das kleinste bisher bekannte trimagische Quadrat besitzt die Ordnung 32 und wurde von William H. Benson gefunden.

Eine ganz andere Idee: Das Gegenstück zu magischen Quadraten nennt man **antimagische Quadrate**. Sie wurden erstmals von J.A. Lindon entdeckt. Bei diesen Gebilden sind die Summen der Zeilen und Spalten und Diagonalen jeweils paarweise verschieden, wobei die $2n + 2$ Summen eine ununterbrochene Folge aufsteigender Zahlen bilden sollen. Antimagische Quadrate der Ordnung 1 bis 3 gibt es nicht, ein Beispiel vierter Ordnung ist hier angegeben:

11	14	1	4
5	2	16	10
15	3	8	9
6	12	7	13

Über antimagische Quadrate ist bislang wenig publiziert, Konstruktionsalgorithmen sollen noch nicht bekannt sein.

Es gibt noch weitere Sonderheiten: Zunächst mag beim folgenden magischen Quadrat nichts Besonderes auffallen:

96	11	89	68
88	69	91	16
61	86	18	99
19	98	66	81

Doch man kann es um 180° drehen – und das neue Quadrat mit dem auf den Kopf stehenden Zahlen ist wieder magisch, wenn die gedrehte 96 und 11 wieder als 96 und 11, die 89 als 68 usw. gelesen wird.

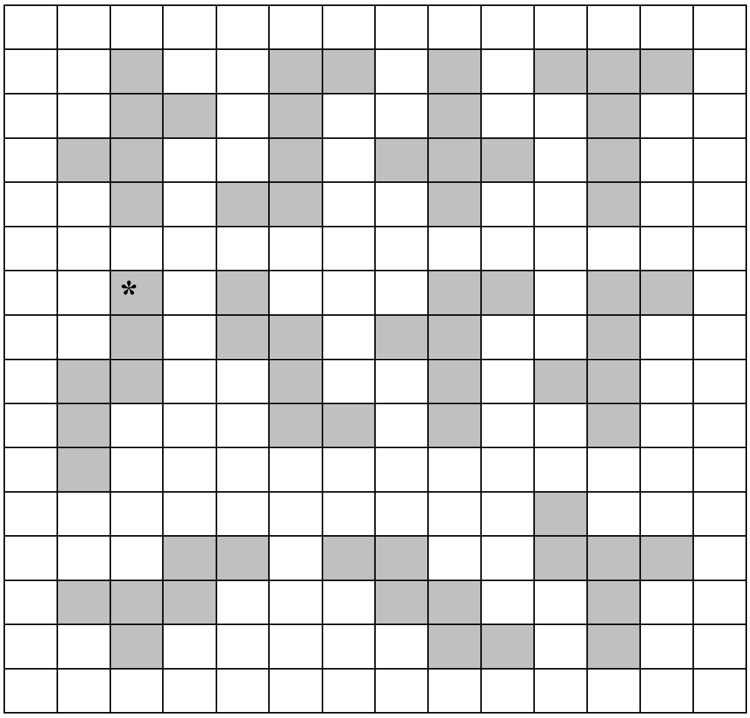
Schreibt man die Zahlen in TR-Display-Art, gibt es viel mehr Möglichkeiten, weil dann auch ohne Probleme die Zahl 2 und die Zahl 5 auf den Kopf gestellt werden können:

29	15	61	52
51	62	19	25
12	21	55	69
65	59	22	11

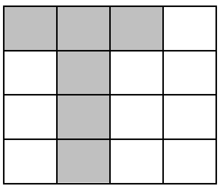
Wer findet weitere?

Magische Quadrate als Einpersonenspiel [1]

Man stelle sich ein Würfelnetz vor, also die 6 Quadrate der Würfeloberfläche als zusammenhängende Figur. Insgesamt gibt es 11 verschiedene Arten, die Oberfläche abzuwickeln (wenn man Drehungen und Spiegelungen nicht als verschieden ansieht):



Man nehme nun ein 4 x 4-Spielfeld und lege darauf eines der 10 Netze (das mit * gekennzeichnete Netz entfällt wegen seiner Ausdehnung). Nun stelle man sich die Augenzahlen eines Würfels auf dem Netz vor und übertrage diese auf die entsprechenden Felder. Gelingt es, das so begonnene Quadrat zu einem magischen zu ergänzen?



→

3	**2**	**4**	
	1		
	5		
	6		

→

3	**2**	**4**	**5**
8	**1**	**1**	**4**
0	**5**	**7**	**2**
3	**6**	**2**	**3**

Gibt es für jedes der Netze und für jede mögliche Lage innerhalb der 4 x 4-Matrix eine Lösung? Wann genügen dafür die Zahlen von 1 bis 16? Können Zahlendopplungen vermieden werden?

Fragen über Fragen, die auf schlechtes Urlaubswetter zur Beantwortung warten. Aber wer will schon schlechtes Wetter?

Aufgaben Serie 1 (2003/04)

(Einsendungen bis 12. September 2003 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de)

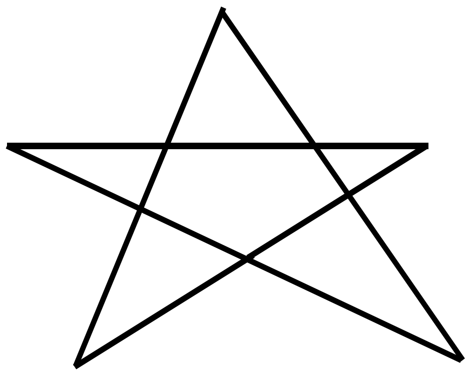
Aufgabe 1-1

Zwei Freunde A und B sitzen im Café, A hat ein Glas Milch und B eine Tasse Kaffee schwarz vor sich. A gibt einen Löffel voll Milch in die Tasse von B. Nachdem B umgerührt hat, gibt B einen Löffel seines Kaffee-Milch-Getränkes in das Glas von B. Es ist zu entscheiden, ob anschließend A weniger, gleich viel oder mehr Kaffee in seiner Milch hat als B Milch in seinem Kaffee. Man begründe die Antwort!

(5 Punkte)

Aufgabe 1-2

Man ermittle die Summe der Größen der Innenwinkeln an den fünf Spitzen des dargestellten fünfzackigen Sterns!



(5 Punkte)

Aufgabe 1-3

Man zeige: Es gibt keine dreistellige Zahl, die genau 11 paarweise verschiedene Teiler besitzt. (Wie üblich gelten die Zahl selbst und die Zahl 1 a ls Teiler einer Zahl.)

(6 Punkte)

Aufgabe 1-4

Gegeben seien 100 Zahlen $x_1, ..., x_{100}$, die entweder den Wert -1 oder $+1$ haben $\left(x_k \in \{-1;+1\}\right)$. Das Produkt dieser 100 Zahlen sei positiv $\left(\prod_{i=1}^{100} x_i > 0\right)$.

Man beweise, dass dann stets gilt:

$$x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_4 + ... + x_{99} \cdot x_{100} = \sum_{i=1}^{50} x_{2i-1} \cdot x_{2i} \neq 0 .$$

(6 Punkte)

(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsumme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt vergeben.)

Aufgabe 1-5A

Es sind n Punkte ($n > 1$) so in einem Quadrat der Seitenlänge 1 zu verteilen, dass ihr Mindestabstand möglichst groß wird.

Unter Mindestabstand d_n zwischen n Punkten einer gegebenen Verteilung wird die kleinste Länge von den insgesamt $\frac{1}{2}\cdot(n-1)\cdot n$ möglichen Verbindungsstrecken zwischen je zwei Punkten verstanden. Für $n = 2$ und $n = 4$ ist die Lösung der Aufgabe trivial und man findet $d_2 = \sqrt{2}$ bzw. $d_4 = 1$.

(a) Man gebe für $n = 3$ eine Verteilung mit möglichst großem Mindestabstand d_3 an und bestimme die Größe von d_3 für das gewählte Beispiel.

(2 Punkte)

(b) Man beweise, dass es eine Verteilung von $n = 6$ Punkten gibt, so dass der Mindestabstand d_6 größer als 0.58 wird.

(2 Punkte)

(c) Man finde eine Verteilung von $n = 5$ Punkten, so dass der Mindestabstand d_5 maximal wird. Man zeige, dass es keine weitere Verteilung gibt, die einen größeren Mindestabstand erreicht.

(4 Punkte)

Aufgabe 1-5B

Für das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen schreibt man n! („n -Fakultät"):

$$n! = 1\cdot\ldots\cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$$

(a) Man beweise: Eine Fakultätszahl n! ($n > 1$) ist keine Quadratzahl.

(2 Punkte)

(b) Man untersuche, ob es keine, endlich viele oder unendlich viele Zahlentripel (k, m, n) mit $n > m > 1$ gibt, die die Gleichung $m!\cdot n! = k!$ erfüllen.

(2 Punkte)

(c) Man zeige, dass

(c.1) die Summe der Fakultäten zweier verschiedener Zahlen größer 1 keine Fakultätszahl ergibt, dass also die Gleichung $a! + b! = c!$ für $a > b > 1$ keine Lösungen besitzt.

(c.2) dass es genau eine echt dreistellige Zahl gibt, die gleich der Summe der Fakultäten ihrer Ziffern ist.

(4 Punkte)

Aus dem Inhaltsverzeichnis Schuljahr 2002/03 – Heft 1/02 bis 5/03

Impressum

Redaktion:	Dr. Norman Bitterlich
Anschrift:	Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
Telefon/Fax:	(0371) 46607-51/-52
e-Mail:	norman.bitterlich@t-online.de
	www.kzm-bitterlich.gmxhome.de
Vervielfältigung:	REPRO-Zentrum GmbH & Co.,
	Johann-von-Zimmermann-Str. 4, 09111 Chemnitz
Auflage:	125 Exemplare

T E I L N A H M E B E D I N G U N G E N

(1) Die Teilnahme am Zirkel kann jederzeit angemeldet werden. Für die 1. Serie ist die Teilnahmeerklärung spätestens **bis 29. August 2003**, an

Dr. N. Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz

einzusenden. Es erfolgt eine Eingangsbestätigung, verbunden mit der Zusendung der aktuellen Materialien.

(2) Der Teilnehmer trägt einen jährlichen Unkostenbeitrag in Höhe von **20,00 EUR,** der in Form einer Überweisung unter Angabe des Namens und dem Kennwort **„KZM“ + Klassenstufe** auf das Konto

Kontoinhaber	Bezirkskomitee „Mathematik“
Konto-Nr.	355 000 3055
bei der	Sparkasse Chemnitz (BLZ 8705 0000)

einzuzahlen ist. Bei späterem Teilnahmebeginn wird ein anteilmäßiger Unkostenbeitrag erhoben.

(3) Die Einsendetermine zu den Serien sind möglichst einzuhalten. Die korrigierten und teilweise kommentierten Einsendungen werden mit der übernächsten Serie zurückgegeben.

(4) Bei postalischer Lösungseinsendung bitte jedes Blatt mit Namen versehen!

(5) Es besteht die Möglichkeit der elektronischen Einsendung, wobei für Anlagen das WORD- oder PDF-Format bevorzugt wird. Es erfolgt eine Eingangsbestätigung. Die korrigierten Einsendungen werden aber auch in diesem Fall in Papierform zurückgesandt. Per e-Mail können zusätzliche Infos verschickt und Anfragen gestellt werden

(6) Die Rücksendung erfolgt für die Teilnehmer **kostenfrei** mit Unterstützung der TU Chemnitz bzw. der Regionalschulämter über die Fachlehrer der Schule. Wer einen **ausreichend frankierten** (1,44 €) Rückumschlag (mindestens A5) beilegt, erhält die Postsendung auf direktem Weg.

T E I L N A H M E E R K L Ä R U N G*

Name, Vorname : . . . .

Wohnanschrift : . . . .

. . . .

e-mail: . . . .

Name und Anschrift der Schule : . . . .

. . . .

. . . .

Ich möchte im Schuljahr 2003/04 unter den angegebe nen Bedingungen am Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufe . . . teilnehmen.

Ort, Datum	Unterschrift des Schülers	Unterschrift eines Erziehungsberechtigten

* Die Personendaten werden nur für den direkten Kontakt verwendet und nicht an Dritte weitergegeben.