Ramsey–Theorie: Grundlagen und Beispiele

Johannes Waldmann
Institut für Informatik, Universität Leipzig
http://www.informatik.uni-leipzig.de/~joe

21. März 2001

1 Bezeichnungen

Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen ist $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$. Jede natürliche Zahl *ist* die Menge aller kleineren Zahlen: $0 = \emptyset, 1 = \{0\} = \{\emptyset\}, 2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Mengen

Die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge M ist $|M|$. Beispiel: $|\emptyset| = 0$.

Für eine Menge M und eine Zahl n: $\binom{M}{n} := \{T \mid T \subseteq M, |T| = n\}$.

Das sieht absichtlich so aus wie ein Binomialkoeffizient, denn $\left|\binom{M}{n}\right| = \binom{|M|}{n}$.

Beispiel: $\binom{\{a, b, c\}}{2} = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$

2 Graphen

Ein *Graph* G ist ein Paar (V, E). V ist eine endliche Menge, die Elemente von V heißen *Knoten* (englisch: *vertex*). E ist eine endliche Menge $\subseteq \binom{V}{2}$. Die Elemente von E heißen *Kanten* (englisch: *edge*).

P_n ist ein *Weg* (englisch: *path*) auf n Knoten.

C_n ist ein *Kreis* (englisch: *circle*) auf n Knoten.

K_n ist eine *Clique* auf n Knoten: jeder Knoten ist mit jedem verbunden.

Ein Graph ohne Kanten heißt *unabhängig*. Die Zahl n selbst bezeichnet einen unabhängigen Graph mit n Knoten.

Ein Graph heißt *zusammenhängend*, wenn je zwei Knoten durch einen Weg verbunden sind.

Ein Graph heißt *Baum*, wenn er zusammenhängend und kreisfrei ist.

Übung: Für Zahlen r und t mit $2r \leq t$: der *Kneser–Graph* $\mathsf{KG}(r,t)$ hat die Knotenmenge $V = \binom{t}{r}$ und die Kanten $E = \{xy \mid x, y \in V, x \cap y = \emptyset\}$. Der *Petersen–Graph* ist $\mathsf{KG}(2,5)$.

Graph–Operationen

Das *Komplement* $\overline{G}$ eines Graphen $G = (V,E)$ ist der Graph $(V, \binom{V}{2} \setminus E)$.

Übung: $\overline{C_5}, \overline{P_4}, K_n = \overline{n}$.

Die *(disjunkte) Summe* $G_1 + G_2$ von Graphen $G_i = (V_i, E_i)$ mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ist der Graph (V,E) mit $V = V_1 \cup V_2$ und $E = E_1 \cup E_2$.

Beispiel: $C_3 + C_4$ ist ein Dreieck neben einem Quadrat.

Für eine Zahl n bedeutet $n \cdot G = \underbrace{G + \ldots + G}_{n\text{–mal}}$.

Das *Produkt* $G_1 * G_2$ von Graphen $G_i = (V_i, E_i)$ mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ist der Graph (V,E) mit $V = V_1 \cup V_2$ und $E = E_1 \cup E_2 \cup \{x_1 x_2 \mid x_1 \in V_1, x_2 \in V_2\}$

Übung: $C_n * 1$ ist ein Rad. $2 * 2 * 2$ ist ein Oktaeder. Was ist $1 * 2 * 1$?

Hypergraphen

Für eine Zahl k: ein k–(Hyper–)Graph G ist ein Paar (V,E), mit V endlich und $E \subseteq \binom{V}{k}$.
(Also Graphen sind 2-Graphen.)

K_n ist eine k–*Hyper–Clique* auf n Knoten: $G = (V,E)$ mit $V = n$ und $E = \binom{V}{k}$.

3 Einfarbige Teilstrukturen

Eine k–(Kanten–)Färbung eines Graphen $G = (V,E)$ ist eine Abbildung $c : E \to k$.

Satz: Jede 2-Färbung eines K_6 enthält einen einfarbigen K_3.

Beispiel: Finde eine 2–Färbung des K_5 ohne einfarbigen K_3.

Für welche Zahlen n gilt: Jede Rot–Blau–Färbung des K_n enthält einen roten K_3 oder einen blauen K_4?

Satz: Für alle Zahlen a, b: es existiert N: für alle $n \geq N$: für alle 2–Färbungen c des K_n: c enthält einen K_a der einen Farbe oder einen K_b der anderen Farbe.

Definition: das kleinste solche N heißt Ramsey–Zahl $R(a,b)$.

Satz: $R(a,b) = R(b,a)$; $R(2,a) = a$; $R(a+1, b+1) \leq R(a, b+1) + R(a+1, b)$.

Folgerung: $R(a,b) \leq \binom{a+b-2}{a-1}$

Genaue Werte der R sind nur wenige bekannt.

2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	14	18	23	28	36	40 . . . 43
4	9	18	25	35 . . . 41				
5	14	25	43 . . . 49					

Um welche Ramsey–Zahl geht es hier? (Bundeswettbewerb Mathematik, 2. Runde, 1985)

Auf einer Party sind 512 Personen. Von je sechs kennen sich wenigstens zwei. Zeige, daß es sechs Leute gibt, von denen jeder jeden kennt.

Beweis: nimm irgendeinen. Der kennt entweder ≥ 256 Leute nicht, oder ≥ 256 Leute doch. Die anderen wegschicken, aus dem Rest irgendeinen auswählen, usw.

$R(3,4) > 8$. Betrachte $G = (V, E)$ mit $V = 8$, $E = \{xy \mid x - y \equiv 3, 4, 5 \pmod 8\}$.
Verallgemeinere zu $R(3, t+1) \geq 3t$.
$R(4,4) > 17$. Betrachte $G = (V, E)$ mit $V = 17$, $E = \{xy \mid x - y \equiv \pm 2^k \pmod{17}\}$.
$R(3,5) > 13$. Welche Kanten muß man zu C_{13} hinzunehmen?

4 Mehr Farben

Satz: Für alle $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ gilt: es gibt eine Zahl N: für alle $n \geq N$: für alle k–Färbungen c des K_n: es gibt eine Farbe i: c enthält einen i–farbigen K_{a_i}.
Definition: das kleinste solche N heißt $R(a_1, \ldots, a_k)$.
Satz/Beweis: $R(a_1, a_2, \ldots, a_k) \leq R(a_1, R(a_2, \ldots, a_k))$.
Beispiel: $R(2, a_2, \ldots, a_k)$, $R(3, 3, 3)$
Satz: $R(a_1+1, \ldots, a_k+1) \leq (2-k) + R(a_1, a_2+1, \ldots, a_k+1) + R(a_1+1, a_2, a_3+1, \ldots, a_k+1) + \ldots$.
Beispiel: $R(3, 3, 3)$

Die Zahlen 1, ..., 65 sind mit vier Farben gefärbt. Dann gibt es immer einfarbige a, b, c mit $a + b = c$. (Dabei ist $a = b$ zugelassen.)
Nenne die Färbung $f : 65 \to 4$.
Baue eine Clique auf $V = \{X_1, \ldots, X_{66}\}$, und färbe deren Kanten so: $X_a X_b \mapsto f(|a - b|)$.
Wende auf diesen Graphen einen geeigneten Ramsey–Satz an.

$$2^c < R(\underbrace{3, \ldots, 3}_{c\text{–mal}}) \leq \lfloor ec! \rfloor + 1$$

5 Untere Schranke

Wir zeigen: für n klein genug: es gibt eine 2–Färbung des K_n ohne einfarbigen K_a.
Anzahl aller 2–Färbungen $= 2^{\binom{n}{2}}$.
Anzahl aller möglichen Auswahlen von a Knoten aus n: $\binom{n}{a}$.
Diese ausgewählten werden einfarbig verbunden (2 Möglichkeiten), alle anderen Kanten (also $\binom{n}{2} - \binom{a}{2}$ Stück) egal.

Anzahl aller Färbungen, die wenigstens einen einfarbigen K_a haben: $\leq \begin{pmatrix} n \\ a \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot 2^{\binom{n}{2} - \binom{a}{2}}$

Für geeignetes n ist diese Zahl $< 2^{\binom{n}{2}}$.
Für dieses n muß es also Färbungen ganz ohne einfarbige K_a geben.

6 Ramsey–Zahlen für Hypergraphen

Eine c–Kantenfärbung eines k–Graphen (V, E) ist (wie früher) eine Abbildung $E \to c$.

Satz: Für alle Zahlen k: Für alle Zahlen c: für alle Zahlen $(a_1, \ldots, a_c)$: es gibt eine Zahl N: für alle $n \geq n$: für alle c–Kantenfärbungen einer k–Hyper–Clique auf n Knoten: es gibt ein i: die Färbung enthält ein k–Hyperclique der Größe a_i mit der einzigen Kantenfarbe i.

Definition: das kleinste solche N heißt Hyper–Ramsey–Zahl $R_k(a_1, \ldots, a_c)$.

Beweis (für $c = 2$):

Für $k = 1$ ist das der Dirichletsche Schubfachschluß.

$R_k(k, a_2) = a_2$.

Ansonsten (alle $a_i > k$): fixiere einen Punkt $v \in V$.

Das definiert auf $V \setminus \{v\}$ einen $(k-1)$–Graphen G' mit den Kanten mit $\{e \setminus \{v\} \mid e \in E, v \in e\}$.

Die c–Färbung f auf dem k–Graphen G definiert eine c–Färbung f' auf G'.

Wir suchen dort $(k-1)$–Cliquen der Farbe/Größe (A_1, A_2). Verbinde diese Hyper–Cliquen mit v. Folgt $R_k(a_1, a_2) \leq 1 + R_{k-1}(A_1, A_2)$.

Wir wählen $A_1 = R_k(a_1 - 1, a_2), A_2 = R_k(a_1, a_2 - 1)$. Nach Induktion existieren diese Zahlen bereits.

Aufgabe (Erdös/Szekeres): Für alle m gilt: es gibt N: für alle $n \geq N$: Für jede Anordnung A von n Punkten in der Ebene, in der keine drei Punkte auf einer Geraden liegen: es gibt eine Teilmenge $A' \subseteq A$ der Größe m, die ein konvexes Polygon bildet.

Hinweise. Aus beliebigen fünf Punkten der Ebene kann man immer vier auswählen, die ein konvexes Viereck bilden.

Ein Polygon mit Ecken P ist konvex $\iff$ jede vier–elementigen Teilmengen $P' \subseteq P$ ist ein konvexes Polygon.

Das gesuchte $N = R_4(5, m)$. Beispiel: $R_4(5, 5)$. Kommt eine riesige Zahl raus: $\leq 2^{21251} + 1$.

Welcher ist der tatsächlich geringste Wert von N, für $m = 5$?

7 Ramsey–Zahlen für andere Graphen

Satz: Für alle endlichen Folgen von Graphen $(G_1, \ldots, G_c)$: es gibt eine Zahl N: für alle $n \geq N$: für alle c–Färbungen des K_n: es exisitert i: in c gibt es einen G_i der Farbe i.

Definition: Das kleinste solche N heißt die Ramsey–Zahl $(G_1, \ldots, G_c)$.

Bei den üblichen Ramsey–Zahlen sind die G_i Cliquen.

Beweis: Setze $s_i = |V(G_i)|$. Dann $R(G_1, \ldots) \leq R(s_1, \ldots)$.

Satz: Für $s, t > 0$: für jeden Baum T mit t Knoten: $R(K_s, T) = (s-1)(t-1) + 1$.

Beweis: betrachte $(s-1)K_{t-1}$. Er enthält keinen T. Berechne das Komplement. Es enthält keinen K_s.

Andererseits betrachte beliebigen G mit $|V(G)| \geq (s-1)(t-1) + 1$. mit $K_s \not\subseteq \overline{G}$.

Satz: für $t, n \in \mathbb{N}$ und $t-1$ teilt $n-1$: Für jeden Baum T mit t Knoten: $R(T, 1{*}n) = t+n-1$.

Satz: Für $s \geq t \geq 1 : R(sK_2, tK_2) = 2s + t - 1$

$R(2K_3, K_3) = 8; R(2K_3, 2K_3) = 10.$

Satz: Für $s \geq t \geq 1, s \geq 2 : R(sK_3, tK_3) = 3s + 2t.$

$R(C_4, C_4) = 6$. Allgemein: Bestimme alle $R(G, H)$, wobei G und H Kreise oder Wege mit vier Knoten sind.

$R(K_4 - e, K_4) = 11.$

$R(\underbrace{C_4, \ldots, C_4}_{k\text{–mal}}) \leq k^2 + k + 1.$

8 Ramsey–Theorie für unendliche Graphen

Jeder unendliche Graph enthält eine unendliche Clique oder eine unendliche unabhängige Menge.

Satz: für alle k: für $c \in \mathbb{N}$: für jede Färbung $f : \binom{\mathbb{N}}{k} \to c$: es existiert unendliche Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ und Farbe i: für alle $m \in \binom{M}{k} : f(m) = i$.

Beweis durch Induktion nach c und k.

Jede 4×7–Matrix mit Einträgen aus $2 = \{0, 1\}$ enthält eine einfarbige 2×2–Matrix.

Finde eine 4×6–Matrix ohne einfarbiges 2×2.

Enthält jede unendliche Matrix $M : \mathbb{N}^2 \to c$ eine (in beide Richtungen) unendliche einfarbige Untermatrix? Das heißt: gibt es eine Farbe $i \in c$ und unendliche Mengen $X, Y \subseteq \mathbb{N}$: $\forall x \in X : \forall y \in Y : M(x, y) = i$?

Für jede unendliche Menge S von Punkten in der Ebene: Es gibt eine unendliche Teilmenge $A \subseteq S$: entweder A ist in einer Geraden enthalten oder keine drei Punkte von A liegen auf einer Geraden.

Es gibt eine unendliche Menge $M \subseteq \mathbb{N}$: für alle $x, y \in M$: die Zahl $x + y$ hat eine gerade Anzahl von Primfaktoren.

9 Noch mehr Ramsey

Für eine Punktmenge P: Wir schreiben $\mathbb{R}^d \to (P)_c$, wenn jede c–Färbung des $\mathbb{R}^d$ ein einfarbiges P' enthält, das zu P kongruent ist.

Für $S =$ zwei Punkte im Abstand 1: $\mathbb{R}^2 \to (S)_3$ und $\mathbb{R}^2 \not\to (S)_7$.

Für $Q =$ die vier Ecken des Einheitsquadrats: $\mathbb{R}^6 \to (Q)_2$.

Satz (van der Waerden): Für alle $p, c \in \mathbb{N}$: existiert N: für alle $n \geq N$: jede c–Färbung von $\{1, \ldots, n\}$ enthält eine einfarbige arithmetische Folge der Länge p.

Das kleinste solche N heißt $W(p, c)$. Finde $W(3, 2), W(3, 3)$.

Literatur

[AZ98] Martin Aigner and Günter M. Ziegler. *Proofs from The Book*. Springer, 1998.

[Bol79] Belá Bollobás. *Graph Theory*. Springer, 1979.

[Die96] Reinhard Diestel. *Graphentheorie*. Springer, 1996.

[Hal89] Rudolf Halin. *Graphentheorie*. Akademie–Verlag Berlin/Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt, 1989.