Mehr als unendlich...

Dieser Text ist eine Zusammenfassung des Begrüßungsvortrags vom Wochendseminars der Leipziger Schülergesellschaft Mathematik (LSGM) vom 26.-28.11.1999. Eine leicht geänderte Version erscheint im Grips-Journal 4/99.

1 Wie geht das eigentlich mit dem Zählen?

Wer mehr über das Unendliche lernen möchte, muß ersteinmal genau über das Endliche Bescheid wissen. Deshalb fangen wir mal ganz einfach an und fragen uns, wieviele Symbole das hier sind:

✍ ❁ ✹ ✎ ✉ ✧ ❄ ❤ ☺

Nun, das mit dem Zählen ist für uns kein Problem, und wir finden schnell die Antwort: Es sind 9 Symbole.
Aber wie sind wir – mal ganz formal – darauf gekommen? Die Frage klingt kindisch, aber wir müssen das jetzt schon genau verstehen, wenn wir nachher unendliche Mengen "zählen" wollen!
Was wir gemacht haben, ist (wenigstens im Geiste), den Symbolen jeweils Zahlen zuzuordnen, etwa so:

✍	❁	✹	✎	✉	✧	❄	❤	☺
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Wir haben also eine Zuordnung zwischen den Symbolen und den Zahlen von 1 bis 9 hergestellt, die bestimmte Eigenschaften hat: Jedes Symbol wird genau einer Zahl zugeordnet (deswegen nennen wir diese Zuordnung eine "Abbildung") und umgekehrt. Die letztere Eigenschaft werden wir nun nochmal etwas analysieren.

2 Bijektive Abbildungen

Wir wollen zwei kompliziert klingende Begriffe definieren:

Definition 1 (Injektiv) *Eine Abbildung f von X nach Y ist injektiv, wenn jeweils zwei verschiedene Elemente in X auf zwei verschiedene Elemente in Y abgebildet werden.*

Folgende Abbildung ist also injektiv:

✍	❁	✹	✎	
↓	↓	↓	↓	
✉	✧	❄	❤	☞

Und folgende Abbildung ist nicht injektiv, denn der Bleistift und der Smilie werden auf dasselbe Element, nämlich das Herz abgebildet:

✍	❁	✹	✎	☺
↓	↓	↓	↓ ↙	
✉	✧	❄	❤	

Ein weiteres Beispiel wäre die Abbildung $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad \mathbf{f(x) := x}$. Sie ist injektiv, hingegen ist $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad \mathbf{f(x) := x^2}$ nicht injektiv, da z.B. $+1$ und -1 auf dasselbe Element abgebildet werden.
Wir brauchen aber noch einen zweiten Begriff:

Definition 2 (Surjektiv) *Eine Abbildung f von X nach Y ist surjektiv, wenn jedes Element in Y von ihr "erreicht" wird, das heißt: Jedes Element $y \in Y$ hat ein "Urbild", ein Element $x \in X$, das von f auf y abgebildet wird.*

Folgende Abbildung ist also surjektiv (obwohl sie nicht injektiv war, wie wir gesehen hatten):

☛	❁	✹	✎	☺
↓	↓	↓	↓	↙
✉	✧	❄	❤	

Diese Abbildung hier ist allerdings nicht surjektiv, denn der Smilie hat kein "Urbild": Kein Pfeil endet dort.

☛	❁	✹	✎	
↓	↓	↓	↓	
✉	✧	❄	❤	☺

Die Abbildung $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad \mathbf{f(x) := x}$ ist auch surjektiv, hingegen ist $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad \mathbf{f(x) := x^2}$ nicht surjektiv, da z.B. -1 nicht von ihr "erreicht" wird, denn es gibt keine relle Zahl, deren Quadrat negativ ist!
So, und nun packen wir unsere beiden Definitionen zusammen:

Definition 3 (Bijektiv) *Eine Abbildung, die injektiv und surjektiv ist, nennen wir bijektiv (oder "eins-zu-eins").*

Folgende Abbildung ist also bijektiv:

☛	✉	✹	✎
↓	↓	↓	↓
✧	❄	❤	☺

Wir sehen, daß beide Mengen in obigem Beispiel gleichviele Elemente hatten. Das ist kein Zufall, sondern immer so. (Ihr könnt Euch ja mal überlegen, warum!) Deshalb definieren wir:

Definition 4 (Gleichmächtig) *Zwei Mengen sind gleichmächtig, wenn es zwischen ihnen eine bijektive Abbildung gibt.*

Was haben wir jetzt damit gewonnen? Wir wissen doch eh, daß die beiden Mengen dann gleichviele Elemente haben! – Vorsicht: Das wissen wir ja nur bei endlichen Mengen! Aber alles, was wir jetzt definiert haben, gilt auch für unendliche Mengen, ja in der Tat haben wir als Beispiele sogar schon unendliche Mengen (wie die Menge der rellen Zahlen) betrachtet!
Deshalb haben wir jetzt alles beisammen, was wir benötigen, um uns nun ein wenig mit den unendlichen Mengen zu beschäftigen, und dort etwas Ordnung hineinzubringen.

3 Unendliche Mengen

Was gibt es denn so für unendliche Mengen? Nun, zum Beispiel die natürlichen Zahlen, die geraden Zahlen, die ganzen Zahlen, die rationalen Zahlen, die reellen Zahlen und so weiter.
Wir ordnen sie jetzt mit folgender Definition:

Definition 5 (Abzählbar/Überabzählbar) *Eine unendliche Menge heißt abzählbar, wenn sie gleichmächtig wie* $\mathbf{N}$ *ist, sonst heißt sie überabzählbar.*

Und nun schauen wir uns unsere Mengen mal der Reihe nach an, wir beginnen mit den geraden Zahlen und betrachten folgende Abbildung:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \dots \end{array}$$

Nun, wir können uns davon überzeugen, daß diese Abbildung bijektiv ist. Das heißt aber, daß die geraden Zahlen gleichmächtig sind wie die natürlichen, und das obwohl es doch eigentlich doppelt soviele sind!!!
Wir sehen, da ist mit unserer Anschauung etwas schiefgelaufen. Und wenn wir nicht ordentlich untersucht hätten, was Zählen eigentlich bedeutet, hätten wir nie gemerkt, daß es in Wirklichkeit "gleichviele" gerade wie natürliche Zahlen gibt!
Wir haben da ein schönes Beispiel für die Eigenschaft unendlicher Mengen, daß eine echte Teilmenge wieder gleichmächtig mit der gesamten Menge sein kann. Das geht bei endlichen Mengen natürlich nicht: Wäre ja auch noch schöner, wenn jemand von einer Menge Weihnachtsplätzchen etwas wegnehmen könnte, und am Schluß wären immer noch genausoviele übrig! – Bei einer unendlichen Menge von Weihnachtsplätzchen ginge das aber...
Nun gut, wie sieht es denn mit den ganzen Zahlen aus? Sind das wenigstens mehr? Nun, wir definieren die folgende Abbildung (wer mag, kann sie auch mathematisch aufschreiben):

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & 5 & 3 & 1 & 2 & 4 & \dots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \dots & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \dots \end{array}$$

Diese Abbildung ist ebenfalls bijektiv, d.h. $\mathbf{Z}$ ist abzählbar.
Und nun die rationalen Zahlen. Das sind doch sicher mehr, oder?
Das könnte man in der Tat meinen, aber auch hier finden wir wieder eine Methode, wie wir sie abzählen können. Wir machen es uns hier etwas einfacher und zählen nur die positiven rationalen Zahlen ab, aber wie dann der Rest geht, könnt Ihr vermutlich ahnen, wenn Ihr an die Abzählung von $\mathbf{Z}$ denkt, die wir gerade durchgeführt haben.
Zunächst schreiben wir nun die positiven rationalen Zahlen so auf:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \dots \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \dots \\ \dots & & & & \end{array}$$

Jetzt können wir mit dem Abzählen oben links beginnen (bei $\frac{1}{1}$), dann eins nach unten, dann diagonal nach rechts oben zur $\frac{2}{1}$, dann eins nach rechts, dann die ganze Diagonale nach links unten durch bis $\frac{1}{3}$ und so weiter. Wenn wir einen Bruch schon einmal hatten (z.B. ist $\frac{1}{1} = \frac{2}{2}$), dann überspringen wir ihn einfach. Auf jeden Fall können wir so jedem Bruch eine natürliche Zahl zuordnen und umgekehrt, wir haben unsere bijektive Abbildung gefunden, also: Auch die ganzen Zahlen sind gleichmächtig mit den natürlichen Zahlen!
Ein letzter Versuch, eine überabzählbare Menge zu finden: Wie sieht es denn mit den rellen Zahlen aus?
Nun, versucht am besten gar nicht, dort eine bijektive Abbildung zu den natürlichen Zahlen zu finden: Es gibt keine! Die rellen Zahlen sind tatsächlich überabzählbar! Dafür gibt es einen schönen Beweis, den Cantor Ende des 19.Jahrhunderts gefunden hat, das Cantorsche Diagonalverfahren. Er ist so elegant und einfach, daß ich ihn Euch erklären werde:

Wir werden sogar zeigen, daß sogar schon $]0,1[$ überabzählbar ist: Nehmen wir mal an, wir hätten eine bijektive Abbildung von $\mathbf{N}$ nach $]0,1[$, dann könnten wir die ganzen Zahlen in $]0,1[$ in einer Liste aufschreiben. Wenn wir nun die Dezimalschreibweise benutzen (also z.B. $0,1234$...), dann können wir nun immer eine Zahl finden, die doch noch nicht in der Liste war! Hier eine Beispielliste:

$$
\begin{array}{ccl}
1 & \to & 0\,,\,3\;6\;7\;9 \quad \ldots \\
2 & \to & 0\,,\,2\;5\;8\;4 \quad \ldots \\
3 & \to & 0\,,\,1\;6\;1\;5 \quad \ldots \\
4 & \to & 0\,,\,3\;5\;4\;2 \quad \ldots \\
\ldots & \to & \quad\;\ldots
\end{array}
$$

Wir fangen einfach mit "0," an und gehen dann die Diagnoale von oben links nach unten rechts (also ins Unendliche) ab. Jede Ziffer, die ungleich der 1 ist, ändern wir nun in eine 1, aber jede 1 in eine 2, so daß bei unserer neuen Zahl am Ende mit jeder Zahl in der Liste mindestens eine Ziffer nicht mehr übereinstimmt. (Hier wäre die Zahl also $0,1121\ldots$) – Damit kann sie aber nicht in der Liste stehen! Und so einfach haben wir gezeigt, daß eine vollständige Liste nicht existieren kann!
So, nun haben wir also etwas Überblick in den unendlichen Mengen gewonnen. Da stellen wir nun eine kühne Frage: Gibt es eigentlich Mengen, die "weniger mächtig" als $\mathbf{R}$, aber "mächtiger" als $\mathbf{N}$ sind?
Die Antwort ist überraschend: Es gibt nämlich keine Antwort!
Und zwar nicht, weil man es noch nicht weiß. – Im Gegenteil konnten findige Mathematiker beweisen, daß weder gezeigt werden kann, daß eine solche Menge existiert, noch, daß sie nicht existiert!
Der Hintergrund ist folgender: Zum Beweisen braucht man ja immer irgendwelche Grundannahmen (Axiome). In der Euklidischen Geometrie sieht man das vielleicht am besten: Da muß man auch wissen, daß sich zwei Parallelen nicht schneiden, sonst kann man nicht sehr viel beweisen. Hier geht man nun von den Axiomen der Mengenlehre aus. Und die reichen eben nicht aus, um die Existenz dieser seltsamen Menge "zwischen $\mathbf{N}$ und $\mathbf{R}$" zu beweisen oder zu widerlegen. Anders gesagt: Man kann die Existenz oder die Nichtexistenz dieser Menge annehmen, ohne daß es einen Widerspruch damit geben wird.
So, dieser Artikel ist nur endlich lang, und ist deshalb nun zuende. Aber ganz zuende ist er doch noch nicht: Ein paar Übungsaufgaben folgen...

Marc Oliver Rieger

4 Übungen

Aufgabe 1

a) Untersuche folgende Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität:
(i) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) := |x|$
(ii) $g : [0,1] \to \mathbf{R}, \quad g(x) := |x|$
(iii) $h : [-1,1] \to [0,1], \quad h(x) := |x|$
b) Konstruiere eine bijektive Abbildung von $]0,1[$ nach $\mathbf{R}$.
(Hinweis: Verwende dafür z.B. eine Tangensfunktion!)

Aufgabe 2 (Hilberts Hotel$\star\star\star$)

Ein Hotel habe unendlich viele Zimmer mit den Zimmernummern $1,2,3,\ldots$, die alle belegt sind. Wie kann man dennoch einen zu spät kommenden Gast unterbringen? Geht das auch mit (abzählbar) unendlich vielen Gästen?
Begründe Deine Antwort!