Die Cauchysche Funktionalgleichung

G. Prokert
prokert@mathematik.uni-leipzig.de

Dieses Skript gibt den Inhalt des Vortrags "Funktionalgleichungen II" auf der Winterschule der LSGM in Colditz, Februar 2001, wieder. Es basiert (ebenso wie der Vortrag) im Wesentlichen auf [1]. Über Fragen oder Kommentare (via oben angegebener e-mail-Adresse) würde ich mich freuen.

Die Gleichung

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{1}$$

für eine a priori unbekannte Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst *Cauchysche Funktionalgleichung*.

Man überprüft leicht: Sind f, f_1 und f_2 Lösungen von (1), so gilt dies auch für αf mit beliebigem $\alpha \in \mathbb{R}$ und für $f_1 + f_2$. Daher ist folgende Normierungsbedingung sinnvoll:

$$f(1) = 1 \tag{2}$$

(Aus jeder Lösung von (1) mit $f(1) \neq 0$ erhält man eine Lösung von (1) und (2) durch Division durch $f(1)$.)

Man sieht sofort, dass die Funktion f mit $f(x) = x$ die Gleichungen (1) und (2) erfüllt. Diese Funktion nennen wir die *triviale Lösung* von (1),(2). Uns interessiert natürlich die Frage, ob es weitere (nichttriviale) Lösungen von (1),(2) gibt. Der folgende Satz beantwortet diese Frage mit nein, wenn der Definitionsbereich auf die rationalen Zahlen eingeschränkt wird.

Satz 1 *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ erfülle (1),(2). Dann gilt*

$$f(x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{Q}.$$

Beweis: Schritt 1: Durch vollständige Induktion zeigen wir

$$f(nx) = nf(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

- Induktionsanfang: Setzt man $x = y = 0$ in (1), erhält man $2f(0) = f(0)$ und somit $f(0) = 0$. Damit ist (3) für $n = 0$ bewiesen.
- Induktionsschritt: Es gelte $f(nx) = nf(x)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt wegen (1)

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x).$$

Schritt 2: Setzen wir in (1) $y = -x$, so ergibt sich

$$f(-x) = -f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{4}$$

wegen $f(x) + f(-x) = f(x - x) = f(0) = 0$.

Schritt 3: Da nach (3)

$$nf\left(\frac{x}{n}\right) = f\left(n\frac{x}{n}\right) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle positiven $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt

$$f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{f(x)}{n} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}. \tag{5}$$

Schritt 4: Sei nun $x \in \mathbb{Q}$ beliebig, d.h. $x = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Dann gilt wegen (2), (3), (4) und (5)

$$f(x) = f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{f(m)}{n} = \begin{cases} \frac{f(m\cdot 1)}{n} = \frac{m}{n} f(1) = x & (m \geq 0), \\ \frac{-f(-m)}{n} = \frac{-(-m)}{n} = x & (m < 0). \end{cases}$$

■

Um das Verhalten von Lösungen der Cauchyschen Funktionalgleichung auch für irrationale Argumente zu untersuchen, stellen wir zunächst folgende zusätzliche Bedingung: f sei auf irgendeinem (beliebig kleinen!) Intervall beschränkt, d.h.

$$\exists\, a, b, m, M \in \mathbb{R}: \quad a < b,\ m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]. \tag{6}$$

Es existieren keine nichttrivialen Lösungen, die diese Bedingung erfüllen, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 2 (Darboux) *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ erfülle (1),(2) und (6). Dann gilt*

$$f(x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Beweis: Schritt 1: Wir definieren die Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = f(x) - x$$

und werden zeigen, dass $g(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Zunächst gilt $g(r) = 0$ für alle $r \in \mathbb{Q}$ wegen Satz 1, und

$$g(x) + g(y) = f(x) + f(y) - x - y = f(x + y) - (x + y) = g(x + y),$$

d.h. g erfüllt (1).

Schritt 2: Sei $x \in [a, b]$. Dann gilt wegen (6)

$$\begin{aligned} g(x) &\leq M - a =: \widetilde{M}, \\ g(x) &\geq m - b =: \widetilde{m}, \end{aligned}$$

d.h. auch g ist auf $[a, b]$ beschränkt (durch $\widetilde{m}$ und $\widetilde{M}$).

Schritt 3: Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann existiert ein $r \in \mathbb{Q}$, so dass $x + r \in [a, b]$. Wegen Schritt 2 ist $\widetilde{m} \leq g(x + r) \leq \widetilde{M}$. Andererseits ist aber

$$g(x + r) = g(x) + g(r) = g(x)$$

wegen $g(r) = 0$, also ist g auf ganz $\mathbb{R}$ durch $\widetilde{m}$ und $\widetilde{M}$ beschränkt, d.h.

$$\widetilde{m} \leq g(x) \leq \widetilde{M} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Schritt 4: Wir verfahren indirekt und nehmen an, es gäbe ein $x \in \mathbb{R}$ mit $g(x) \neq 0$. Ist $g(x) > 0$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $ng(x) > \widetilde{M}$ gilt. Da g die Gleichung (1) erfüllt, gilt wegen (3) auch $g(nx) = ng(x) > \widetilde{M}$. Dies steht im Widerspruch zum Resultat von Schritt 3. Ist $g(x) < 0$, so zeigt man in analoger Weise $g(nx) < \widetilde{m}$ für ein hinreichend groß gewähltes $n \in \mathbb{N}$, was ebenfalls im Widerspruch zu Schritt 3 steht. Die Annahme war also falsch. ■

Der eben bewiesene Satz kann wie folgt umformuliert werden:

Nichttriviale Lösungen der Cauchyschen Funktionalgleichung sind (falls es sie gibt) auf keinem – noch so kleinen – Intervall beschränkt!

Ein solches Verhalten ist recht ungewöhnlich. Es lässt sich sogar zeigen, dass der Graph einer solchen Funktion "wie eine Staubwolke aussieht". Um dies zu präzisieren, definieren wir zu jedem Punkt $P = (x_0, y_0)$ der x, y-Ebene und zu jeder positiven rellen Zahl a das Quadrat

$$Q(P, a) := \{(x, y) \mid |x - x_0| < a, |y - y_0| < a\}.$$

Man überprüft leicht, dass $Q(P, a)$ tatsächlich ein Quadrat mit Seitenlänge $2a$ und Mittelpunkt P ist. Für unsere Zwecke genügt es festzuhalten, dass $Q(P, a)$ eine "Umgebung" des Punktes P definiert. Wählen wir insbesondere a klein, so liegen alle Punkte in $Q(P, a)$ "nahe bei P". (Aufgabe: Wie groß ist der Abstand zwischen P und einem beliebigen Punkt aus $Q(P, a)$ höchstens?)

Der folgende Satz gibt eine exakte Formulierung für den anschaulichen Begriff des "Staubwolkencharakters" von nichttrivialen Lösungen der Cauchyschen Funktionalgleichung:

Satz 3 *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ erfülle (1) und (2), und f sei nicht trivial, d.h. es gebe ein $x_2 \in \mathbb{R}$ mit*

$$x_2 \neq f(x_2).$$

Ferner seien $P = (x_0, y_0)$ und $a > 0$ vorgegeben. Dann gibt es $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}$ mit $\overline{y} = f(\overline{x})$ und $(\overline{x}, \overline{y}) \in Q(P, a)$.

Die Behauptung des Satzes lässt sich auch geometrisch formulieren:

In jedem noch so kleinen Quadrat der x, y-Ebene liegt mindestens ein Punkt des Graphen von f.

Es sei hier nochmals betont, dass auch Satz 3 keine Existenzaussage ist, d.h. er besagt nicht, dass es ein solches f tatsächlich gibt.

Beweis: Schritt 1: Wir wählen ein $x_1 \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ und betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha x_1 + \beta x_2 & = & x_0, \\ \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) & = & y_0 \end{array}\right\} \tag{7}$$

mit den Unbekannten α und β. Wegen $x_1 = f(x_1)$, $x_2 \neq f(x_2)$ und $x_1, x_2 \neq 0$ ist dieses Gleichungssystem stets eindeutig lösbar. (Aufgabe: Man prüfe das nach!)

Schritt 2: Wir nähern α und β durch rationale Zahlen r_1 und r_2 an:

$$\begin{array}{rcll} \alpha & = & r_1 + h_1, & r_1 \in \mathbb{Q}, \\ \beta & = & r_2 + h_2, & r_2 \in \mathbb{Q}. \end{array}$$

Die Näherungen werden dabei genau genug gewählt, dass

$$|h_i| < \frac{a}{2|x_i|} \text{ und } |h_i| < \frac{a}{2|f(x_i)|} \tag{8}$$

für $i = 1, 2$ gilt. Wir setzen

$$\begin{aligned} \overline{x} &:= r_1 x_1 + r_2 x_2, \\ \overline{y} &:= f(\overline{x}). \end{aligned}$$

Schritt 3: Da die r_i rationale Zahlen sind, gibt es $m_i \in \mathbb{Z}$ und $n_i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ mit $r_i = \frac{m_i}{n_i}$ $(i = 1, 2)$. Wegen (3) und (5) gilt also

$$f(r_i x) = f\left(\frac{m_i}{n_i} x\right) = \frac{m_i}{n_i} f(x) = r_i f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, und deshalb

$$\overline{y} = f(r_1 x_1 + r_2 x_2) = f(r_1 x_1) + f(r_2 x_2) = r_1 f(x_1) + r_2 f(x_2).$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung folgt hieraus, aus (7) und (8)

$$\begin{aligned} |\overline{x} - x_0| &= |(r_1 - \alpha)x_1 + (r_2 - \beta)x_2| \leq |h_1||x_1| + |h_2||x_2| < \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a, \\ |\overline{y} - y_0| &= |(r_1 - \alpha)f(x_1) + (r_2 - \beta)f(x_2)| \leq |h_1||f(x_1)| + |h_2||f(x_2)| < \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a, \end{aligned}$$

also $(\overline{x}, \overline{y}) \in Q(P, a)$. ∎

Abschließend wollen wir ein Beispiel für eine nichttriviale Lösung von (1), (2) angeben. Zur Vereinfachung beschränken wir den Definitionsbereich der zu konstruierenden Funktion f auf die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x = r_1 + \sqrt{2} r_2 + \sqrt{3} r_3,\ r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{Q}\}.$$

Entscheidend ist nun folgende einfache Hilfsaussage:

Lemma 4 *Für alle $x \in M$ is die Darstellung*

$$x = r_1 + \sqrt{2} r_2 + \sqrt{3} r_3,\ r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{Q}, \tag{9}$$

eindeutig.

Beweis: Der Beweis erfolgt indirekt; es genügt dann zu zeigen, dass aus

$$s_1 + \sqrt{2} s_2 + \sqrt{3} s_3 = 0,\ s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{Q},$$

bereits $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ folgt. Die Details bleiben dem interessierten Leser als Aufgabe überlassen. ∎

Wir wählen nun Zahlen $c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, so dass $c_2 \neq \sqrt{2}$ oder $c_3 \neq \sqrt{3}$ gilt und setzen

$$f(x) := r_1 + c_2 r_2 + c_3 r_3 \qquad \forall x \in M,$$

wobei r_i die rationalen Zahlen aus (9) sind. Dann überprüft man leicht, dass f tatsächlich (1) und (2) erfüllt, aber $f(x) = x$ nicht für alle x aus M gilt. f ist also eine nichttriviale Lösung der Cauchyschen Funktionalgleichung und besitzt daher die "Staubwolkeneigenschaft".

Literatur

[1] SPRENGEL, H.-J., WILHELM, O.: *Funktionen und Funktionalgleichungen*, Mathematische Schülerbücherei 114, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1984