Kreispotenz und Spiegelung am Kreis

Klaus-Detlef Kürsten

30. Juni 2007

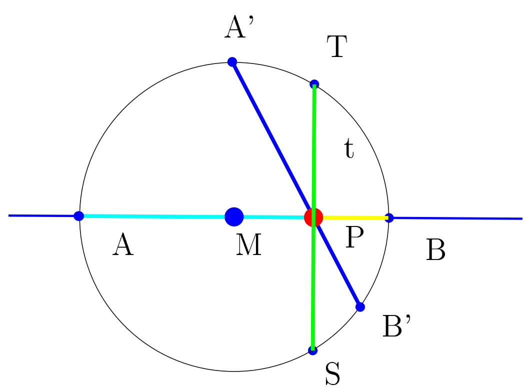
1 Kreispotenz

Der Abstand der Punkte A, B der Euklidischen Ebene wird im Folgenden mit $|AB|$ bezeichnet.

Definition 1: Für einen Kreis K mit Mittelpunkt M und Radius r und einen Punkt P wird

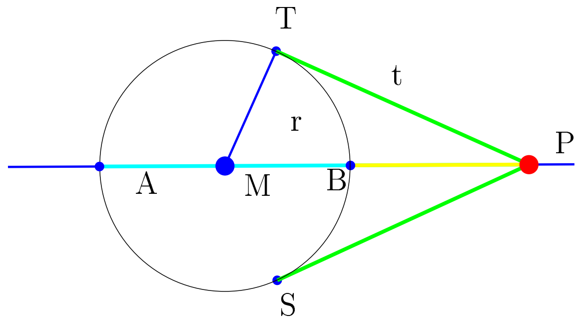
$$K(P) \stackrel{def}{=} |MP|^2 - r^2$$

Kreispotenz von P bezüglich K genannt.



Ist P innerer Punkt von K und sind T, S Schnittpunkte einer Geraden g, die in P eine Gerade durch M und P im rechten Winkel schneidet, so gelten nach Sehnensatz für die Sehnenabschnitte $t = |PT| = |PS|$ die Gleichungen

$$-K(P) = r^2 - |MP|^2 = (r - |MP|) \cdot (r + |MP|) = t^2.$$



Ist P äußerer Punkt von K und sind T, S die Berührungspunkte der Tangenten durch P an den Kreis K, so gelten nach Sekanten-Tangenten-Satz für die Tangentenabschnitte $t = |PT| = |PS|$ die Gleichungen

$$K(P) = |MP|^2 - r^2 = (|MP + r|) \cdot (|MP| - r) = t^2.$$

Aufgabe 1: Man beweise folgende Aussage:
Ist $t > 0$ eine vorgegebene Streckenlänge, so ist der geometrische Ort aller Punkte P mit $K(P) = t^2$ ein Kreis K' mit Mittelpunkt M und Radius r', wobei r' durch die Gleichung $r'^2 = t^2 + r^2$ bestimmt ist.

Wir betrachten nun zwei Kreise K_1 und K_2 mit Mittelpunkten M_1 bzw. M_2 und Radien r_1 bzw. r_2 und interessieren uns für Punkte P, für die Kreispotenzen $K_1(P)$ und $K_2(P)$ bezüglich dieser Kreise übereinstimmen.

Sind K_1 und K_2 verschiedene konzentrische Kreise, so gibt es offenbar keinen Punkt mit $K_1(P) = K_2(P)$.

Schneiden oder berühren sich K_1 und K_2 in P, so gilt $K_1(P) = K_2(P) = 0$.

Aufgabe 2: Man beweise folgende Aussage:
Sind K_1 und K_2 nichtkonzentrische Kreise und gilt $K_1(P) = K_2(P)$ für einen Punkt P, so gilt $K_1(Q) = K_2(Q)$ für alle Punkte Q der Geraden g durch P, die senkrecht zur Geraden g_{M_1,M_2} durch M_1 und M_2 ist.

Aufgabe 3: Man beweise folgende Aussage:
Sind K_1 und K_2 nichtkonzentrische Kreise und ist eine Streckenlänge t größer als $1/2\,|M_1M_2|$, so werden Radien r_3, r_4 durch die Gleichungen ${r_3}^2 = t^2 + {r_1}^2$ und ${r_4}^2 = t^2 + {r_2}^2$ eindeutig bestimmt und die Kreise K_3 und K_4 mit Mittelpunkten M_1 bzw. M_2 und Radien r_3 bzw.

r_4 schneiden sich in zwei Punkten, deren Kreispotenz bezüglich K_1 und K_2 jeweils gleich t^2 ist. Dies sind auch die einzigen zwei Punkte, für die die Kreispotenz bezüglich beider Kreise gleich t^2 ist.

Satz 1: Der geometrische Ort aller Punkte P, die bezüglich zweier nichtkonzentrischer Kreise K_1 und K_2 die gleiche Kreispotenz haben, ist eine Gerade g, die senkrecht zur Verbindungsgeraden der Mittelpunkte der Kreise ist.

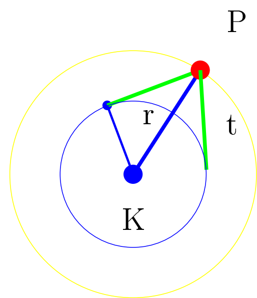
Beweis: Nach Aufgabe 3 gibt es Punkte, die bezüglich K_1 und K_2 die gleiche Kreispotenz haben.
Nach Aufgabe 2 enthält der betrachtete geometrische Ort eine Gerade g, die senkrecht zur Verbindungsgeraden g_{M_1,M_2} der Mittelpunkte der Kreise ist.
Um den Beweis zu vollenden, beweisen wir indirekt, dass unser geometrischer Ort keine weiteren Punkte enthält. Wir nehmen also an, das $K_1(P) = K_2(P)$ für einen Punkt P gilt, der nicht auf g liegt. Dann liegt nach Aufgabe 2 die Gerade g', die durch P geht und senkrecht zu g_{M_1,M_2} ist, ebenfalls im betrachteten geometrischen Ort. Wählt man nun t hinreichend groß (z. B. größer als die Summe der Abstände von M_2 zu g und g'), so gilt $K_1(Q) = K_2(Q) = t^2$ im Widerspruch zur Aufgabe 3 mindestens für die vier Schnittpunkte des in Aufgabe 1 betrachteten (jetzt zu K_2 konzentrischen) Kreises mit g bzw. g'.

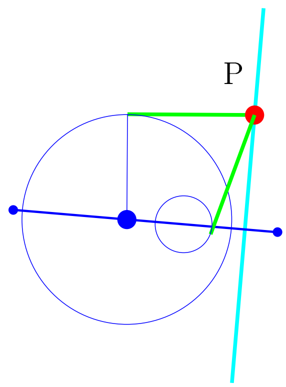
Bemerkung: Ein Punkt M der Geraden g_{M_1,M_2} erfüllt die Gleichung $K_1(M) = K_2(M)$ genau dann, wenn gilt $K_1(M) - K_2(M) = |M_1M|^2 - |M_2M|^2 - ({r_1}^2 - {r_2}^2) = (|M_1M| + |M_2M|)\cdot(|M_1M| - |M_2M|) - (r_1 + r_2)\cdot(r_1 - r_2) = 0$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man $r_1 \geq r_2$ voraussetzen. Dann ist entweder $|M_1M| + |M_2M|$ oder $|M_1M| - |M_2M|$ gleich dem vorgegebenen Abstand $|M_1M_2|$. Ein alternativer Beweis von Satz 1 lässt sich nun auf der Grundlage von Aufgabe 2 und der folgenden Aufgabe 4 führen.

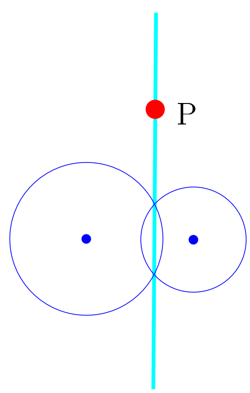
Aufgabe 4: Man weise nach, dass sich $|M_1M|$ und $|M_2M|$ aus den gerade diskutierten Gleichungen eindeutig bestimmen lassen.

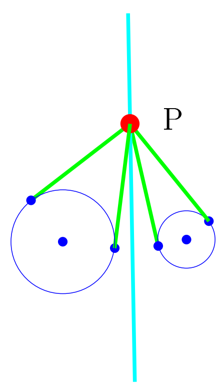
Definition 2: Der geometrische Ort aller Punkte P, die bezüglich zweier nichtkonzentrischer Kreise K_1 und K_2 die gleiche Kreispotenz haben, wird Potenzgerade oder Potenzlinie dieser Kreise genannt.

Aufgabe 5: Wie kann man die Potenzgerade zweier Kreise auf der Grundlage von Aufgabe 3 konstruieren?









Definition 3: Ein Punkt P wird Potenzzentrum dreier paarweise verschiedener Kreise genannt, wenn seine Kreispotenzen bezüglich aller dreier Kreise übereinstimmen.

Aufgabe 6: Man beweise folgende Aussage:
Liegen die Mittelpunkte der drei Kreise K_1, K_2 und K_3 nicht auf einer Geraden, so ha-

ben diese Kreise ein eindeutig bestimmtes Potenzzentrum, welches zugleich Schnittpunkt der drei für jeweils zwei der Kreise definierten Potenzgeraden ist. Liegen die Mittelpunkte dreier paarweise verschiedener Kreise auf einer Geraden, so haben diese Kreise kein Potenzzentrum.

Aufgabe 7: Man gebe eine Konstruktion der Potenzlinie zweier nichtkonzentrischer Kreise K_1 und K_2 an, die darauf beruht, dass man das Potenzzentrum von Kreisen K_1, K_2 und K_3 mit der Eigenschaft dass K_3 sowohl K_1, als auch K_2 schneidet, sehr leicht konstruieren kann (falls es existiert).

Definition 4: Der Schnittwinkel zweier sich im Punkt S schneidender Kreise K_1, K_2 ist die kleinste Größe eines Winkels mit Scheitelpunkt S, dessen einer Schenkel auf der Tangente zu K_1 und dessen anderer Schenkel auf der Tangente zu K_2 liegt, wobei jeweils S der Berührungspunkt der Tangente ist.

Aufgabe 8: Man bestimme den geometrischen Ort der Mittelpunkte von Kreisen, die zwei gegebenen nichtkonzentrischer Kreise K_1 und K_2 (beide gleichzeitig) im rechten Winkel schneiden.

Hinweis: Man zeige, dass dieser geometrische Ort Teil der Potenzgerade von K_1 und K_2 ist.

Aufgabe 9: Man konstruiere einen Kreis, der jeden von drei gegebenen Kreisen K_1, K_2 und K_3, deren Mittelpunkte nicht auf einer Geraden liegen, im rechten Winkel schneidet.

Hinweis: Man zeige, dass der Mittelpunkt des gesuchten Kreises mit dem Potenzzentrum der drei gegebenen Kreise zusammenfallen muss.

Aufgabe 10: Wie sollte man die Potenzgerade eines Kreises K_1 und eies Punktes P_2 definieren. Wie lässt sie sich als geometrischer Ort beschreiben? Wie kann sie konstruiert werden?

Aufgabe 11: Man konstruiere einen Kreis, der den gegebenen Kreis K_1 im rechten Winkel schneidet und durch zwei gegebenen Punkte P_2 und P_3 geht.

Aufgabe 12: Man konstruiere einen Kreis, der den gegebenen Kreis K_1 berührt und durch zwei gegebenen Punkte P_2 und P_3 geht.

Hinweis: Sei K_4 ein Kreis durch P_2 und P_3, der K_1 in zwei Punkten schneide und bezeichne K den gesuchten Kreis. Man zeige, dass die Berührungstangente der Kreise K_1 und K durch den Schnittpunkt der Potenzgeraden von K_1 und K_4 mit der Geraden $g_{P_2P_3}$ durch P_2 und P_3 geht, falls ein solcher Schnittpunkt existiert. (Ansonsten sind die drei Geraden parallel.)

2 Spiegelung (oder Inversion) am Kreis

Im Folgenden bezeichne K einen Kreis mit Mittelpunkt O und Radius r. Für Punkte A, B, C, A', B', C' usw. seien a, b, c, a', b', c' die Abstände zum Punkt O.

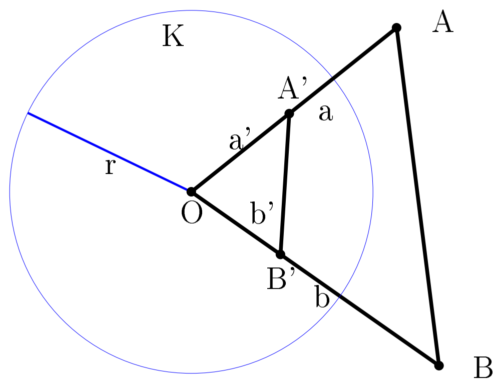
Definition 1: Die Spiegelung am Kreis K ist die Abbildung σ, die jedem von O verschiedenen Punkt A der Euklidischen Ebene den Punkt $\sigma(A) = A'$ auf dem Strahl OA^+ zuordnet, für den $a \cdot a' = r^2$ ist.

Es ist günstig, die Euklidische Ebene um einen (unendlich fernen) Punkt ∞ zu erweitern, durch den definitionsgemäß jede Gerade, aber kein Kreis geht. Man definiert $\sigma(O) = \infty$ und $\sigma(\infty) = O$. Damit wird die Spiegelung σ am Kreis K zu einer bijektiven Abbildung der erweiterten Ebene.

Offensichtlich ist $\sigma(\sigma(A)) = A$, d. h. $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma$ ist die identische Abbildung. Somit ist die inverse Abbildung σ^{-1} gleich σ. Außerdem lässt σ den Kreis K fest und bildet sein Inneres in sein Äußeres und sein Äußeres in sein Inneres ab.

Bemerkung: Identifiziert man die erweiterte Ebene mit der erweiterten komplexen Zahlenebene, so ist σ die stetige Fortsetzung der durch $\sigma(z) = 1/\overline{z}$ gegebenen Abbildung. Hier wird davon kein Gebrauch gemacht.

Satz 1: Liegen die Punkte A, B, O nicht auf einer Geraden und sind $\sigma(A) = A'$ und $\sigma(B) = B'$ die entsprechenden an K gespiegelten Punkte, so sind die Dreiecke ΔOAB und $\Delta OB'A'$ entsprechend ähnlich.



Beweis: Aus $a \cdot a' = b \cdot b' = r^2$ folgt $a : b = b' : a'$. In den Dreiecken stimmen somit der Innenwinkel bei O und das Verhältnis der Längen der anliegenden Seiten überein.

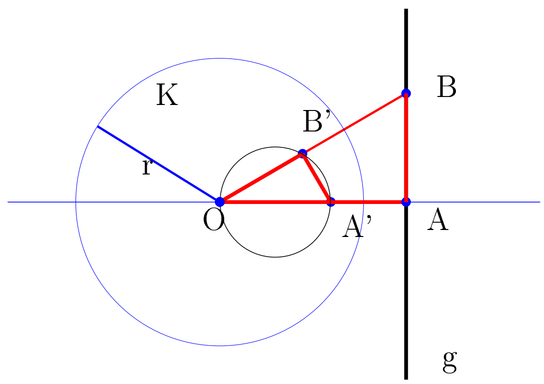
Aufgabe: Man konstruiere $\sigma(A)$ für einen endlichen Punkt $A \neq O$.

Hinweis: Liegt A außerhalb des Kreises K und ist T ein Punkt von K, der nicht auf der Geraden g_{OA} durch O und A liegt, so stimmen für $A' = \sigma(A)$ die Winkelgrößen $\measuredangle OA'T$ und $\measuredangle OTA$ überein. Bei gegebenem A oder A' kann man T so konstruieren, dass zunächst einer dieser Winkel ein rechter Winkel ist. Danach kann der zweite Punkt A' oder A so konstruiert werden, dass auch der zweite Winkel ein rechter Winkel ist.

Satz 2: Die Inversion σ bildet Geraden und Kreise wieder auf Geraden und Kreise ab. Die folgende Tabelle gibt den Zusammenhang von Urbild und Bild genauer an.

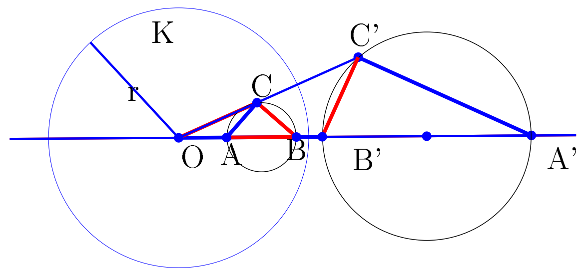
Urbild	Bild
Gerade durch O	dieselbe Gerade
Gerade nicht durch O	Kreis durch O
Kreis durch O	Gerade nicht durch O
Kreis nicht durch O	Kreis nicht durch O

Beweis: Eine Gerade durch O wird offensichtlich durch σ in sich selbst abgebildet. Da dies auch für die inverse Abbildung $\sigma^{-1} = \sigma$ gilt, wird die Gerade auf sich abgebildet.



Wir bestimmen nun das Bild einer Geraden g, die nicht O geht. Mit A werde der Fußpunkt des Lotes von O auf g bezeichnet. Ist B ein anderer Punkt von g und sind $A' = \sigma(A)$, $B' = \sigma(B)$ die Bildpunkte, so liegt B' wegen der Ähnlichkeit von ΔOAB und $\Delta OB'A'$ auf dem Taleskreis mit dem Durchmesser $\overline{OA'}$. Ist umgekehrt B' ein von O und A' verschiedener Punkt dieses Taleskreises, so ist die Gerade $g_{OB'}$ durch O und B' nicht parallel zu g (die Parallele zu g durch O ist Tangente an den Kreis mit Durchmesser $\overline{OA'}$). Also schneidet die Gerade $g_{OB'}$ die Gerade g in einem endlichen, von A verschiedenen Punkt B. Da $\sigma(B)$ der von O verschiedene Schittpunkt des betrachteten Taleskreises mit $g_{OB'}$ ist, folgt $\sigma(B) = B'$. Beachtet man, dass $\sigma(A) = A'$ und $\sigma(\infty) = O$ gelten, so ist nachgewiesen, dass g (einschließlich des unendlich fernen Punktes) durch σ auf den betrachteten Taleskreis abgebildet wird.

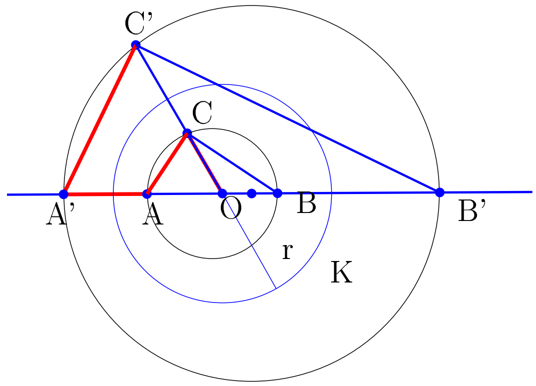
Wegen $\sigma^{-1} = \sigma$ wird der gerade betrachtete Taleskreis durch σ auf die Gerade g abgebildet.



Um das Bild eines Kreises K_1 mit Mittelpunkt M, der nicht durch O geht zu bestimmen, betrachtet man die Schnittpunkte A, B einer Geraden durch O und M mit diesem Kreis K_1 sowie einen von A und B verschiedenen Punkt C dieses Kreises. Die Bildpunkte unter σ seien A', B' und C'. Aus Satz 1 folgt für die Winkelgrößen $\measuredangle OCA = \measuredangle OA'C'$ und $\measuredangle OBC = \measuredangle OC'B'$.

Liegt O nicht zwischen A und B, so kann nach eventueller Vertauschung der Bezeichnungen von A und B vorausgesetzt werden, dass A zwischen O und B liegt, d. h., dass $a < b$ gilt. Dann gilt aber auch $b' < a'$, d. h. B' liegt zwischen O und A'. Somit gilt für die Winkelgrößen $\measuredangle ACB = \measuredangle OCB - \measuredangle OCA = \measuredangle OB'C' - \measuredangle OA'C' = \measuredangle A'C'B'$. Die letzte Gleichung folgt daraus, dass die Größe $\measuredangle OB'C'$ des Außenwinkels des $\Delta A'B'C'$ gleich $\measuredangle A'C'B' + \measuredangle OA'C'$ ist. Also liegt C' genau dann auf dem Taleskreis mit Durchmesser $\overline{A'B'}$, wenn C auf dem Taleskreis mit Durchmesser $\overline{AB}$ liegt. Insbesondere bildet σ den Kreis K_1 in den Kreis K_2 mit Durchmesser $\overline{A'B'}$ ab. Genauso sieht man, dass $\sigma = \sigma^{-1}$ den Kreis K_2 in K_1 abbildet. Somit bildet σ K_1 bijektiv auf K_2 ab.

Der verbliebene Fall, in dem O zwischen A und B liegt, kann unter Beachtung der Veränderten Lagebeziehungen ähnlich behandelt werden



Bemerkung: Aus dem Beweis folgt auch, dass der Mittelpunkt des Bildes einer nicht durch O gehenden Geraden g auf dem Lot von O auf diese Gerade g liegt.

Definition 2: Sind h_1, h_2 jeweils Geraden oder Kreise (Kreis und Gerade sind möglich), die nicht zusammenfallen, so sagt man, dass sich h_1 und h_2 in einem Punkt der erweiterten Ebene berühren, wenn sie genau diesen Punkt gemeinsam haben. Sie schneiden sich, wenn sie genau zwei Punkte der erweiterten Ebene gemeinsam haben.

Bemerkung: Somit berühren sich parallele Geraden im Punkt ∞. Geraden, die sich in der gewöhnlichen Ebene schneiden, schneiden sich auch noch im Punkt ∞.

Definition 3: Sind h_1, h_2 jeweils Geraden oder Kreise, die sich in einem endlichen Punkt S schneiden, so ist der Schnittwinkel die kleinste Größe eines Winkels mit Scheitelpunkt S, dessen einer Schenkel auf h_1 oder auf der Tangente zu h_1 und dessen anderer Schenkel auf h_2 oder der Tangente zu h_2 liegt, wobei jeweils S der Berührungspunkt der Tangente ist. Berühren sich h_1 und h_2 (eventuell im unendlich fernen Punkt) oder fallen sie zusammmen, so ist der Schnittwinkel Null.

Bemerkung: Der Schnittwinkel ist unabhängig von der Wahl des Schnittpunktes, so dass man vom Schnittwinkel von h_1 und h_2 sprechen kann. Dies wird im nächsten Beweis verwendet.

Satz 3: Sind h_1, h_2 jeweils Geraden oder Kreise, die sich schneiden oder berühren, so stimmt der Schnittwinkel ihrer Bilder unter σ mit ihrem Schnittwinkel überein.

Beweis: Zunächst geht jeder Schnittpunkt und jeder Berührungspunkt von h_1 und h_2 bei der Anwendung der bijektiven Abbildung σ in einen Schnittpunkt bzw. Berührungspunkt der Bildkurven über, da die Anzahl der gemeinsamen Punkte (einer bei Berührung, zwei bei Schnitt) erhalten bleibt. Daraus folgt insbesondere die Behauptung im Berührungsfall.

Ferner ändert sich weder der Schnittwinkel der Urbilder noch der Schnittwinkel der Bildkurven, wenn man etwa h_2 durch einen Kreis oder eine Gerade ersetzt, der oder die h_2 im Schnittpunkt oder Berührungspunkt S von h_1 und h_2 berührt (weil man z. B. im Falle von Kreisen dieselben Tangenten behält). Im schon erledigten Berührungsfall könnte man bei dieser Prozedur allerdings zwei zusammmenfallende Geraden oder Kreise erhalten, was aber den Schnittwinkel Null nicht ändern würde. Jedenfalls kann man im Rest des Beweises h_2 gegebenenfalls durch seine Tangente ersetzen. Da h_1 und h_2 gleichberechtigt sind, braucht man also nur noch den Fall zu behandeln, in dem h_1 und h_2 Geraden sind, die sich schneiden.

Schneiden sich nun zwei Geraden h_1 und h_2 in O, so gilt die Behauptung offensichtlich.

Schneiden sie sich in einem von O verschiedenen Punkt S und geht eine der Geraden, etwa h_1 durch O, So ist das Bild der anderen Geraden h_2 ein Kreis durch O, dessen Mittelpunkt auf dem Lot von O auf h_2 liegt, dessen Tangente in O demzufolge parallel zu h_2 ist. Da das Bild von h_1 gleich h_1 ist, folgt die Behauptung.

Schneiden sich zwei Geraden h_1 und h_2 in S und geht keine der Geraden durch O, so sind wieder die Tangenten an die Bildkreise im Punkt O parallel zu den gegebenen Geraden, woraus die Behauptung folgt.

Berührungsproblem des Apollonius Dies ist das Problem der Bestimmung (oder der Konstruktion) von Geraden oder Kreisen, die drei gegebene Figuren F_1, F_2, F_3, von denen jede ein Kreis, eine Gerade, oder ein Punkt ist, berühren bzw., im Falle eines Punktes, treffen. Da auch noch Lagebeziehungen zu beachten sind, sind viele Fälle zu unterscheiden. Die Spiegelung am Kreis ist ein wirkungsvolles Hilfsmittel bei vielen der entstehenden Teilaufgaben.

Aufgabe 1: Es seien paarweise verschiedene Kreise K_1, K_2, K_3 gegeben, die sich alle drei in einem Punkt schneiden. Man bestimme (oder konstruiere) alle Kreise, die jeden der gegebenen Kreise berühren.

Hinweis: Spiegelung an einem Kreis, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der gegebenen Kreise ist.

Aufgabe 2: Es seien verschiedene Kreise K_1, K_2 und ein Punkt P_3 außerhalb dieser Kreise gegeben. Man konstruiere alle Kreise, die jeden der gegebenen Kreise berühren und durch P_3 gehen.

Hinweis: Spiegelung an einem Kreis, mit Mittelpunkt (oder Inversionszentrum) P_3.

Aufgabe 3: Es seien ein Kreis K_1 und verschiedene Punkte P_2, P_3 außerhalb dieses Kreises gegeben. Man konstruiere alle Kreise, die den gegebenen Kreis berühren und durch P_2 und P_3 gehen.

Variante: P_2 und P_3 liegen im Inneren von K_1.

Aufgabe 4: Es seien Kreise K_1, K_2, K_3 gegeben, von denen jeder im Äußeren der anderen Kreise liege. Man bestimme (oder konstruiere) alle Kreise, die jeden der gegebenen Kreise berühren.

Hinweis: Es ist sinnvoll, Teilaufgaben zu betrachten, in denen zusätzlich vorgegeben wird, welche der gegebenen Kreise den gesuchten Kreis von innen bzw. von außen berühren sollen.
Sollen etwa alle gegebenen Kreise den gesuchten Kreis K von innen berühren, und hat K_3 unter den gegebenen Kreisen den kleinsten Radius r_3, so wird der zu K konzentrische Kreis mit um r_3 verringertem Radius entsprechend verkleinerte zu K_1 bzw. K_2 konzentrische Kreise berühren und durch den Mittelpunkt K_3 gehen.
Sollen manche der gegebenen Kreise den gesuchten Kreis von außen berühren, so kann man analog vorgehen. In solchen Fallen müssen vielleicht manche Radien vergrößert werden.

Variante: Die Kreise K_1 und K_2 liegen im Inneren von K_3, K_1 liegt im Äußeren von K_2 und K_2 liegt im Äußeren von K_1.

Bemerkungen: Die letzte Variante kann direkt gelöst werden. Es ist aber auch möglich, die gegebenen Kreise durch eine Spiegelung an einem geeigneten Kreis in drei Kreise zu überführen, von denen jeder im Äußeren der anderen Kreise liegt.
Haben im Berührungsproblem des Apollonius zwei der gegebenen Kreise oder Geraden gemeinsame Punkte, so vereinfacht sich das Problem in der Regel durch eine Inversion an einem Kreis, bei der solch ein gemeinsamer Punkt Inversionszentrum ist.
Mit dem Trick der gezielten Änderung von Radien im Hinweis zu Aufgabe 4 kann man auch erreichen, dass sich derart veränderte gegebene Kreise treffen.

Satz 4: Sind A, B von O verschiedene endliche Punkte mit den Bildpunkten $\sigma(A) = A'$ und $\sigma(B) = B'$, so gilt für ihre Abstände die Gleichung

$$|A'B'| = \frac{r^2}{a \cdot b} \cdot |AB|$$

Beweis für den Fall, dass A zwischen O und B liegt: In diesem Fall liegt B' zwischen O und A', so dass die Behauptung aus den Gleichungen $|A'B'| = a' - b' = r^2/a - r^2/b = \frac{r^2}{a \cdot b} \cdot (b - a)$ und $|AB| = b - a$ folgt.

Aufgabe 5: Man beweise den Satz in den anderen Fällen.

Definition 4: Für paarweise verschiedene endliche Punkte A, B, C, D ist das Doppelverhältnis definiert als

$$DV(ABCD) = \frac{|AC|}{|CB|} : \frac{|AD|}{|DB|}.$$

Ist einer der Punkte gleich ∞, so sind in dieser Definitionsgleichung die zwei Streckenlängen, in denen dieser Punkt vorkommt, durch irgendeine (in beiden Vorkommensfällen gleiche) Streckenlänge zu ersetzen, die sich dann wegkürzt.

Bemerkung: Bezeichnet man für Punkte A, B, C einer Geraden mit $TV(C; AB) = \frac{|AC|}{|CB|}$ das Verhältnis, in dem C die Strecke $\overline{AB}$ teilt, so ist das Doppelverhältnis $DV(ABCD)$ von vier Punkten einer Geraden das Verhältnis $TV(C; AB) : TV(D; AB)$ von Teilungsverhältnissen. In unserer Definition brauchen die vier Punkte aber nicht auf einer Geraden liegen. Auch sind hier alle Doppelverhältnisse positiv, während Teilungsverhältnisse auf Geraden oft mit Vorzeichen versehen werden.

Aufgabe 6: Man überzeuge sich davon, dass folgende Vertauschungseigenschaften gelten:

$$DV(BACD) = DV(ABDC) = \frac{1}{DV(ABCD)},$$

$$DV(ABCD) = DV(BADC) = DV(CDAB).$$

Satz 5: Für paarweise verschiedene Punkte A, B, C, D der erweiterten Ebene mit den Bildpunkten $\sigma(A) = A'$, $\sigma(B) = B'$, $\sigma(C) = C'$ und $\sigma(D) = D'$ gilt stets

$$DV(A'B'C'D') = DV(ABCD).$$

Beweis: Fall 1: Die vier Punkte A, B, C, D sind endlich und verschieden von O. In diesem Fall folgt die Behauptung durch Einsetzen der in Satz 4 gegebenen Formeln für Abstände von Bildpunkten in die Definitionsformel für $DV(A'B'C'D')$. Nach Kürzung bleibt $DV(ABCD)$ übrig.

Fall 2: Einer der Punkte ist gleich O. Dann kann man auf der Grundlage der Vertauschungseigenschaften des Doppelverhältnisses annehmen, dass $D = O$ ist. Dann ist $D' = \infty$ und es gelten $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{a}{b}$ und $DV(A'B'C'D') = \frac{|A'C'|}{|C'B'|}$
Fall 2.1: Die Punkte A, B, C sind endlich. Dann folgt unter Verwendung von Satz 4

$$DV(A'B'C'D') = \frac{|A'C'|}{|C'B'|} = \frac{\frac{r^2}{a\cdot c} \cdot |AC|}{\frac{r^2}{c\cdot b} \cdot |CB|} = \frac{|AC|}{|CB|} : \frac{a}{b} = DV(ABCD).$$

Fall 2.2: $C = \infty$. Dann gelten $C' = O$, $D' = \infty$ und folglich

$$DV(A'B'C'D') = \frac{|A'O|}{|OB'|} = \frac{a'}{b'} = \frac{r^2}{a} : \frac{r^2}{b} = 1 : \frac{|AD|}{|DB|} = DV(ABCD).$$

Fall 2.3: Einer der Punkte A, B ist unendlich. In diesem Fall kann man auf der Grundlage der Vertauschungseigenschaften des Doppelverhältnisses annehmen, dass $B = \infty$ ist. Die

Doppelverhältnisse sind dann durch $DV(A'B'C'D') = |A'C'|/|C'O|$ und $DV(ABCD) = |AC|/|AO|$ gegeben und die Behauptung folgt aus

$$|A'C'|/|C'O| = \left(\frac{r^2}{a \cdot c} \cdot |AC|\right) : \frac{r^2}{c} = |AC|/a = AC|/|AO|.$$

Fall 3: Einer der Punkte ist unendlich. Dann ist einer der Bildpunkte gleich O und die Benutzung der im Fall 2 schon bewiesenen Behauptung für die Punkte A', B', C', D' (anstelle A, B, C, D) ergibt $DV((A''B''C''D'') = DV(A'B'C'D')$, wobei $A'' = \sigma(A') = A$, $B'' = \sigma(B') = B$, $C'' = \sigma(C') = C$ und $D'' = \sigma(D') = D$ die entsprechenden Bildpunkte sind. Damit ist der Satz auch im dritten Fall bewiesen.

Die Fallunterscheidung ist offensichtlich vollständig. Die Fälle übrschneiden sich, was aber nicht schadet.

Definition 5: Paare (A, B) und (C, D) paarweise verschiedener Punkte eines Kreises trennen sich gegenseitig, wenn die Punkte jedes der Paare auf verschiedenen der vom jeweils anderen Punktepaar bestimmten Kreisbögen des Kreises liegen, d. h., wenn die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ Diagonalen eines konvexen Sehnenvierecks sind.

Paare (A, B) und (C, D) paarweise verschiedener endlicher Punkte einer Geraden trennen sich gegenseitig, wenn von den Punkten jedes der Paare genau einer zwischen den Punkten des jeweils anderen Paares liegt.

Paare (A, B) und (C, D) paarweise verschiedener Punkte einer Geraden, von denen einer unendlich ist, trennen sich gegenseitig, wenn der Partner des unendlichen Punktes zwischen den (endlichen) Punkten des anderen Paares (zu dem er nicht gehört) liegt.

Aufgabe 7: Man Weise nach, dass sich Paare (A, B) und (C, D) paarweise verschiedener Punkte eines Kreises oder einer Geraden genau dann gegenseitig trennen, wenn sich die Bildpunkte der Bildfigur (unter σ) gegenseitig trennen.

Aufgabe 8: Man beweise den folgenden Satz.

Satz 6: Paare (A, B) und (C, D) paarweise verschiedener Punkte der erweiterten Ebene sind genau dann einander trennende Punktepaare eines Kreises oder einer Geraden, wenn $DV(CBAD) + DV(CABD) = 1$ gilt.

Hinweis: Man führe den allgemeinen Fall durch eine geeignete Spiegelung am Kreis auf den Fall $D = \infty$ zurück.

Aufgabe 9: Man beweise den folgenden Satz.

Satz 7 (Satz des Ptolomäus): In jedem konvexen Sehnenviereck ist die Summe der Produkte gegenüberliegender Seiten gleich das Produkt der Diagonalen.