Einführung in die Flächen- und Volumenberechnung mit Hilfe von Integralen und die Keplersche Fassregel

Frank Klinker, Universität Leipzig

Motivation

Bei einfachen geometrischen Objekten können wir den Flächeninhalt oder das Volumen recht leicht berechnen, z.B. den Flächeninhalt beim Rechteck oder Dreieck sowie das Volumen eines Quaders oder einer Pyramide. Schwieriger wird schon die Herleitung einer einfachen Formel zur Bestimmung des Volumens gekrümmter Körper oder des Flächeninhalts gekrümmter Flächen.

Fläche	Maße	Flächeninhalt
Rechteck	a, b	ab
Dreieck	g, h	$\frac{1}{2}gh$
Kreis	r	πr^2
Ellipse	a, b	πab

Körper	Maße	Volumen
Quader	a, b, c	abc
Prisma	G, h	Gh
Pyramide	G, h	$\frac{1}{3}Gh$
Kugel	r	$\frac{4}{3}\pi r^3$
Ellipsoid	a, b, c	$\frac{4}{3}\pi abc$

Im Folgenden wird eine Methode vorgestellt, die es ermöglicht Flächeninhalte bzw. Volumina komplizierter (aber in ihrer Art immer noch spezieller) geometrischer Objekte zu berechnen.

Beschränken wir uns zunächst auf den Fall der Berechnung des Inhalts von Flächen.

Flächen

Die Obiekte unserer Untersuchung in diesem Abschnitt werden Flächen sein, die eine "krumme" Seite und drei "gerade" Seiten haben. Genauer betrachten wir eine nicht-negative Funktion

$$\begin{aligned} f : [a,b] &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

auf einem Intervall $[a,b]$ mit Werten in den reellen Zahlen $\mathbf{R}$, und schauen uns ihren Graphen in einem Koordinatensystem an.

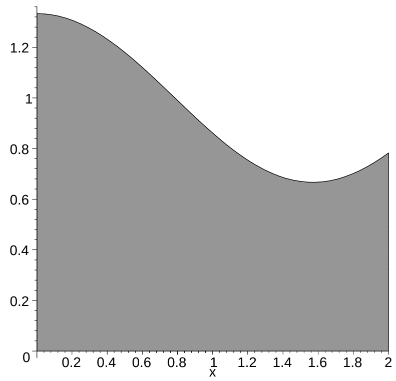

Abbildung 1

Die Fläche, deren Inhalt wir bestimmen wollen, wird von der x-Achse, von den Graphen der Geraden $x = a$ und $x = b$ sowie vom Graphen der Funktion f berandet – das ist die in der Abbildung 1 eingefärbte Fläche. Wir bezeichnen diese Fläche mit $F_f(a,b)$.

Bekannte Beispiele:

$f(x)$	a	b	$F_f(a,b)$	
a	0	b	ab	Rechteck
$\sqrt{r^2 - x^2}$	$-r$	r	$\frac{1}{2}\pi r^2$	Halbkreis
$\frac{h}{g}x$	0	g	$\frac{1}{2}gh$	Dreieck
$a\sqrt{1-(\frac{x}{b})^2}$	$-b$	b	$\frac{1}{2}\pi ab$	(Halb-)Ellipse

Bei diesen Beispielen kennen wir das entstehende geometrische Objekt und können bekannte Formeln verwenden. Aber wie berechnen wir die folgenden Flächeninhalte?

$f(x)$	a	b	$F_f(a,b)$
e^x	0	1	e ?
$\sin(x)$	0	π	2 ?
$\arctan(x)$	0	1	$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$?

Oder einfacher:

$f(x)$	a	b	$F_f(a,b)$
x^2	1	3	$\frac{26}{3}$?

Idee: Wir zerteilen das Intervall $[a, b]$ in kleinere Stücke, berechnen den Flächeninhalt über den entstehenden kleineren Intervallen und addieren alle Teile auf.

Diese Idee liefert z.B. im Fall der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & 0 \leq x < 1 \\ 2x - 2 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

das Ergebnis

$$\begin{aligned} F_f(0,2) &= F_{1-x}(0,1) + F_{2x-2}(1,2) \\ &= \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Durch dieser Unterteilung in kleinere Flächen wird allerdings im Allgemeinen das Problem des einen "krummen" Randes nicht beseitigt. Aber wir schauen uns die Abbildung 2 an.

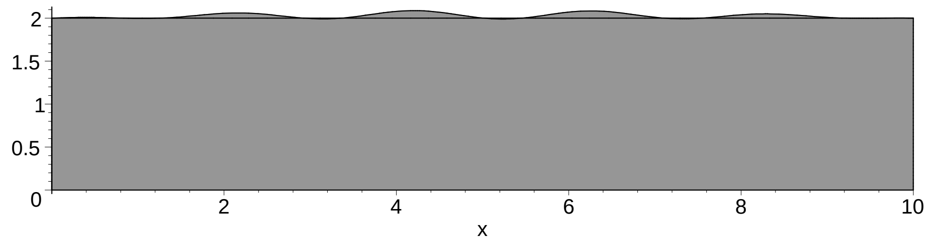

Abbildung 2

Eine sehr gute Näherung für den Flächeninhalt dieser Fläche ist zweifellos

$$F \approx 2 \cdot 10 = 20$$

Wir haben hier einfach die zu berechnende Fläche durch ein Rechteck ersetzt und dessen Inhalt als Maß für den gesuchten Inhalt benutzt.

Diesen Ansatz verfolgen wir nun weiter. Wir zerlegen unsere Fläche in Teilflächen und für die entstehenden Teile benutzen wir Rechtecke als Näherungen (vgl. Abbildung 3).

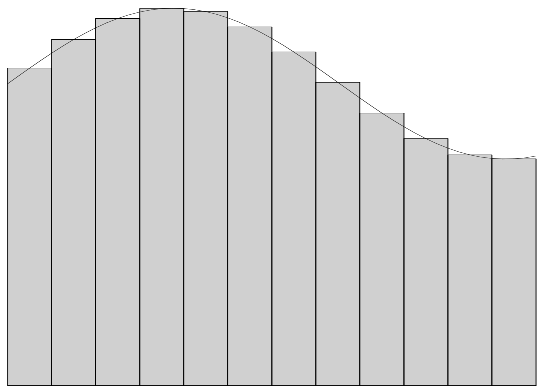

Abbildung 3

Genauer zerlegen wir das Intervall $[a, b]$ in Teilintervalle

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup ... \cup [x_{n-1}, x_n]$$

mit $x_0 = a$ und $x_n = b$ – die Zerlegung bezeichnen wir auch mit $Z(x_0, ..., x_n)$ und nennen n die Länge der Zerlegung – und berechnen

$$\begin{aligned} F_f(a, b) &= F_f(x_0, x_1) + ... + F_f(x_{n-1}, x_n) \\ &\approx f(x_1)(x_1 - x_0) + ... + f(x_n)(x_n - x_{n-1}) \\ &\approx f(x_1)\Delta x_1 + ... + f(x_n)\Delta x_n \\ &\approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i. \end{aligned}$$

Aber unser Ziel ist ja nicht eine Näherung – sei sie auch noch so gut – sondern der exakte Wert des gesuchten Flächeninhalts. Daher machen wir die folgende
Überlegung: Wenn man die Zerlegung immer feiner macht, d.h. die Länge der Teilintervalle immer weiter verkleinert, kann man dann erwarten, dass der Fehler, den man bei der Ersetzung des gesuchten Flächeninhalts durch die Rechtecksumme macht, immer kleiner wird?

Die Anschauung liefert uns auch sofort eine Antwort:

Ja!

Wir wollen diese Behauptung hier nicht weiter formalisieren oder gar beweisen, sondern uns das Verfahren an einem Beispiel verdeutlichen:

Beispiel: Auf dem Intervall $[a, b]$ betrachten wir die Funktion

$$f(x) = x^2$$

und für das Intervall die äquidistante (= gleichmäßige) Zerlegung der Länge n

$$Z(a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n}, a + 3\frac{b-a}{n}, \ldots, a + (n-1)\frac{b-a}{n}, b).$$

Wir haben also

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n} \text{ für } i = 0, ...n$$

und berechnen

$$\begin{aligned} f(x_i) &= (x_i)^2 = \left(a + i\frac{b-a}{n}\right)^2 \\ &= a^2 + 2a\frac{b-a}{n}i + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 i^2, \end{aligned}$$

sowie

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = a + i\frac{b-a}{n} - a - (i-1)\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}.$$

Damit bekommen wir für die Rechtecksumme:

$$
\begin{aligned}
F_{x^2}(a,b) &\approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \\
&\approx \sum_{i=1}^{n}\left(a^2 + 2a\frac{b-a}{n}i + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 i^2\right)\frac{b-a}{n} \\
&\approx \sum_{i=1}^{n} a^2\frac{b-a}{n} + \sum_{i=1}^{n} 2a\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 i + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3 i^2 \\
&\approx a^2(b-a) + \frac{2a(b-a)^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{(b-a)^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&\approx a^2(b-a) + \frac{2a(b-a)^2}{n^2}\frac{1}{2}n(n-1) + \frac{(b-a)^3}{n^3}\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) \\
&\approx a^2(b-a) + a(b-a)^2\frac{n^2-n}{n^2} + \frac{1}{6}(b-a)^3\frac{2n^3-3n+1}{n^3} \\
&\approx a^2(b-a) + a(b-a)^2(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{6}(b-a)^3(2-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3})
\end{aligned}
$$

In diesem letzten Ausdruck lassen wir nun die Zerlegung immer feiner werden, und schauen uns das Ergebnis an. Wir bilden also den Grenzwert der rechten Seite für $n \to \infty$. Dabei nutzen wir die bekannten Rechenregeln beim Berechnen von Grenzwerten und nutzen insbesondere

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Das liefert dann

$$
\begin{aligned}
F_{x^2}(a,b) &= a^2(b-a) + a(b-a)^2 + \frac{2}{6}(b-a)^3 \\
&= a^2b - a^3 + ab^2 - 2a^2b + a^3 + \frac{1}{3}b^3 - b^2a + ba^2 - \frac{1}{3}a^3 \\
&= \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3
\end{aligned}
$$

Für $a = 1$ und $b = 3$ ergibt sich insbesondere der in der obigen Tabelle angegebene Wert von $F_{x^2}(1,3) = \frac{1}{3}3^3 - \frac{1}{3}1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$.

Bemerkung:

1. Das Verfahren der Grenzwertbildung über die Zerlegungen des Intervalls (wobei man sich in der Regel nicht auf äquidistante Zerlegungen beschränkt) macht man in einer neuen Schreibweise deutlich:

   $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\text{Zerlegungen von }[a,b]}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

   und man nennt diesen Ausdruck das bestimmte Integral der Funktion f in den Grenzen von a bis b. Wir schreiben also nun $\int_a^b f(x)dx$ statt $F_f(a,b)$.

2. An der Formel für die Fläche unter der Funktion $f(x) = x^2$ über dem Intervall $[a,b]$ in dem obigen Beispiel fällt folgendes auf:
   Die Funktion $g(x) = \frac{1}{3}x^3$ mit

   $$\int_a^b x^2 dx = g(b) - g(a)$$

erfüllt gerade

$$g'(x) = f(x).$$

In diesem Fall nennt man g eine Stammfunktion der Funktion f.

Es gilt nun ganz allgemein der folgende "Flächensatz".

Satz 1 *Sei $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ eine nicht-negative Funktion und $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ eine Stammfunktion von f, also $g'(x) = f(x)$. Dann gilt für den Flächeninhalt $\int_a^b f(x)dx$ der Fläche die von dem Graphen der Funktion f, der x-Achse und den Graphen der Geraden $x = a$ bzw. $x = b$ begrenzt wird:*

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a).$$

Bemerkung:

1. Die obige Konstruktion und damit der Satz 1 besitzt eine Verallgemeinerung auf Funktionen mit auch negativem Wertebereich und heißt dann "Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung". Man kann dann den Wert $\int_a^b f(x)dx$ jedoch nicht mehr ohne weiteres als Flächeninhalt interpretieren.

2. In der Regel ist es schwer, eine Stammfunktion g zu einer gegebenen Funktion f zu finden, und oft ist dies in einer geschlossenen Form nicht möglich, etwa für die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ (Gaußsche Glockenkurve, deren Graph auf dem 10 DM-Schein abgebildet ist).

Mit dieser Bemerkung ist die kleine Einführung in die Flächenberechnung abgeschlossen. Uns geht es hier nicht um die Einführung der Integralrechnung und insbesondere nicht um die Rechenregeln, die notwendig sind, um zu vorgegebenen Funktionen Stammfunktionen zu finden. Vielmehr sollte nur der konstruktive Ansatz erläutert werden, der die Flächenberechnung mit der Integralrechnung verbindet. Auf diesen Ansatz aufbauend wenden wir uns nun der Volumenberechnung zu.

Volumina

Wie bei den Flächen werden wir uns auch bei den Körpern auf verhältnismäßig spezielle Körperformen beschränken, die sogenannten Rotationskörpern. Diese denken wir uns bei der Rotation des Graphen einer nicht-negativen Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : [a,b] & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

um die x-Achse entstanden (vgl. Abbildung 4). Man nennt die Funktion, bzw. ihren Graphen, dann auch die Erzeugende des Rotationskörpers.

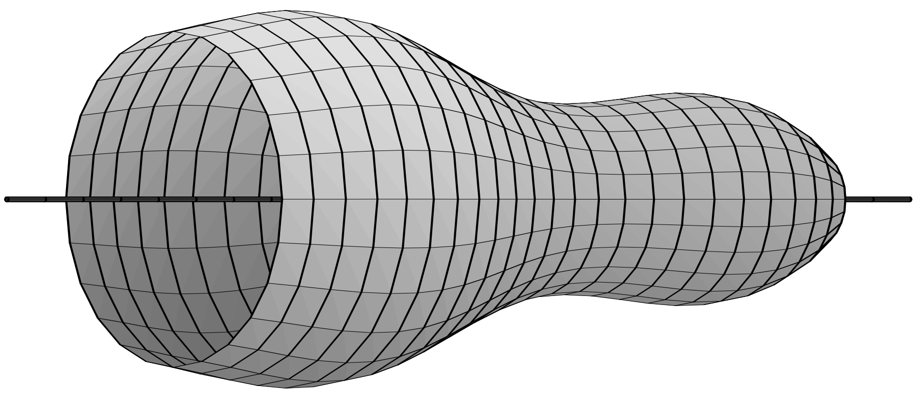

Abbildung 4

Wir wollen im Folgenden das Volumen $V_f(a,b)$ des entstehenden Rotationskörpers berechnen. Die Idee zur Bestimmung von $V_f(a,b)$ leihen wir uns von der Flächenberechnung: Wir nutzen einfachere geometrische Objekte zur Näherung des gesuchten Wertes und "optimieren" diesen durch einen Grenzprozess. Die geometrischen Objekte sind hier Zylinder.

Wir wählen eine Zerlegung $Z(x_0,...,x_n)$ des Intervalls $[a,b]$ und lassen die gemäß des Verfahrens des vorherigen Abschnitts entstehenden Rechtecke um die x-Achse rotieren (siehe Abbildung 5). Dann bestimmen wir ihr Volumen und nutzen die Summe aller Zylindervolumina als Näherungswert für das Volumen des Rotationskörpers.

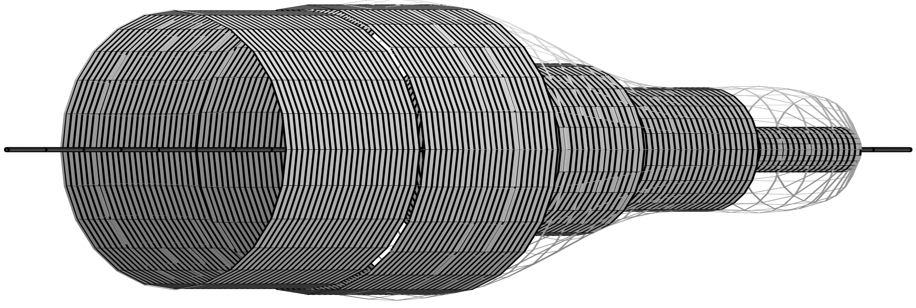

Abbildung 5

Analog zu den Flächen erhalten wir

$$\begin{aligned}
V_f(a,b) &= V_f(x_0,x_1) + ... + V_f(x_{n-1},x_n) \\
&\approx \pi(f(x_1))^2(x_1 - x_0) + ... + \pi(f(x_n))^2(x_n - x_{n-1}) \\
&\approx \pi(f(x_1))^2\Delta x_1 + ... + \pi(f(x_n))^2\Delta x_n \\
&\approx \pi\sum_{i=1}^{n}(f(x_i))^2\Delta x_i.
\end{aligned}$$

Es fällt auf, dass dieser Ausdruck fast so aussieht wie der entsprechende Term bei der Flächenberechnung. Bevor wir dieses aber vertiefen, wollen wir den nun noch durchzuführenden Grenzprozess zur Berechnung des exakten Volumens wieder an einem Beispiel deutlich machen. Wir wählen hier zur Illustration ein uns schon bekanntes Beispiel, nämlich die Halbkugel mit Radius r, deren Volumen $\frac{2}{3}\pi r^3$ ist.

Beispiel: Zur Beschreibung der Halbkugel wählen wir die Funktion

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

auf dem Intervall $[0, r]$ und dazu eine äquidistante Zerlegung der Länge n:

$$Z(\frac{r}{n}, 2\frac{r}{n}, ..., (n-1)\frac{r}{n}, r).$$

Damit gilt dann also

$$x_i = i\frac{r}{n} \text{ für } i = 0, ..., n,$$

sowie

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = (i-1)\frac{r}{n} - i\frac{r}{n} = \frac{r}{n}$$

und wir rechnen

$$\begin{aligned}(f(x_i))^2 &= \left(\sqrt{r^2 - x_i^2}\right)^2 = r^2 - x_i^2 \\ &= r^2 - \left(i\frac{r}{n}\right)^2 = r^2\left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Für den Näherungswert gilt dann also

$$\begin{aligned}V_{\sqrt{r^2-x^2}}(0, r) &\approx \pi \sum_{i=1}^{n} (f(x_i))^2 \Delta x_i = \pi \sum_{i=1}^{n} r^2 \left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right)\frac{r}{n} \\ &\approx \pi r^3 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\right) \\ &\approx \pi r^3 \left(1 - \frac{1}{n^3}\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)\right) \\ &\approx \pi r^3 \left(1 - \frac{1}{6}(2 - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3})\right) \\ &\approx \pi r^3 \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}(\frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3})\right)\end{aligned}$$

Wir machen wieder den Grenzprozess $n \to \infty$, nutzen $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ und erhalten als Wert für das Volumen der Halbkugel – wie erwartet –

$$V_{\sqrt{r^2-x^2}}(0, r) = \frac{2}{3}\pi r^3$$

Wir haben also wieder den Grenzwert der Summe über die Zerlegungen berechnet. Nur wurden diesmal nicht die Funktionswerte der Funktion f summiert, sondern die Funktionswerte der Funktion f^2, die ganz natürlich durch

$$f^2(x) = (f(x))^2$$

definiert ist. In unserer symbolischen Schreibweise gilt also der folgende “Volumensatz”.

Satz 2 *Sei $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ eine nicht-negative Funktion. Dann gilt für das Volumen $V_f(a,b)$ des Körpers, der bei der Rotation des Graphen von f um die x-Achse entsteht:*

$$V_f(a,b) = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Ist $\tilde{g} : [a,b] \to \mathbf{R}$ eine Stammfunktion von f^2, also $\tilde{g}'(x) = f^2(x)$ so gilt wegen des "Flächensatzes"

$$V_f(a,b) = \pi(\tilde{g}(b) - \tilde{g}(a))$$

Bemerkung: Für das Volumen der Halbkugel brauchten wir also "nur" das Quadrat der Funktion $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, also die Funktion $f^2(x) = r^2 - x^2$, in den Grenzen 0 und r zu integrieren. Wie man durch Ableiten sofort nachrechnet ist $\tilde{g}$ mit

$$\tilde{g}(x) = r^2 x - \frac{1}{3}x^3$$

eine Stammfunktion zu f^2. Mit dem zweiten Teil des Satzes gilt für das Volumen der Halbkugel also

$$\begin{aligned} V_{Halbkugel} &= V_f(a,b) = \pi(\tilde{g}(r) - \tilde{g}(0)) \\ &= \pi(r^2 r - \frac{1}{3}r^3 - 0 + 0) \\ &= \frac{2}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

und das ist abermals der gewohnte Wert.

Die Keplersche Fassregel

Das Verfahren, mit dem zu Anfang des siebzehnten Jahrhunderts die Volumina von Fässern bestimmt wurden, ist das "Messverfahren mittels Visierrute". Die Visierrute ist ein Stab mit einer Skala, auf der die entsprechenden Volumeneinheiten markiert sind. Dieser Stab wird durch das in der Mitte einer Fassdaube befindliche Spundloch schräg nach unten bis zum Anschlag an der gegenüberliegenden Daube eingeführt. An der Markierung wird nun der Inhalt des Fasses abgelesen (siehe Abbildung 6).

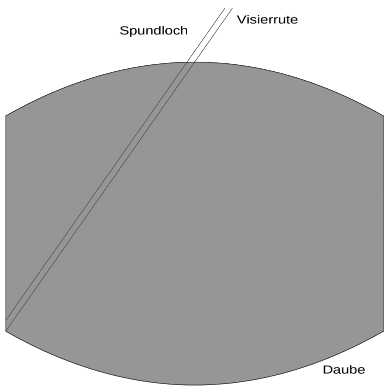

Abbildung 6

Bei diesem Messverfahren wird die Geometrie des Fasses nicht berücksichtigt, und genau dieser Umstand war es, der Kepler zu einer mathematischen Analyse veranlasste. Dass die fehlende Berüchsichtigung der Fassformen zu Ungenauigkeiten in der Volumenbestimmung führt, zeigt die Abbildung 7, denn wie wir in der Tabelle S.12 ausrechnen, ist das Volumen des linken Fasses ($h = 4.2$, $r = 1.0$, $R = 2.4$) kleiner, als das des rechten ($h = 4.2$, $r = 1.6$, $R = 1.8$). Man beachte, dass die Visierlänge d bei beiden Fässern die Gleiche ist, denn es gilt die Gleichung

$$d^2 = \frac{h^2}{4} + (R + r)^2.$$

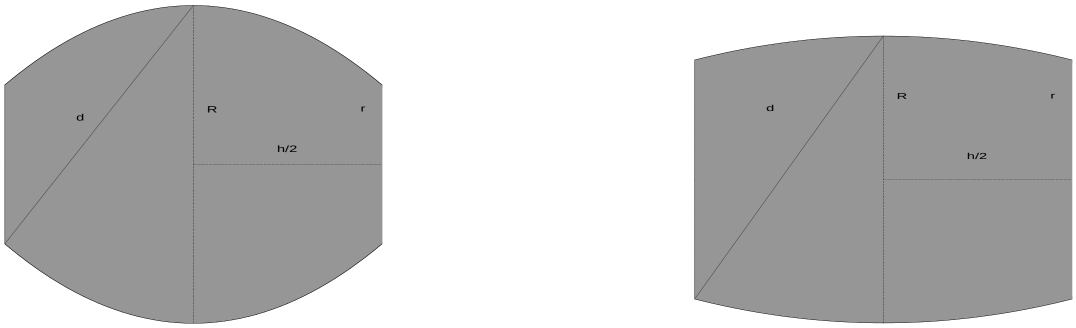

Abbildung 7

In diesem Abschnitt werden wir die Idee Keplers zur Herleitung "seiner" Formel zur Bestimmung von Fassvolumina – die Keplersche Fassregel – erläutern und wir werden diese Herleitung nachvollziehen. Dann werden wir ihre Genauigkeit überprüfen, indem wir anhand verschiedener Fassformen deren exaktes Volumen, das wir gemäß des vorigen Abschnitts berechnen können, mit den Werten der Keplerschen Näherung vergleichen werden.

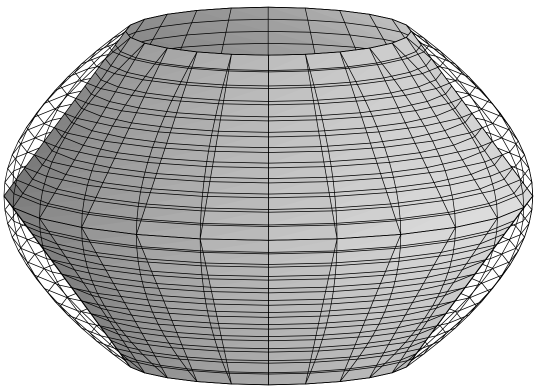

Abbildung 8

Die Idee Keplers ist es, dass er das Fass durch zwei Kegelstümpfe ersetzt, die längs der gemeinsamen Grundfläche zusammengesetzt werden (vgl. Abbildung 8). Das Volumen eines Kegelstumpfes mit oberem Radius r, unterem Radius R und Höhe h ist

$$V_{KS} = \frac{\pi}{3}R^2(h + \frac{hr}{R-r}) - \frac{\pi}{3}r^2\frac{hr}{R-r} = \frac{\pi}{3}h\frac{R^3 - r^3}{R-r} = \frac{\pi}{3}h(R^2 + Rr + r^2),$$

und damit ergibt sich das Fassvolumen des Fasses mit äußerem Radius r, innerem Radius R und Höhe h näherungsweise zu

$$V_{Fass} \approx 2V_{KS} = \frac{2\pi}{3}h(R^2 + Rr + r^2).$$

Eine weitere Näherung, die Kepler machte, ist die Ersetzung des Produktes Rr durch den größeren Wert R^2. Das vergrößert die rechte Seite der obigen Gleichung und vekleinert in der Regel den Fehler, den man bei der Näherung des (bauchigen) Fasses durch die Kegelstümpfe macht. Wir bekommen also als Näherung für das Fassvolumen die

Keplersche Fassregel:

$$V_{Fass} \approx \frac{1}{3}\pi h(2R^2 + r^2).$$

Betrachten wir das Fass als Rotationkörper mit erzeugender Funktion $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, so ist $f(a) = f(b) = r$, $f(\frac{a+b}{2}) = R$ und $b - a = h$. Kepler hat erkannt, dass es sich bei der Erzeugenden des Fasses um eine Kurve zweiter Ordnung (= Kegelschnitt) handelt. Darunter fasst man die Kurven Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel zusammen. In seinem Buch "Neue Stereometrie der Fässer" wählt Kepler als Erzeugende Hyperbeln, da sie zum Rand des Fasses am schnellsten abflachen, und somit Deckel und Boden des Fasses gut befestigt werden können. Diese Überlegung war jedoch falsch, wie er später feststellen musste. Vielmehr handelt es sich bei der Erzeugenden um den Teil eines Kreises, denn die Herstellung der Dauben geschah nach dem gleichen Verfahren, nach dem auch Reifen hergestellt wurden.

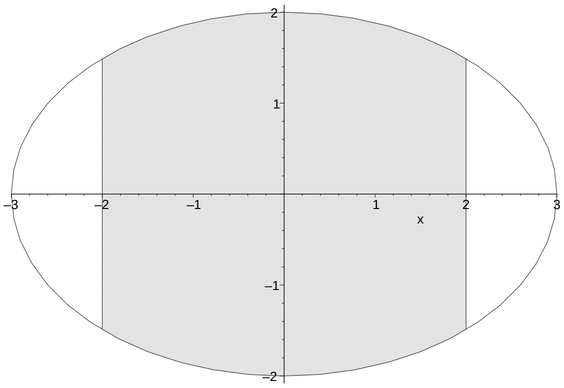

Abbildung 9

Wenden wir uns nun der Überprüfung der Genauigkeit der Keplerschen Fassregel zu. Dazu betrachten zunächst das Fass entstanden aus einem Ellipsoid, an dem man oben und unten senkrecht zur Symmetrieachse jeweils einen Schnitt durchgeführt hat (vgl. Abbildung 9). Das heißt, die Erzeugende ist der obere Ellipsenbogen. Eine Ellipse mit Mittelpunkt $(0, 0)$ hat immer die Gestalt

$$\frac{y^2}{\alpha^2} + \frac{x^2}{\beta^2} = 1,$$

so dass der obere Teil der Ellipse durch den Graphen der Funktion (löse die Gleichung nach y auf - positives Vorzeichen!)

$$f(x) = \alpha\sqrt{1 - \frac{x^2}{\beta^2}} \quad \text{auf dem Intervall} \quad \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$$

beschrieben wird. Die Werte α und β sind von den Maßen des Fasses abhängig und berechnen sich in unserem Fall aus den Bedingungen $f(\frac{h}{2}) = r$ und $f(0) = R$. Für die Werte α und β bedeutet das

$$\begin{aligned} f(0) &= \alpha = R \quad \text{und} \\ f(\frac{h}{2}) &= \alpha\sqrt{1 - \frac{h^2}{(2\beta)^2}} = r. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung liefert sofort $\alpha = R$ und die zweite liefert damit

$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 - \frac{R^2}{\beta^2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 \\ R^2 - r^2 &= \frac{R^2}{\beta^2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 \\ \frac{R^2 - r^2}{R^2\left(\frac{h}{2}\right)^2} &= \frac{1}{\beta^2} \\ \frac{R^2}{R^2 - r^2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 &= \beta^2. \end{aligned}$$

Somit gilt für die Erzeugende

$$f(x) = \sqrt{R^2 - \frac{R^2 - r^2}{\left(\frac{h}{2}\right)^2}x^2}.$$

Das exakte Volumen des so entstandenen Fasses bestimmen wir nun mit Hilfe von Satz 2. Wir müssen also den Wert

$$\begin{aligned} V_{Fass} &= V_f(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}) = \pi\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (f(x))^2 dx \\ &= \pi\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(R^2 - \frac{R^2 - r^2}{\left(\frac{h}{2}\right)^2}x^2\right) dx \end{aligned}$$

bestimmen. Wie man durch Ableiten überprüft, ist

$$\tilde{g}(x) = R^2x - \frac{1}{3}\frac{R^2 - r^2}{\left(\frac{h}{2}\right)^2}x^3$$

eine Stammfunktion zu $f^2(x) = R^2 - \frac{R^2-r^2}{\left(\frac{h}{2}\right)^2}x^2$, so dass sich wegen des Zusatzes zu Satz 2 das Volumen des Fasses zu

$$\begin{aligned} V_f(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}) &= \pi\left(\tilde{g}(\frac{h}{2}) - \tilde{g}(-\frac{h}{2})\right) \\ &= \pi\left(R^2\frac{h}{2} - \frac{1}{3}\frac{R^2 - r^2}{\left(\frac{h}{2}\right)^2}\left(\frac{h}{2}\right)^3 - R^2(-\frac{h}{2}) + \frac{1}{3}\frac{R^2 - r^2}{\left(\frac{h}{2}\right)^2}\left(-\frac{h}{2}\right)^3\right) \\ &= \pi\left(2R^2\frac{h}{2} - \frac{2}{3}\left(R^2 - r^2\right)\frac{h}{2}\right) \\ &= \pi\left(R^2h - \frac{1}{3}R^2h + \frac{1}{3}r^2h\right) = \pi\left(\frac{2}{3}R^2h + \frac{1}{3}r^2h\right) \\ &= \frac{1}{3}\pi h\left(2R^2 + r^2\right) \end{aligned}$$

ergibt. Wie man also sieht, ist die Keplersche Fassregel für diese Fassform exakt.

Wie erwähnt entspricht diese Form aber leider nicht einem realistischen Fass. Bei diesem sind die Dauben Teile eines Kreises (zur Erläuterung siehe Abbildung 10).

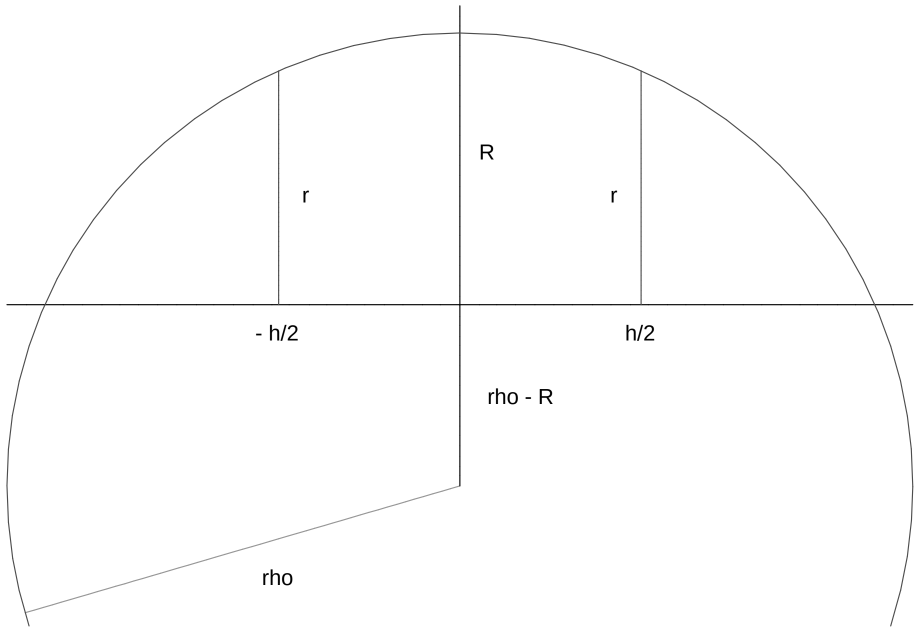

Abbildung 10

Die Kreisgleichung eines Kreises mit Mittelpunkt (m, n) und Radius ρ ist

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = \rho^2.$$

Wie aus der Abbildung 10 ersichtlich ist, hat unser Kreis den Mittelpunkt $(0, -(\rho - R))$ und unsere Kreisgleichung wird zu

$$x^2 + (y + (\rho - R))^2 = \rho^2.$$

Lösen wir dies wieder nach y auf (positives Vorzeichen!),

$$\begin{aligned} (y + (\rho - R))^2 &= \rho^2 - x^2 \\ y + (\rho - R) &= \sqrt{\rho^2 - x^2}, \end{aligned}$$

so erhalten wir die Erzeugende des Fasses

$$f(x) = \sqrt{\rho^2 - x^2} - (\rho - R).$$

Aus der Bedingung $f(\frac{h}{2}) = r$, also

$$\sqrt{\rho^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} - (\rho - R) = r$$

bekommen wir den noch fehlenden Radius ρ des Kreises:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\rho^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} &= r + \rho - R \\
\rho^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 &= ((r-R)+\rho)^2 \\
\rho^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 &= (r-R)^2 + 2\rho(r-R) + \rho^2 \\
-\left(\frac{h}{2}\right)^2 &= (r-R)^2 + 2\rho(r-R) \\
-(R-r)^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 &= 2\rho(r-R) \\
\frac{(R-r)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}{2(R-r)} &= \rho.
\end{aligned}$$

Um die Formeln nicht allzu unübersichtlich werden zu lassen, werden wir diesen Wert nicht mehr in f einsetzen, sondern werden die Abkürzung ρ beibehalten. Da wir zur Bestimmung des Volumens des Fasses gemäß Satz 2 das Quadrat von $f(x)$ benötigen berechnen wir das zuerst:

$$\begin{aligned}
(f(x))^2 &= \left(\sqrt{\rho^2 - x^2} - (\rho - R)\right)^2 \\
&= (\rho^2 - x^2) - 2(\rho - R)\sqrt{\rho^2 - x^2} + (\rho - R)^2 \\
&= \left(\rho^2 + (\rho - R)^2\right) - x^2 - 2(\rho - R)\sqrt{\rho^2 - x^2}.
\end{aligned}$$

Wie man wieder durch Ableiten nachprüft ist $\tilde{g}$ mit

$$\tilde{g}(x) = \left(\rho^2 + (\rho - R)^2\right) x - \frac{1}{3}x^3 - (\rho - R)\left(x\sqrt{\rho^2 - x^2} + \rho^2 \arcsin\left(\frac{x}{\rho}\right)\right)$$

eine Stammfunktion zu $f^2(x) = \left(\rho^2 + (\rho - R)^2\right) - x^2 - 2(\rho - R)\sqrt{\rho^2 - x^2}$. Damit können wir nun wieder mit dem Zusatz zu Satz 2 rechnen:

$$\begin{aligned}
V_{Fass} &= V_f(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}) = \pi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (f(x))^2 dx \\
&= 2\pi \int_0^{\frac{h}{2}} (f(x))^2 dx \\
&= 2\pi \left(\tilde{g}(\frac{h}{2}) - \tilde{g}(0)\right) = 2\pi \tilde{g}(\frac{h}{2}) \\
&= \pi \left(\rho^2 + (\rho - R)^2\right) h - \frac{\pi}{12} h^3 - \pi(\rho - R)\left(h\sqrt{\rho^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} + 2\rho^2 \arcsin\left(\frac{h}{2\rho}\right)\right)
\end{aligned}$$

Diesem Ausdruck sieht man nun nicht mehr direkt an, ob die Keplersche Fassregel hier eine gute Näherung ist. Um das zu überprüfen werden wir exemplarisch für einige Fassmaße (h, r, R) den obigen exakten Wert V_{Fass} mit dem Wert der Näherung $V_{Kepler} = \frac{1}{3}\pi h(2R^2 + r^2)$ vergleichen.

h	r	R	ρ	V_{Fass}	V_{Kepler}
$4,20$	$1,60$	$1,80$	$11,13$	40	40
$4,20$	$1,00$	$2,40$	$2,28$	55	55
$4,80$	$2,40$	$3,60$	$7,27$	160	159
$4,00$	$3,00$	$4,00$	$2,50$	173	172
$5,60$	$2,00$	$4,00$	$2,96$	207	211
$6,40$	$3,00$	$3,60$	$8,83$	233	234
$8,00$	$2,00$	$4,00$	$5,00$	298	302
$9,60$	$2,00$	$4,00$	$6,76$	354	362
$12,00$	$4,00$	$8,00$	$6,50$	1835	1810
$20,00$	$6,00$	$9,00$	$18,17$	4106	4147

Anhand dieser Werte sehen wir, dass die Anwendung der Keplerschen Fassregel als Näherungsformel zur Berechnung von Fassvolumina nicht unbegründet ist.