Ein Problem der Dreiecksspiegelung

Tobias Schoel

10. Februar 2008

1 Die Dreiecksspiegelung

1.1 Spiegelung eines Punktes

Es sei ein Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seiten $BC = a$, $AC = b$ und $AB = c$ gegeben und P sei ein Punkt. Dann bezeichnen P_a, P_b und P_c die Punkte, die bei Spiegelung von P an den Seiten a, b und c bzw. deren Verlängerungen entstehen. $\triangle P_aP_bP_c$ mit den Seiten $P_bP_c = a_P$, $P_aP_c = b_P$ und $P_aP_b = c_P$ werde als Bild $\triangle_P$ von P bei (Dreiecks-)spiegelung an $\triangle ABC$ bezeichnet.

1.2 Spiegelung einer Geraden

Es sei ein Dreieck $\triangle ABC$ wie oben gegeben und g eine Gerade. Dann bezeichnen g^a, g^b und g^c die Geraden, die bei Spiegelung von g an den Seiten a, b und c bzw. deren Verlängerungen entstehen. Diese schneiden sich (möglicherweise) in den Punkten A^g, B^g und C^g. $\triangle A^gB^gC^g$ mit den Seiten $A^gB^g = c^g$, $A^gC^g = b^g$ und $B^gC^g = a^g$ werde als Bild $\triangle^g$ von g bei (Dreiecks)-spiegelung an $\triangle ABC$ bezeichnet.

2 Das Problem

2.1 Das allgemeine Problem

Das allgemeine Problem der Dreiecksspiegelung ist die folgende Frage:

> Für welche Punkte P bzw. Geraden g gilt, dass deren Bilder $\triangle_P$ bzw. $\triangle^g$ ähnlich oder sogar kongruent zu $\triangle ABC$ sind?

Dieses allgemeine Problem zerfällt in vier speziellere Probleme, die wiederum gewisse Spezialfälle aufweisen.

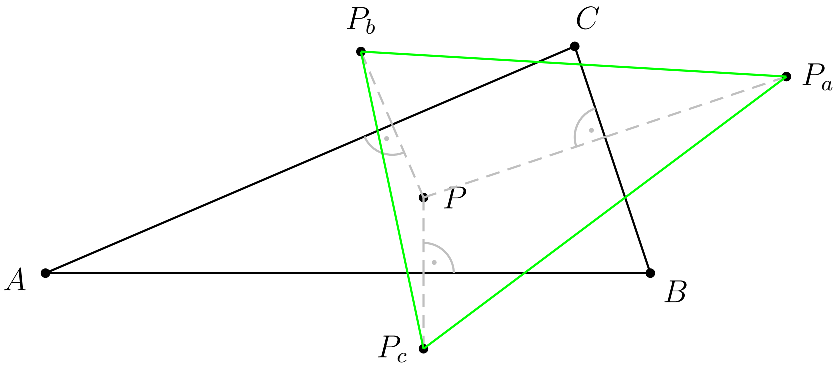

Abbildung 1: Bild $\triangle_P = P_aP_bP_c$ eines Punktes P bei Spiegelung an einem Dreieck $\triangle ABC$.

2.2 Das kongruente Punktproblem

Das Problem wird zuerst für Punkte betrachtet. Es stellt sich also die Frage, welche Punkte zum Spiegelungsdreieck kongruente Bilder besitzen.

2.2.1 Umkreismittelpunkt als Lösung

Wird man darauf gestoßen, findet man relativ die eine Lösung des Problems: den Umkreismittelpunkt. Genau genommen bin ich selbst nur auf dieses Problem gestoßen, weil ein Schüler bei der Matheolympiade diese Tatsache in einem Beweis quasi selbstverständlich verwendet hat. Der Beweis dafür ist auch nicht weiter schwer, sodass er problemlos in einem Mathezirkel der höheren Klassen als Aufgabe gestellt werden kann.

Satz 2.2.1 (Umkreismittelpunkt als Lösung) *Der Umkreismittelpunkt U eines Dreiecks $\triangle$ besitzt ein zu selbigem kongruentes Bild $\triangle_U = \triangle U_aU_bU_c$ bei Spiegelung an $\triangle ABC$, und zwar in gleicher Zuordnung, d. h. es gilt $a = a_U$, $b = b_U$ und $c = c_U$.*

Beweis Es sind die Seitenmittelpunkte M_a, M_b und M_c die Fußpunkte der Lote von U auf die entsprechenden Seiten, d. h. die Fußpunkte der drei Geradenspiegelungen. Dann ist $\triangle U_aU_bU_c \sim \triangle M_aM_bM_c$ mit Streckungsfaktor 2. Desweiteren ist $\triangle M_aM_bM_c \sim \triangle ABC$ mit Streckungsfaktor $\frac{1}{2}$.[1] Demzufolge gilt $\triangle U_aU_bU_c \cong \triangle ABC$.$\square$

Man kann nun auch für einige Punkte beweisen, dass diese keine Lösung des Problems sind, z. B. die Eckpunkte A, B und C was ziemlich trivial ist, da die entstehenden Bilddreiecke entartet sind. Interessanter sind innere Punkte wie zum Beispiel der Inkreismittelpunkt.

[1] Dies ist eine Standardaufgabe der Geometrie in Mathezirkeln.

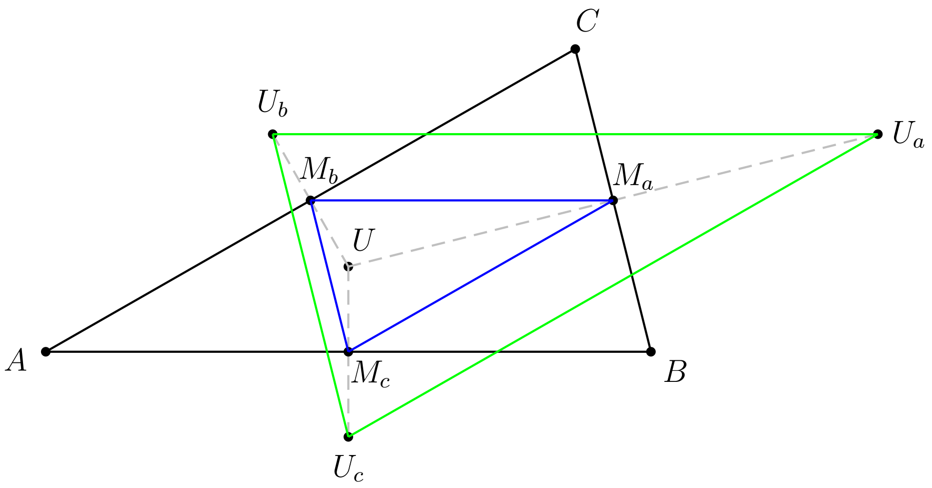

Abbildung 2: Bild $\triangle_P = P_aP_bP_c$ eines Punktes P bei Spiegelung an einem Dreieck $\triangle ABC$.

Satz 2.2.2 (Unmöglichkeitssatz von Tobias Lenich) *Der Inkreismittelpunkt I eines Dreiecks $\triangle ABC$ besitzt nur dann ein kongruentes Bild bei Dreiecksspiegelung, wenn er auch der Umkreismittelpunkt ist, d. h. wenn $\triangle ABC$ gleichsseitig ist.*

Beweis Angenommen, es gilt $\triangle_I = \triangle I_aI_bI_c \cong \triangle ABC$. Dann stimmen auch die Umkreisradien R und Inkreisradien r dieser beiden Dreiecke überein. Nach Konstruktion und der Eigenschaft des Inkreismittelpunktes ist aber I auch Umkreismittelpunkt von $\triangle_I$. D. h. es gilt:

$$R = 2r \leq R$$

Die Ungleichung ist ebenfalls ein in Mathezirkeln öfters bewiesener oder angewandter Satz. In der Ungleichung gilt insbesondere genau dann Gleichheit, wenn Inkreismittelpunkt und Umkreismittelpunkt zusammenfallen, d. h. wenn $\triangle ABC$ gleichseitig ist.

2.2.2 Kongruenz in gleicher Zuordnung

Kommen wir nun zur Lösung des Problems für den Fall, dass die Kongruenz in gleicher Zuordnung gelten soll, d. h. es gilt $a_P = a$, $b_P = b$ und $c_P = P$. Dafür brauchen wir allerdings ein kleines Lemma.

Lemma 2.2.3 *Sei ein Dreieck $\triangle ABC$ mit Umkreismittelpunkt U und Umkreisradius R gegeben. Dann ist der Kreis $K(A, R)$ mit Mittelpunkt A und Radius R genau die Menge derjenigen Punkte P, für die $a = a_P = P_bP_c$ gilt.*

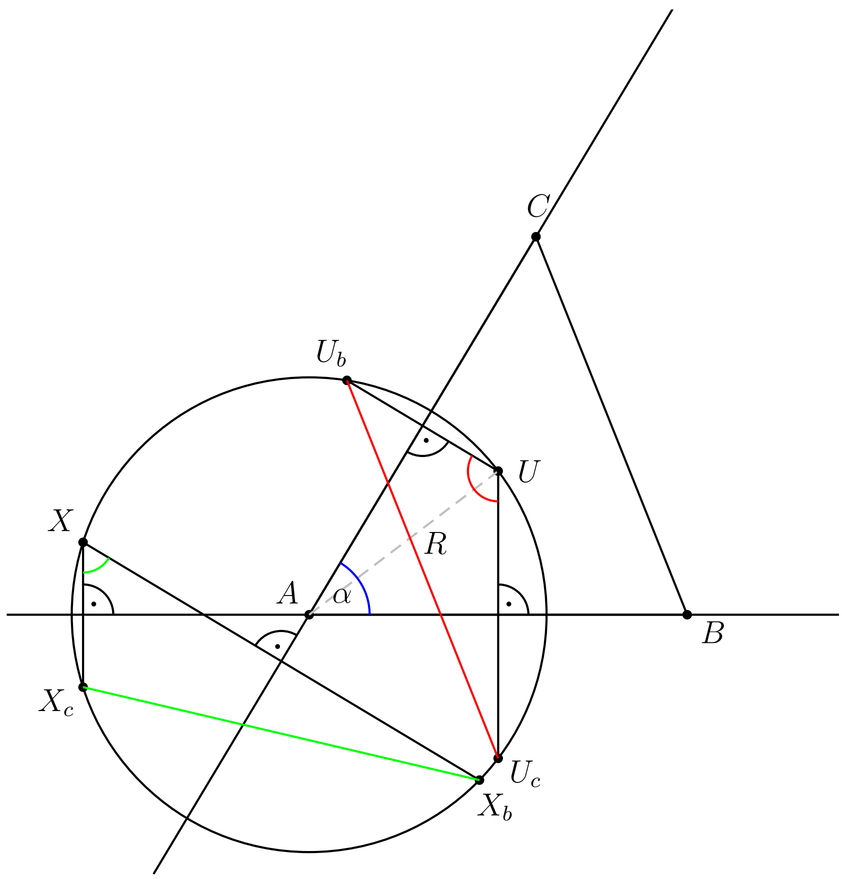

Abbildung 3: Alle Punkte auf diesem Kreis erzeugen diegleiche Spiegelstrecke.

Beweis Nach obigem Satz erfüllt U die genannte Bedingung und liegt außerdem auf dem Kreis. Sei X ein Punkt auf $K(A, R)$. Nach Konstruktion liegen dann auch X_b und X_c auf diesem Kreis. Desweiteren gilt nach dem Satz über paarweise senkrecht stehende Schenkel $\angle X_b X X_c \in \{\alpha, 180°-\alpha\}$. Dies gilt insbesondere auch für U. Nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes gilt dann

$$a_X = X_b X_c = U_b U_c = a_U = a.$$

Damit ist die eine Richtung gezeigt. Sei P ein Punkt ungleich A.[2] Dann schneidet die Gerade durch AP den Kreis $K(A, R)$ in zwei Punkten X und Y. Für diese Punkte gilt $a_X = a_Y = a$. Desweiteren liegen A, X_b und P_b sowie A, X_c und P_c auf einer Geraden[3] und es gilt:

$$\triangle A X_b F_b \cong \triangle A X F_b \sim \triangle A P G_b \cong \triangle A P_b G_b,$$

wobei F_b und G_b die Fußpunkte der Spiegelung von X bzw. P bei Spiegelung an b sind. Das Gleiche gilt natürlich auch für die Spiegelung an c und deswegen folgt:

$$\triangle X X_b X_c \sim \triangle P P_b P_c \quad \text{und} \quad \frac{X_b X_c}{P_b P_c} = \frac{AX}{AP}$$

Folglich gilt $a_P = P_b P_c = a = a_X = X_b X_c$ genau dann, wenn $AX = AP$, d. h. $P \in \{X, Y\}$, gilt.□

Satz 2.2.4 (Kongruenz mit gleicher Zuordnung) *Es gibt genau einen Punkt P, für den das Bilddreieck $\triangle P_a P_b P_c$ kongruent zu $\triangle ABC$ mit gleicher Zuordnung ist. Dies ist der Umkreismittelpunkt U des Dreiecks.*

Beweis Für einen solchen Punkt P gilt also $a_P = a$, was nach obigem Lemma genau dann der Fall ist, wenn P auf $K(A, R)$ liegt. Analog für die anderen Ecken muss also auch P auf $K(B, R)$ und P auf $K(C, R)$ liegen. Wegen $K(A, R) \cap K(B, R) \cap K(C, R) = \{U\}$ ist dies genau für $P = U$ der Fall.

2.2.3 Kongruenz in beliebiger Zuordnung

Die gerade angewandte Methode zur Bestimmung des Umkreismittelpunktes als einziger Lösung des Punktproblems un gleicher Zuordnung kann in leicht abgewandelter Form auch hier angewandt werden. Dazu ist nur die Überlegung notwendig, dass die der Beweis des obigem Lemmas genauso für beliebige Streckenlängen $s = a_P = P_b P_c$ durchgeführt werden kann. Dafür muss nur statt $K(A, R)$ der Kreis $K(A, R')$ mit

$$R' = R\frac{a}{s}$$

betrachtet werden. Diese Figur geht aus der ursprünglichen durch Streckung von A mit Streckungsfaktor $\frac{s}{a}$ hervor. Es folgt also ein abgewandeltes Lemma.

[2] $P = A$ erfüllt die Bedingungen offensichtlich nicht.
[3] Geradentreue der Spiegelung

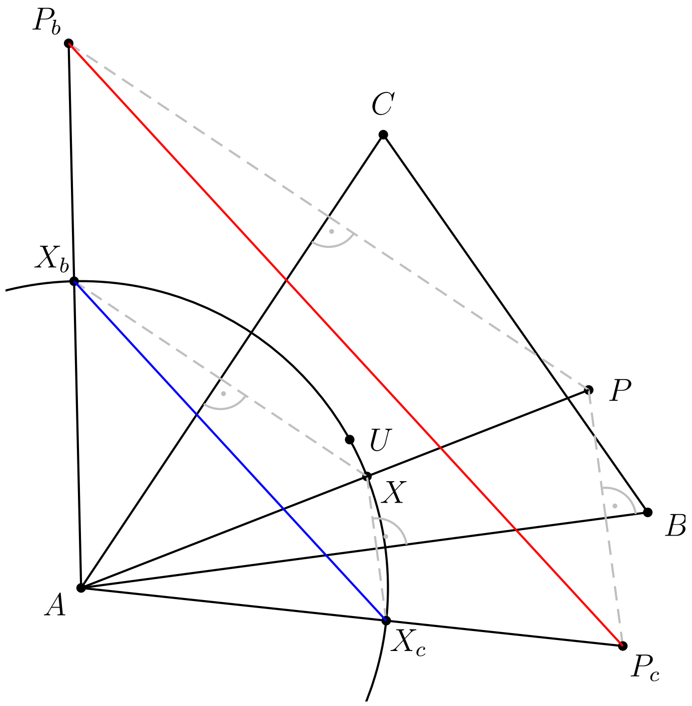

Abbildung 4: Wie sich die gewünschte Spiegellänge durch Streckung erzeugen lässt.

Lemma 2.2.5 *Der Kreis $K(A, R')$ um A mit Radius $R' = R \cdot \frac{s}{a}$ ist die Menge aller derjenigen Punkte P für die $a_P = P_bP_c = s$ gilt.*

Mithilfe dieses Lemmas lässt sich nun auch das Punktproblem allgemein lösen:

Satz 2.2.6 (Hauptsatz des kongruenten Punktproblems) *Die Menge P derjenigen Punkte, für die das Bild $\triangle_P$ bei Spiegelung an $\triangle ABC$ kongruent zu selbigem ist, entsteht durch folgenden Algorithmus:*

1. *Zeichne um A einen roten Kreis mit Radius R, einen grünen Kreis mit Radius $R \cdot \frac{b}{a}$ und einen blauen Kreis mit Radius $R \cdot \frac{c}{a}$.*

2. *Zeichne um B einen roten Kreis mit Radius $R \cdot \frac{a}{b}$, einen grünen Kreis mit Radius R und einen blauen Kreis mit Radius $R \cdot \frac{c}{b}$.*

3. *Zeichne um C einen roten Kreis mit Radius $R \cdot \frac{a}{c}$, einen grünen Kreis mit Radius $R \cdot \frac{b}{c}$ und einen blauen Kreis mit Radius R.*

4. *Bilde alle Schnittpunkte eines roten, grünen und blauen Kreises.*[4]

[4]Bei gleichschenkligen Dreiecken muss darauf geachtet werden, dass keine identischen Kreise geschnitten werden.

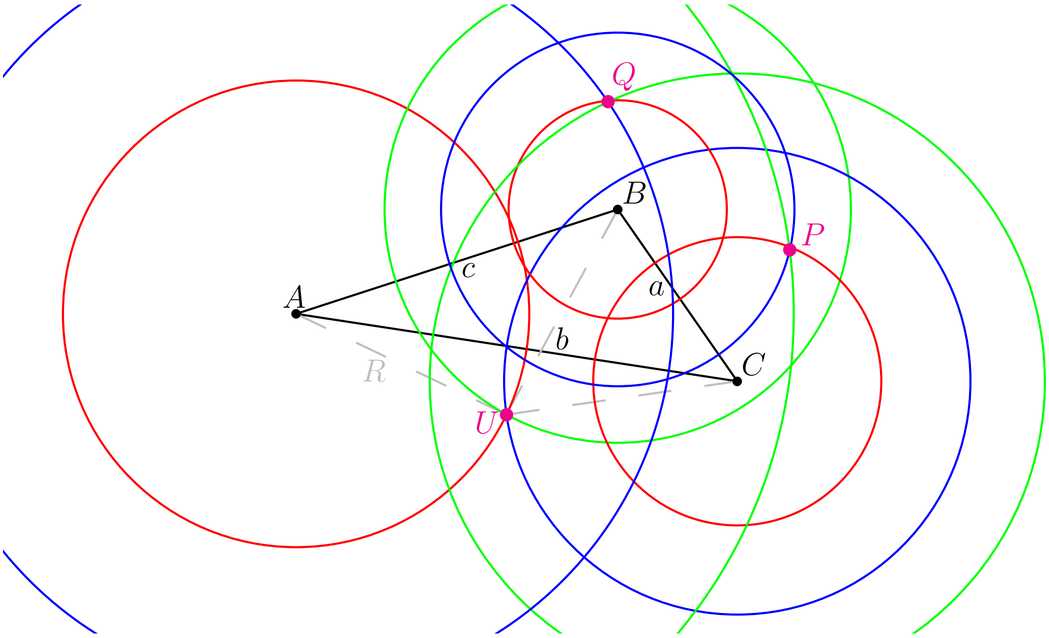

Abbildung 5: Dreieck mit drei Lösungen U, P und Q des kongruenten Punktproblems

Beweis Nach vorigem Lemma beschreiben die roten Kreise, die Menge derjenigen Punkte P, die an zwei Seiten gespiegelt die Strecke a ergeben, die grünen Kreise b und die blauen Kreise c. Ein Schnittpunkt eines roten, grünen und blauen Kreises liefert also einen Punkt, der eine Spiegelstrecke der Länge a, b bzw. c hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\triangle_P = \triangle ABC$ gilt.

Bemerkung 2.2.7 *Hat man eine Lösung als Schnittpunkt dreier Kreise gefunden, so bilden die drei anderen paarweisen Schnittpunkte der Kreise das Bild unter Dreiecksspiegelung dieses Punktes.*

3 Ausblick

3.1 Existenzfrage

Nun, da geklärt ist, wo die gesuchten Punkte liegen (können), steht die Frage in der Ebene, wie viele dieser Punkte für welche Dreiecke existieren. Die Lösungsmenge dürfte recht interessant sein und eine Betrachtung folgt in einem zweiten Teil.

Aufgabe 3.1.1 *Seien A und B die Punkte $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ eines karthesischen Koordinatensystems. Bestimme die Menge von Punkten C, so dass das $\triangle ABC$ neben seinem Umkreismittelpunkt noch mindestens eine weitere Lösung des kongruenten Punktproblems besitzt.*

3.2 Das ähnliche Punktproblem

Entsprechend dem kongruenten Punktproblem stellt sich hier die Frage, ob es Punkte P gibt, deren Bild $\triangle_P$ unter Dreiecksspiegelung an $\triangle ABC$ ein selbigem ähnlich ist. Gibt man sich dabei den Ähnlichkeitsfaktor vor, kann man die Lösungen konstruieren, indem man die Kreise aus dem Hauptsatz des kongruenten Punktproblems um eben jenen Faktor um ihren Mittelpunkt streckt.

Dabei erkennt man, dass man mit dem entsprechenden Faktor drei beliebige, paarweise nichtkonzentrische zu einem gemeinsamen Schnittpunkt strecken kann. Es gibt also auf jeden Fall Lösungen und die Zahl der Lösungen wird durch die Kombinationen der Kreise beschränkt.