Bemerkung zu Aufgabe 1 des Bundeswettbewerbs Mathematik 2002/3, 2. Stufe

Viele Schüler argumentierten, dass man alle Spiegelungspunkte des Graphen erhält, wenn man zwei Spiegelungspunkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ mit „minimalem“ $\Delta_x := |\, x_1 - x_2 \,|$ betrachtet. Dann sind mit $\Delta_y = |\, y_1 - y_2 \,|$

$$P_n(x_1 + n\Delta_x, y_1 + n\Delta_y), \quad n \in \mathbb{Z}$$

alle Spiegelungspunkte. Einfache Gegenbeispiele zu dieser Situation sind alle linearen Funktionen. Hier gibt es keinen kleinsten Abstand zwischen zwei Symmetriepunkten, da *jeder* Punkt des Graphen Symmetriezentrum ist.

Aber selbst wenn man die linearen Funktionen ausschließt, gibt es interessante Beispiele von Funktionen,

(a) die Symmetriezentren besitzen, die beliebig nah beieinander liegen,
(b) die nicht linear sind,
(c) bei denen nicht alle Punkte des Graphen Symmetriepunkte sind.

Wir konstruieren hier eine solche Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \{0, 1, -1\}$ als Komposition $f = h \circ p$ der natürlichen Projektion $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ und einer geeigneten Funktion $h\colon \mathbb{R}/\mathbb{Q} \to \{0, 1, -1\}$. Hierbei ist $X = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ die Faktorgruppe von $(\mathbb{R}, +, 0)$ nach der Untergruppe $(\mathbb{Q}, +, 0)$, das heißt, die Elemente von X sind die Äquivalenzklassen $\overline{x}$, $x \in \mathbb{R}$, bezüglich der Äquivalenzrelation

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

Nun zerlegen wir $X \setminus \{\overline{0}\}$ in paarweise disjunkte Zweiermengen $\{\overline{x}, -\overline{x}\}$. Dies sind tatsächlich alles Zweiermengen, denn wäre $\overline{x} = -\overline{x} = \overline{-x}$, dann ist $x - (-x) \in \mathbb{Q}$, also $x \in \mathbb{Q}$ also $\overline{x} = \overline{0}$; die Null wurde vorher entfernt. Mit Hilfe des Auswahlaxioms wählen wir aus jeder der Zweiermengen genau ein Element $\overline{x}$ aus und setzen $h(\overline{x}) = 1$ und $h(-\overline{x}) = -1$. Ferner setzen wir $h(\overline{0}) = 0$.

Die Komposition $f(x) = h(\overline{x})$ hat dann folgende Eigenschaften:

1. $f(x + q) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $q \in \mathbb{Q}$.
2. Es gilt für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dass $f(x + p) = 1$ genau dann wenn $f(q - x) = -1$ für alle $p, q \in \mathbb{Q}$.
3. Die Punkte $(q, 0)$, $q \in \mathbb{Q}$ sind die Symmetriezentren des Graphen von f.

Die erste Eigenschaft (Periodizität mit jeder rationalen Zahl als Periode) ist klar, da f auf den Restklassen modulo $\mathbb{Q}$ konstant ist. Die zweite Eigenschaft folgt aus $h(-\overline{x}) = -h(\overline{x})$ (Konstruktion).
Spiegelt man einen Punkt $(p, 0)$, $p \in \mathbb{Q}$ an $(q, 0)$, so erhält man $(2q - p, 0)$. Wegen $2q - p \in \mathbb{Q}$ ist das ein Punkt vom Graphen von f. Spiegelt man einen Punkt (x, ε), $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, des Graphen (also mit $h(\overline{x}) = \varepsilon$) an $(q, 0)$, so hat man den Punkt $(2q - x, -\varepsilon)$. Wegen $f(2q - x) = h(\overline{-x}) = -h(\overline{x}) = -\varepsilon$ liegt auch dieser Punkt wieder auf dem Graphen von f. Hieraus folgt die dritte Eigenschaft.