Bewegungsgeometrie

Axel Schüler*

2. September 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Konstruktionen mit Bewegung **1**
1.1 Zentrische Streckung 1
1.2 Drehungen 3
1.3 Spiegelungen 4

2 Beweise mit zentrischer Streckung **5**
2.1 Ähnlichkeitslage 5
2.2 Der Feuerbachsche Kreis 10

3 Beweise mit Verschiebungen **12**

4 Die Winkelhalbierende **12**
4.1 Apolloniuskreise 15

5 Beweise mit Hilfe von Drehungen **17**
5.1 Alternierende Streckensumme 17
5.2 Komplexe Zahlen und Geometrie 25

6 Beweise mit Drehstreckungen **29**

7 Räumliche Aufgaben **32**
7.1 Verschiebung 32
7.2 Drehung 33

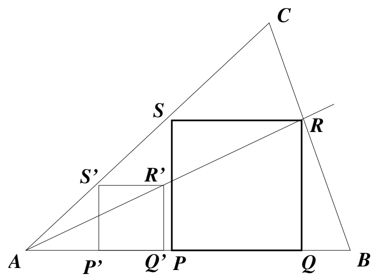
8 Kürzeste Linien **33**

1 Konstruktionen mit Bewegung

1.1 Zentrische Streckung

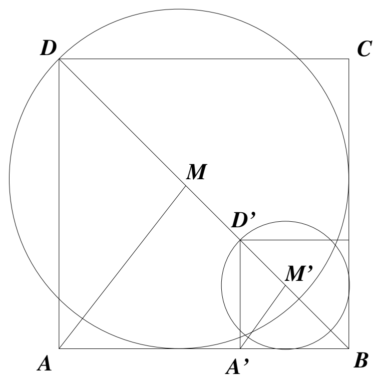
Mit Hilfe der **Versuch–und–Irrtum–Methode** können eine Reihe von Konstruktionsaufgaben mittels zentrischer Streckung durchgeführt werden. Später stellt sich heraus, dass mitunter andere Bewegungen schneller zum Ziel führen können.

*Institut für Angewandte Trainingswissenschaft Leipzig



Aufgabe 1 Gegeben sei ein Dreieck ABC. Konstruiere ein Quadrat $PQRS$, so dass $\overline{PQ}$ auf der Seite $\overline{AB}$, R auf $\overline{BC}$ und S auf $\overline{CA}$ liegt.

Lösung: Es wird zunächst ein beliebiges Quadrat $P'Q'R'S'$ konstruiert mit $P', Q' \in \overline{AB}$, $S' \in \overline{AC}$. Der Punkt R' ist damit festgelegt. Er liegt i.a. nicht auf $\overline{BC}$. Durch zentrische Streckung mit Zentrum A erhält man $R \in \overline{BC}$ nämlich als Schnittpunkt von AR' mit BC.



Aufgabe 2 (Sächs. Korresp. 9/10 2006/7) Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Konstruiere einen Kreis k durch D, der die Seiten AB und BC berührt.

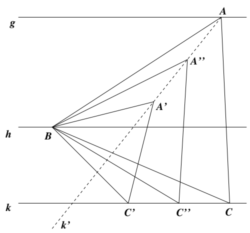
Lösung: Wir wählen einen beliebigen Punkt M' auf der Diagonalen $\overline{BD}$, fälle das Lot auf AB und zeichne den Kreis k' mit Mittelpunkt M', der AB und BC berührt. Sein Schnitt mit der Diagonalen sei D'. Fällt man das Lot von D' auf AB, so erhält man als Fußpunkt A'. Schließlich verschiebt man $A'N$ parallel durch A und erhält als Schnitt mit der Diagonalen $\overline{BD}$ den Mittelpunkt M des gesuchten Kreises. Fazit: Der HIlfskreis k' um M' wird gestreckt mit Zentrum B, bis er durch D verläuft.

Aufgabe 3 (Apollonius) Gegeben sei eine Gerade r und zwei Punkte P und Q auf derselben Seite von g.
Konstruiere einen Kreis k durch P und Q, der r berührt.

Lösung: Diese Aufgabe ist eines der *Apollonischen Berührungsprobleme*: Gegeben sind drei Stücke (Kreis oder Gerade oder Punkt), man konstruiere einen Kreis, der alle drei Stücke berührt. Ist zumindest **ein** Punkt P in der Aufgabe enthalten, so betrachte man die *Spiegelaufgabe*. Man wähle einen beliebigen Inversionskreis i mit Mittelpunkt P. Dann geht P ins Unendliche über und gesucht ist eine Gerade, die die anderen beiden gespiegelten Stücke berührt. Spiegelt man diese Gerade an i zurück, so erhält man den gesuchten Kreis durch P.
Die Menge der Mittelpunkte der Kreise k, die durch P und Q gehen, liegen auf der Mittelsenkrechten m_{PQ}. Die Mittelpunkte der Kreise, die von P und r denselben Abstand haben, bilden eine Parabel (die sich allerdings nicht konstruieren lässt).
Es sei Z der Schnittpunkt von r und m_{PQ}. Wir betrachten alle möglichen zentrischen Streckungen von Kreisen k', deren Mittelpunkt auf m liegt und die r berühren. Die korrekte zentrische Streckung findet man, wenn man die Gerade PZ betrachtet, die k' etwa in P_1 und P_2 schneidet. Dementsprechend gibt es genau zwei Steckungen von P_1 nach P und P_2 nach P und damit zwei Lösungen k_1 und k_2.

Aufgabe 4 Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC.
(a) Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck PQR mit P auf $\overline{BC}$, Q auf $\overline{AC}$ und R auf $\overline{AB}$, so dass $QR \perp AB$.
(b) Es sei P auf $\overline{BC}$ fixiert. Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck PQR mit Q auf der Geraden AC und R auf AB.

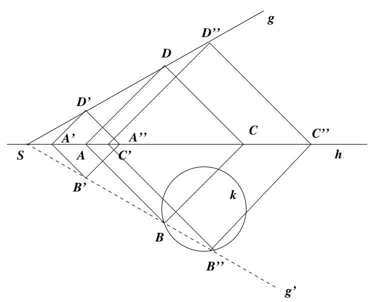
Lösung: (a) Es wird zunächst ein beliebiges gleichseitiges Dreieck $P'Q'R'$ konstruiert mit $P' \in \overline{BC}$ und $Q' \in \overline{AC}$ was dann mit Zentrum C gestreckt wird.
(b) Drehe AC um P um $-60°$ (im Uhrzeigersinn). Der Schnittpunkt mit BC ist der gesuchte Punkt Q.



Aufgabe 5 Gegeben seien drei parallele Geraden g, h und k. Man konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC mit $A \in g$, $B \in h$ und $C \in k$.

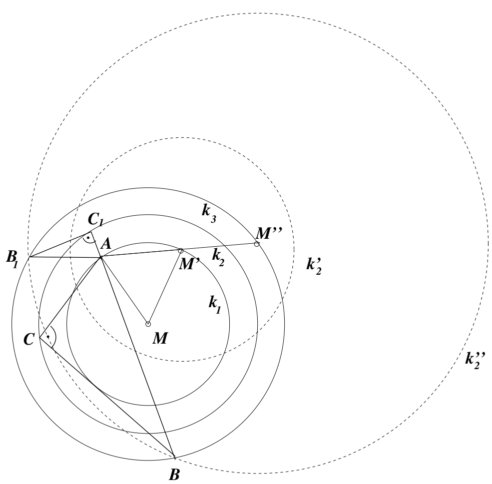
Lösung: Wir fixieren $B \in h$ und wählen einen beliebigen Punkt C' auf k. Zu diesem Paar konstruieren wir ein gleichseitiges Dreieck $BC'A'$. In der Regel wird A' nicht auf g liegen. Wir machen das selbe noch einmal mit B und einem weiteren Punkt C'' auf k und erhalten A''.

Nun erkennt man, dass die Menge der Punkte $A^{(k)}$, die mit B und einem festen Punkt $C^{(k)}$ ein gleichseitiges Dreieck bilden, die um 60° um B gedrehte Gerade k ist. Diese bezeichnen wir mit k'. Der Schnittpunkt von k' und g ist der gesuchte Punkt A.
Eindeutigkeit: Natürlich kann man nun das Dreieck ABC beliebig verschieben und an einer zu g, h, k senkrechten Geraden spiegeln.



Aufgabe 6 Gegeben seien zwei Geraden g und h und ein Kreis k in der Ebene. Man konstruiere ein Quadrat $ABCD$ mit $A, C \in h$, $D \in g$ und $B \in k$!

Lösung: Es sei S der Schnittpunkt der Geraden g und h. Wir konstruieren zunächst ein Quadrat $A'B'C'D'$, das bis auf $B' \in k$ alle Bedingungen erfüllt. Dann strecken wir das Quadrat mit dem Zentrum S und erhalten die zwei Lösungen $ABCD$ und $A''B''C''D''$ als Schnittpunkte der an h gespiegelten Geraden g mit k: B und B''.



Aufgabe 7 Gegeben seien drei konzentrische Kreise k_1, k_2 und k_3 mit den Radien 3, 4 und 5. Konstriere ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$ und $\gamma = 90°$, so dass A, B und C jeweils auf k_1, k_3 bzw. auf k_2 liegen.

Lösung: Zunächst fixieren wir einen beliebigen Punkt A auf k_1 und drehen k_2 um A um 60° und erhalten k_2' mit Mittelpunkt M'. Dann strecken wir k_2' mit Zentrum A und Faktor 2. Als Ergebnis erhalten wir den Kreis k_2'' mit Mittelpunkt M'' und dem Radius 8. Seine Schnittpunkte mit k_3 sind die gesuchten Punkte B und B_1.

1.2 Drehungen

Aufgabe 8 (Sächs. Landesseminar 2002, Klasse 9/10) Gegeben sei ein Punkt P. Man konstruiere ein Quadrat $ABCD$, so dass P von den Punkten A, B bzw. C die Abstände 1, 2 bzw. 3 hat.

Lösung: Die „Umkehraufgabe"ist genau Aufgabe 35. Die Drehung um B um 90° im Uhrzeigersinn führt auf ein konstruierbares rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck PBP' mit Schenkellänge 2. Über $\overline{PP'}$ lässt sich dann nach SSS das Dreieck $PP'C$ konstruieren.
Bem. Die Punkte A, P und P' liegen auf einer Geraden, da nach Umkehrung des Pythagoras einerseits gilt: $\angle CP'A = 90°$. Andererseits ist $AP \perp A'P'$.

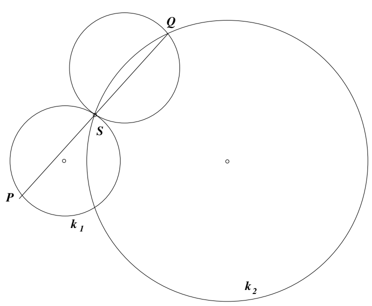
Aufgabe 9 (BWM 1995.1.2) Gegeben sei eine Gerade g in der Ebene und ein Punkt A außerhalb von g.
Bestimme alle Punkte P, für die es einen Punkt Q auf g gibt, so dass das Dreieck APQ gleichseitig ist.

Lösung: Der gesuchte geometrische Ort sind die beiden Geraden g_+ und g_-, die man erhält, wenn man g um A um $\pm 60°$ dreht. Jedem Punkt P auf g entspricht ein Bildpunkt $P_+ \in g_+$ mit $\overline{AP} = \overline{AP_+}$ und $\angle PAP_+ = 60°$. Damit ist PAP_+ gleichseitig.

Aufgabe 10 Gegeben seien vier Strahlen a, b, c und d mit gemeinsamen Anfangspunkt Z.
(a) Man konstruiere ein Rhombus $ABCD$ so, dass die Punkte A, B, C und D auf den gegebenen Strahlen a, b, c bzw. d liegen!
(b) Gleiche Aufgabe wie in (a), wobei der Innenwinkel des Rhombus, der bei A liegt gleich 60° sein soll.
(c) Gleiche Aufgabe wie in (a) für ein Quadrat.

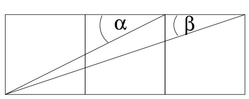
Aufgabe 11 Gegeben seien in der Ebene vier Punktmengen (Geraden, Kreise, Vierecksfläche, o. ä.). Konstruiere ein Quadrat $ABCD$, so dass die Punkte A, B, C und D jeweils in einer der gegebenen Punktmengen liegen!

1.3 Spiegelungen

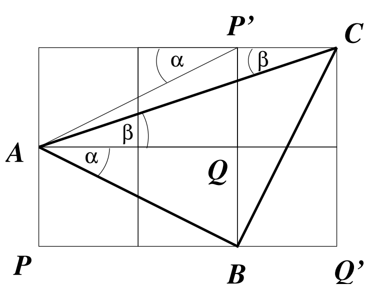


Aufgabe 12 Gegeben seien zwei sich schneidende Kreise k_1 und k_2. Einer der Schnittpunkte sei S.
Konstruiere eine durch S gehende Gerade, die k_1 und k_2 außer in S noch in den Punkten P bzw. Q so schneidet, dass S der Mittelpunkt von $\overline{PQ}$ ist.

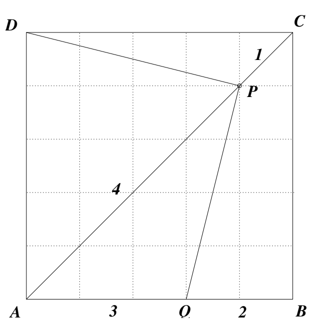
Lösung: Man punktspiegle k_1 an S — das ist das selbe wie eine Drehung um S um 180°. Der zweite Schnittpunkt mit k_2 ist Q.



Aufgabe 13 Gegeben seien drei benachbarte Quadrate wie in der nebenstehenden Skizze. Zeige, dass $\alpha + \beta = 45°$.

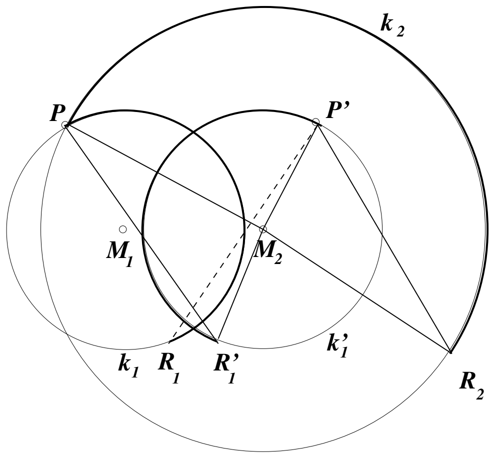


Lösung: Wir spiegeln die 3 Quadrate an der unteren Kante und erhalten ein gleichschenklig–rechtwinkliges Dreieck ABC mit Basiswinkel $\alpha + \beta = 45°$. In der Tat, die Schenkel sind gleich lang, da es sich jeweils um die Diagonale in einem 1×2-Domino handelt. Der Winkel an der Spitze ist ein rechter, da das Rechteck $BQAP$ bei Drehung um B um 90° im Uhrzeigersinn in das Rechteck $BQ'CP'$ über geht.



Aufgabe 14 Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Der Punkt P auf $\overline{AC}$ teile die Strecke im Verhältnis 4 : 1, der Punkt Q teile die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis 3 : 2. Beweise, dass PQD ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ist.

Lösung: Man erkennt, dass $\overline{OP}$ und $\overline{PD}$ beides Diagonalen in zueinander senkrechten Rechtecken vom Format 1×4 sind.



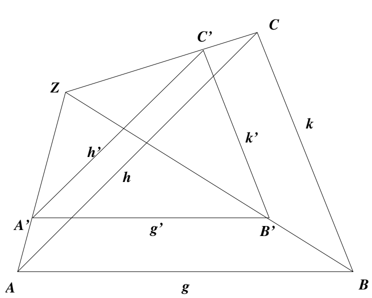
Aufgabe 15 (IMO 1983) Gegeben seien zwei sich in P schneidende Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 bzw. M_2. Von P aus bewegen sich Punkte R_1 bzw. R_2 auf k_1 bzw. k_2 mit *gleicher Winkelgeschwindigkeit* im Uhrzeigersinn; das heißt, wenn R_1 einen Halbkreis durchlaufen hat, so auch R_2 auf k_2.
Man beweise, dass es einen Punkt der Ebene gibt, der von R_1 und R_2 zu jedem Zeitpunkt gleichweit entfernt ist.

Lösung: Wir spiegeln k_1 an der Mittelsenkrechten zu $\overline{M_1M_2}$, so dass k_1' und k_2 konzentrisch sind. Wir zeigen, dass der Bildpunkt P' von P der gesuchte Punkt ist.
Es sei R_1' der R_1 entsprechende Punkt auf k_1'. Da $\angle PM_1R_1 = \angle PM_2R_2$ nach Voraussetzung, gilt $\angle P'M_2R_1' = \angle PM_2R_2$. Zieht man den gemeinsamen Anteil $\angle PM_2P'$ ab, so hat man $\angle PM_2R_1 = \angle P'M_2R_2$. Folglich gilt $\triangle PM_2R_1' \equiv \triangle P'M_2R_2$ nach Kongruenzsatz SWS. Also ist $\overline{PR_1'} = \overline{P'R_2} = \overline{P'R_1}$.

2 Beweise mit zentrischer Streckung

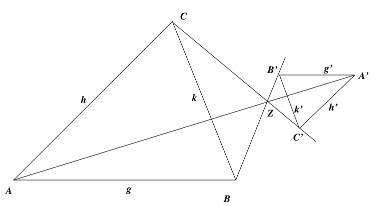
2.1 Ähnlichkeitslage

Zwei Figuren befinden sich in *Ähnlichkeitslage*, wenn die Verbindungsgeraden einander entsprechender Punkte parallel sind. Es gibt im wesentlichen vier Fälle von Figuren in Ähnlichkeitslage. Sind die Figuren kongruent, so gibt es eine Verschiebung, die die eine Figur in die andere überführt oder aber eine Drehung um 180°. Sind die Figuren ähnlich und nicht kongruent, so gibt es entweder eine zentrische Streckung mit positivem Faktor oder mit negativem Faktor, welche die Figuren ineinander überführen. Im ersten Fall liegt das Streckungszentrum stets *außerhalb* der Strecke $\overline{PP'}$, im zweiten Fall stets innerhalb. Die zweite Abbildung kann man sich auch als Komposition einer Steckung mit positivem Faktor und einer 180°-Drehung um das Zentrum vorstellen.



Aufgabe 16 Gegeben seien drei Paare paralleler Geraden $g\|g'$, $h\|h'$ und $k\|k'$. Es seien A, B und C die Schnittpunkte von g, h bzw. g, k bzw. h, k. Analog seien A', B' und C' die Schnittpunkte der entsprechenden Geraden g', h' und k'.
(a) Beweise, dass die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ einander ähnlich sind.
(b) Beweise, dass die Geraden AA', BB' und CC' durch einen gemeinsamen Punkt verlaufen.
In der Ebene seien zwei einander ähnliche Dreiecke $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ gegeben, wobei einander entsprechende Seiten parallel seien, das heißt, $AB\|A'B'$, $BC\|B'C'$ und $AC\|A'C'$.

Beweis.



Da $g \| g'$ und $h \| h'$, sind die durch g und h bzw. durch g' und h' eingeschlossenen Winkel bei A bzw. A' gleich groß. Somit sind die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ einander ähnlich nach dem Ähnlichkeitssatz WW. Der Ähnlichkeitsfaktor sei $q > 0$. Es sei Z der Schnittpunkt der Geraden AA' und BB' und S der Schnittpunkt von BB' mit CC'. Dann gilt

$$\overline{ZA} : \overline{ZA'} = \overline{ZB} : \overline{ZB'} = q = \overline{SB} : \overline{SB'} = \overline{SC} : \overline{SC'}.$$

Nun gibt es zwei Fälle: Z und S liegen beide außerhalb oder beide innerhalb der Strecke $\overline{BB'}$. Der dritte denkbare Fall, dass einer der Punkte innerhalb und der andere außerhalb der Strecke $\overline{BB'}$ liegt, entfällt aus anordnungsgeometrischen Argumenten $\cdots$.

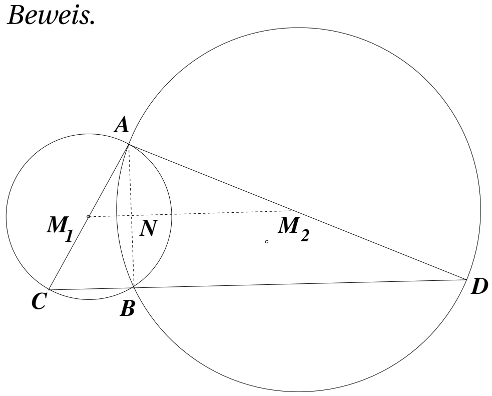
Da in beiden Fällen das Teilungsverhältnis gleich ist, folgt in beiden Fällen $Z = S$. Insbesondere geht im ersten Fall $A'B'C'$ aus ABC durch eine zentrische Streckung mit Zentrum Z und Faktor q hervor; im zweiten Fall handelt es sich um eine zentrische Streckung mit dem Faktor $-q$, das ist die Verknüpfung der zentrischen Streckung mit anschlienßeder Drehung um 180° um Z. ∎

Bemerkung 1 Wendet man die obige Aufgabe auf das Mittendreieck eines Dreiecks an — die Verbindung der Mitten liefert zu den Seiten parallele Geraden — so hat man, dass sich die Seitenhalbierenden in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 17 (MO 471313) Die Kreise k_1 mit dem Mittelpunkt M_1 und k_2 mit dem Mittelpunkt M_2 schneiden sich in zwei verschiedenen Punkten A und B. Die Gerade AM_1 schneidet k_1 außer in A noch im Punkte C; die Gerade AM_2 schneidet k_2 außer in A noch in D.

Man zeige, dass die Geraden M_1M_2 und CD parallel sind, und dass B auf der Geraden CD liegt.

Beweis.



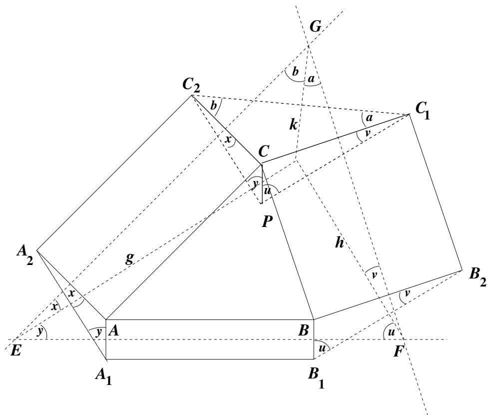
Offenbar geht das Dreieck AM_1M_2 bei zentrischer Streckung mit dem Faktor 2 mit Zentrum A in das Dreieck ACD über. Daher (oder nach Umkehrung des Strahlensatzes) sind M_1M_2 und CD parallele Geraden. Spiegelt man A an M_1M_2, so erhät man aus Symmetriegründen B. Folglich gilt für den Schnittpunkt N von AB und M_1M_2, dass $\overline{AN} = \overline{NB}$. Somit ist B der Bildpunkt von N bei obiger Streckung. Da N auf M_1M_2 liegt, liegt B auf CD.

∎

Aufgabe 18 (BWM 1996.2.3) Über den Seiten eines Dreiecks ABC sind nach außen Rechtecke ABB_1A_1, BCC_1B_2 und CAA_2C_2 errichtet.

Beweise, dass sich die Mittelsenkrechten der Strecken $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$ und $\overline{C_1C_2}$ in einem gemeinsamen Punkt schneiden.

Beweis.



Es seien E, F und G die Umkreismittelpunkte der Dreiecke AA_1A_2, BB_1B_2 bzw. CC_1C_2. Ferner seien g , h und k die Mittelsenkrechten von $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$ bzw. $\overline{C_1C_2}$. Dann ist nach obiger Aufgabe (16) EFG ein zu ABC ähnliches Dreieck. Wir bezeichnen mit x, y, u, v, a und b die Innenwinkel der Dreiecke AA_1A_2, BB_1B_2 bzw. CC_1C_2, die bei A_1, A_2,B_1, B_2, C_1 bzw. C_2 liegen. Wegen der Orthogonalität der Schenkel sind dann die Winkel, die durch die Geraden g, h und k bei E, F und G abgeteilt werden ebenfalls x, y, u, v, a bzw. b.

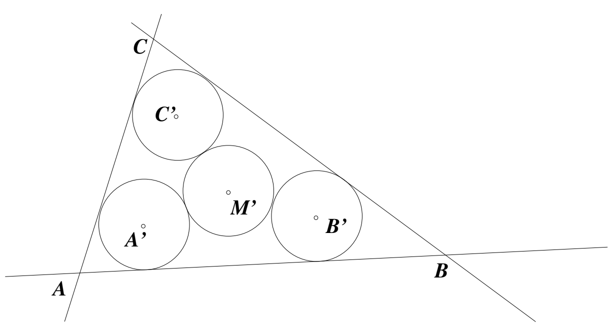
Nach der Umkehrung des Satzes von CEVA genügt es also zu zeigen, dass

$$\frac{\sin x}{\sin y}\,\frac{\sin u}{\sin v}\,\frac{\sin a}{\sin b} = 1. \tag{1}$$

Dazu verschieben wir das Dreieck AA_1A_2 und erhalten das Dreieck CPC_2. Analog erhalten wir durch Verschieben von Dreieck BB_1B_2 da Dreieck CPC_1. Diese Konstruktion ist möglich und führt auf einen eindeutigen Punkt P, da die Seiten $\overline{AA_1}$ und $\overline{BB_1}$ wie auch die Seitenpaare $\overline{BB_2}$ und $\overline{CC_1}$ sowie $\overline{AA_2}$ und $\overline{CC_2}$ parallel und gleich lang sind. Somit ist PC_1C_2 ein Dreieck mit innerem Punkt P, der mit den Eckverbindungen zu C, C_1 und P und den Dreiecksseiten die folgenden Winkel einschließt: y, u, v, a, b und x. Nach dem CEVAschen Satz gilt dann

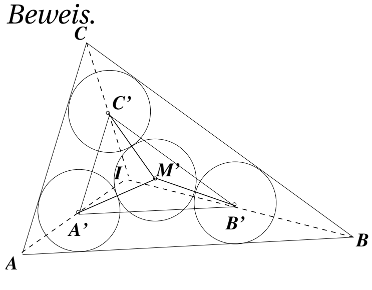
$$\frac{\sin y}{\sin u}\,\frac{\sin v}{\sin a}\,\frac{\sin b}{\sin x} = 1.$$

Dies beweist (1) und somit schneiden die Mittelsenkrechten einander in einem Punkt. ■



Aufgabe 19 (MO 421142) Im Innern des Dreiecks ABC liegen vier kongruente Kreise k_1, k_2, k_3 und k_4 mit den Mittelpunkten A', B', C' und M' wie in der nebenstehenden Skizze angedeutet. Dabei berühren k_1, k_2 und k_3 jeweils zwei Seiten des Dreiecks und k_4 von außen. Beweise, dass M' auf der Geraden durch In- und Umkreismittelpunkt von Dreieck ABC liegt.

Beweis.

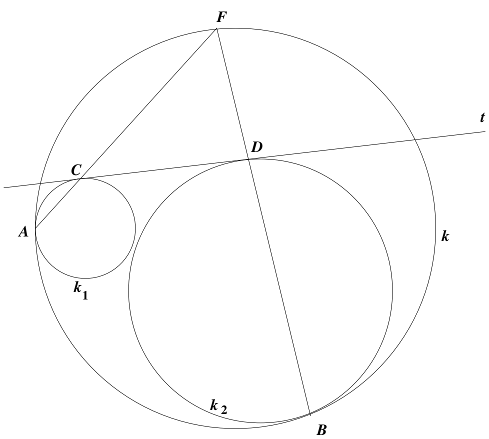


(a) Nach Konstruktion liegen A', B' bzw. C' auf den Winkelhalbierenden von α, β und γ, da der Kreis k_1 die Seiten c und b des Dreiecks ABC berührt. Da die Tangentennabschnitte der beiden Tangenten c und b von A aus an k_1 gleich lang sind, hat A' von c bzw. b den selben Abstand und liegt damit auf der Winkelhalbierenden w_α.

Somit schneiden sich AA', BB' und CC' im Inkreismittelpunkt I des Dreiecks ABC. Ferner sind $A'B'$, $A'C'$ und $B'C'$ parallel zu den entsprechenden Seiten AB, AC bzw. BC, da die drei Kreise k_1,

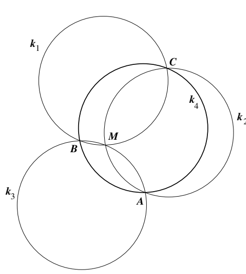
K_2 und k_3 gleiche Radien haben. Somit ist $A'B'C'$ das Bild von ABC bei einer Stauchung mit dem Zentrum I.
(b) Wir zeigen, dass M' der Umkreismittelpunkt von Dreieck $A'B'C'$ ist. Da k_4 die drei anderen Kreise von außen berührt und da die Berührungspunkte alle auf den Verbindungen der Mittelpunkte liegen, gilt $\overline{M'A'} = \overline{M'B'} = \overline{M'C'} = 2r$, wenn r der Radius der vier Kreise ist. Somit hat M' von A', B' und C' den gleichen Abstand, ist somit Umkreismittelpunkt von $A'B'C'$.
(c) Bei einer zentrischen Streckung/Stauchung liegen einander entsprechende Punkte auf einer Geraden durch das Streckungszentrum. Das gilt insbesondere für den Umkreismittelpunkt M von ABC und den entsprechenden Umkreismittelpunkt M' von $A'B'C'$. Somit liegen M, M' und I auf einer gemeinsamen Geraden. ∎

Bemerkung 2 Der Beweis verläuft ganz genauso, wenn nur vorausgesetzt wird, dass die 3 Kreise k_1, k_2 und k_3 die gleichen Radien besitzen.

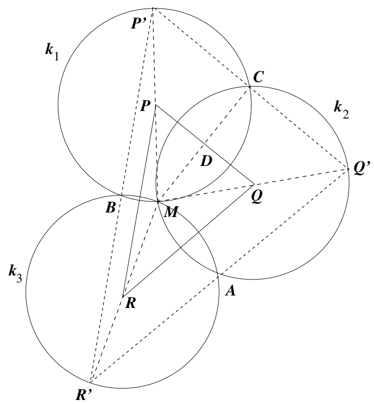


Aufgabe 20 (Baltic Way 1992) Gegeben sei ein Kreis k in der Ebene und zwei Kreise k_1 und k_2, die k von innen in den Punkten A bzw. B berühren. Ferner sei t eine gemeinsame Tangente von k_1 und k_2 so, dass k_1 und k_2 beide auf der selben Seite von t liegen. Es seien C und D die Berührungspunkte von t mit k_1 bzw. k_2.
Beweise, dass die Geraden AC und BD sich in einem Punkt F schneiden, der auf k liegt.

Beweis. Es seine F_1 bzw. F_2 die Schnittpunkte von AC bzw. BD mit k. Bei einer zentrischen Streckung mit Zentrum A gehe k_1 in k über. Dabei geht C in F_1 über und die Tangente t in eine Tangente t_1 an k in F_1. Analog betrachten wir die zentrische Streckung mit Zentrum B, die k_2 in k überführt. Hierbei geht D in F_2 über und die Tangente t in eine Tangente t_2 an k in F_2.
Da aber die Tangenten t_1, t und t_2 parallel sind, müssen t_1 und t_2 überein stimmen. Folglich stimmen auch F_1 und F_2 überein. ∎



Aufgabe 21 Gegeben seien drei kongruente Kreise k_1, k_2 und k_3, die durch einen gemeinsamen Punkt M verlaufen und sich paarweise außer in M noch in den Punkten A, B und C schneiden.
Beweise, dass der Umkreis k_4 von ABC kongruent zu den drei Ausgangskreisen ist.



Beweis. Es seien P, Q bzw. R die Mittelpunkte der Kreise k_1, k_2 und k_3. Nach Voraussetzung — alle drei Kreise haben denselben Radius r — ist dann M der Umkreismittelpunkt von Dreieck PQR, welcher auch den Radius r hat.
Da PQ die Symmetrieachse der Kreise k_1 und k_2 ist, ist $MQCP$ ein Rhombus. Insbesondere halbieren einander die Diagonalen $\overline{PQ}$ und $\overline{MC}$. Das Bild bei der zentrischen Streckung des Dreiecks PQR mit Zentrum M und Faktor 2 sei das Dreieck $P'Q'R'$, dessen Ecken auf den Kreisen k_1, k_2 bzw. auf k_3 liegen. Nach der obigen Bemerkung über die Rhomben ist C der Bildpunkt des Mittelpunktes D von $\overline{PQ}$ bei dieser Streckung.

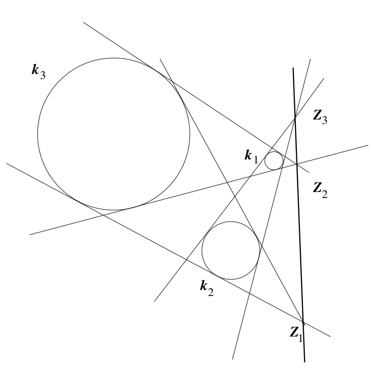
Insbesondere ist C der Mittelpunkt von $\overline{P'Q'}$. Somit ist ABC das Seitenmittendreieck von $P'Q'R'$ und hat als solches den halben Umkreisradius von $P'Q'R'$. Andererseits hat $P'Q'R'$ den doppelten Umkreisradius $2r$ von PQR. Also sind die Dreiecke ABC und PQR kongruent (über eine Punktspiegelung), Das Dreieck ABC hat also ebenfalls den Umkreisradius r. □

Aufgabe 22 (Variante 1) Gegeben seien drei kongruente Kreise k_1, k_2 und k_3, mit den Mittelpunkten P, Q bzw. R, die durch einen gemeinsamen Punkt M verlaufen und sich paarweise außer in M noch in den Punkten A, B und C schneiden. Dabei sei A der zweite Schnittpunkt von k_2 und k_3, B der von k_1 und k_3 und C der von k_1 und k_2.
Beweise, dass sich die Geraden AP, BQ und CR in einen gemeinsamen Punkt schneiden.

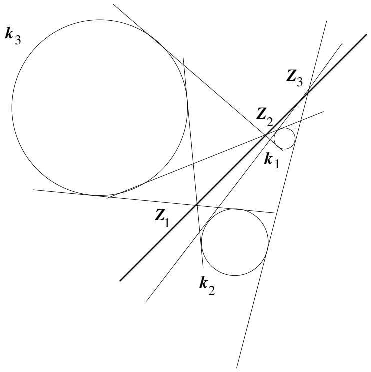
Beweis. Nach dem Beweis der vorangegangenen Aufgabe ist klar, dass die Dreiecke ABC und PQR über eine Drehung um 180° um einen Punkt Z (dem Mittelpunkt von Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt von ABC) kongruent sind. Dies ist aber gleichzeitig eine Punktspiegelung an Z, so dass alle Geraden, die einander entsprechende Punkte miteinander verbinden durch Z gehen. Insbesondere schneiden sich AP, BQ und CR in Z. ■

Aufgabe 23 (Variante 2) Gegeben sei ein Dreieck ABC mit den Seitenmitten K, L, bzw. M von $\overline{CA}$, $\overline{BC}$ bzw. $\overline{AB}$.
Beweise, dass sich die drei Umkreise der Dreiecke AKM, BKL und CLM in einem Punkt schneiden.

Beweis. Wir benutzen die Figur von Aufgabe 21 und benennen A, B, C um in K, L und M sowie P', Q' und R' um in A, B bzw. C. Ferner seien, wie in der Skizze, P, Q und R die Mittelpunkte der obigen kongruenten Kreise. Dann gilt für den Mittelpunkt M des Umkreises von PQR **Argument verbessern!!!** ■



Aufgabe 24 Gegeben seien drei paarweise inkongruente, sich nicht schneidende Kreise in der Ebene.
Beweise: Die drei Schnittpunkte der äußern gemeinsamen Tangenten je zweier Kreise liegen auf einer gemeinsamen Geraden.



Aufgabe 25 (Variante) Gegeben seien drei paarweise inkongruente, sich nicht schneidende Kreise in der Ebene.
Beweise: Die drei Schnittpunkte gebildet aus einem Paar äußerer gemeinsamen Tangenten und zwei Paaren von inneren gemeinsamen Tangenten liegen auf einer gemeinsamen Geraden.

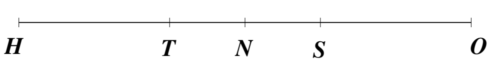
Aufgabe 26 (Variante) Gegeben seien drei paarweise parallele, gleichorientierte Strecken $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ und $\overline{CC'}$ verschiedener Länge.
Zeige, dass die drei Schnittpunkte der Geradenpaare AB, $A'B'$, AC und $A'C'$ sowie BC und $B'C'$ auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Beweis. Beweis wie oben oder mit dem Satz von Desargues. ∎

2.2 Der Feuerbachsche Kreis

Wir wollen zeigen, dass in jedem Dreieck ABC der Umkreis des Höhenfußpunktsdreiecks $A_1B_1C_1$ und des Mittendreiecks $A'B'C'$ zusammen fallen und dass dieser Kreis auch noch durch die drei Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte A_2, B_2 und C_2 verläuft. Dies ist der Feuerbachsche Kreis.

Dies folgt alles aus der genaueren Betrachtung einer geeigneten Strauchung: Sie habe als Zentrum den Schwerpunkt S (Schnittpunkt der Seitenhalbierenden) und den Faktor $-\frac{1}{2}$. Die Höhen des großen Dreiecks ABC gehen dabei über in die Höhen des kleinen Mittendreiecks $A'B'C'$, welches gleichzeitig die Mittelsenkrechten von ABC sind. Somit liegen Höhenschnittpunkt H, Schwerpunkt S und Umkreismittelpunkt O von ABC auf einer gemeinsamen Geraden, der Eulerschen Geraden. Wegen der Streckung gilt $|HS| : |SO| = 2:1$. Ferner geht der Umkreismittelpunkt des großen Dreieck O in den Umkreismittelpunkt N des kleinen Dreiecks $A'B'C'$, wobei gilt $|OS| = 2|SN|$. Damit halbiert N die Strecke $\overline{HO}$ und es gilt

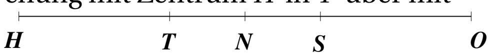


$$|HN| : |NS| : |SO| = 3:1:2. \tag{2}$$

Nach Strahlensatz folgt sofort $|NA_1| = \left|NA'\right|$ und analog für B und C. Somit fallen die Umkreise von $A'B'C'$ und $A_1B_1C_1$ zusammen.
Die obige Stauchung mit Faktor $-\frac{1}{2}$ und Zentrum S kann man nun auch als Hintereinanderausführung von

(a) einer Stauchung mit Zentrum H mit Faktor $\frac{1}{2}$ und einer
(b) einer Drehung um N um 180°

auffassen. In der Tat bleibt dabei der Schwerpunkt S invariant, denn wegen (2) geht er bei der Stauchung mit Zentrum H in T über mit



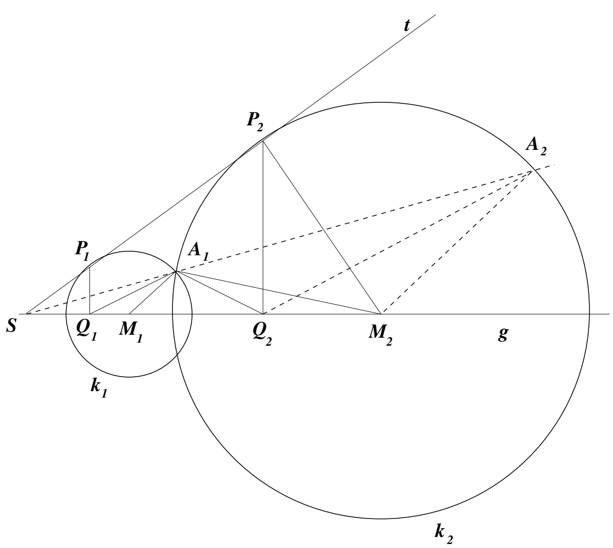
$$|HT|:|TN|:|NS| = 2:1:1.$$

Und bei der anschließenden Punktspiegelung an N geht T wieder in S über. Somit stimmt die Komposition tatsächlich mit der eingangs beschriebenen Stauchung mit Faktor $-\frac{1}{2}$ überein.
Verfolgt man den Punkt A bei der Komposition, so geht er zunächst in den Mittelpunkt A_1 des oberen Höhenabschnitts über und dann, bei der Punktspiegelung an N, in den Seitenmittelpunkt A'. Der Umkreis von ABC geht zunächst in den Umkreis von $A_1B_1C_1$ und dann in sich selbst – Drehung um den Mittelpunkt um 180°. Damit ist auch die zweite Behauptung über den Feuerbachschen Kreis gezeigt.
Bemerkenswert ist, dass der Feuerbachsche Kreis den Inkreis und die drei Ankreise des Dreiecks ABC berührt. Die Beweise findet man in der empfehlenswerten Broschüre von Emil Donath [Don69, S. 37 ff.].

Aufgabe 27 (MO 450833) Drei kongruente Kreise mit den Mittelpunkten M_1, M_2 und M_3 und dem Radius r verlaufen durch einen gemeinsamen Punkt D. Diese Kreise schneiden einander außerdem in weiteren Punkten, die mit A, B und C bezeichnet werden.

a) Beweise, dass man einen Punkt S konstruieren kann, der von den drei Punkten A, B und C den gleichen Abstand hat.
b) Vergleiche den Radius des Kreises um S durch A, B und C mit dem Radius r.

Aufgabe 28 (MO 460936) Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC. Der Höhenschnittpunkt sei H.
Beweisen Sie, dass es vier kongruente Kreise mit den Mittelpunkten A, B, C und H gibt, von denen sich je drei in einem Punkt schneiden.



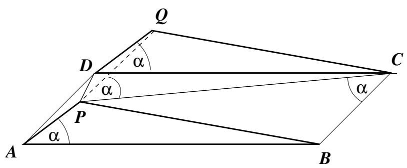
Aufgabe 29 (IMO 1983) Gegeben seien zwei sich im Punkt A_1 schneidende Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 bzw. M_2. Die Gerade g durch M_1 und M_2 schneide die gemeinsame Tangente t in S. Von den Berührungspunkten P_1 und P_2 der Tangente t an k_1 und k_2 werden die Lote auf g gefällt — die Fußpunkte seien Q_1 und Q_2.
Beweise, dass $\angle Q_1A_1M_1 = \angle Q_2A_1M_2$ gilt.

Lösung: Durch zentrische Streckung von k_1 mit Zentrum S gehe k_1 in k_2 über. Dabei gehen automatisch P_1, M_1, Q_1, A_1 in P_2, M_2, Q_2 bzw. A_2 über. Es genügt zu zeigen, dass $\angle Q_2A_1M_2 = \angle Q_2A_2M_2$ gilt. Dies ist aber äquivalent zu: $Q_2M_2A_2A_1$ ist ein Sehnenviereck. Dazu genügt es, die Umkehrung des Sekantensatzes zu verwenden und zu zeigen, dass

$$\overline{SQ_2} \cdot \overline{SM_2} = \overline{SA_1} \cdot \overline{SA_2} \tag{3}$$

gilt. Nach Kathetensatz im Dreieck SM_2P_2 ist aber $\overline{SQ_2} \cdot \overline{SM_2} = \overline{SP_2}^2$. Andererseits ist nach Sekanten-Tangentensatz im Kreis k_2, $\overline{SA_1} \cdot \overline{SA_2} = \overline{SP_2}^2$. Hieraus folgt, dass (3) gilt.

3 Beweise mit Verschiebungen



Aufgabe 30 Gegeben sei ein Parallelogramm $ABCD$ und im Innern ein Punkt P mit $\angle APB + \angle CPD = 180°$.
Beweise, dass $\angle PAB = \angle PCB$.

Beweis. Wir verschieben das Dreieck ABP parallel um $\overrightarrow{AD}$ und erhalten Q als Bildpunkt von P. Wegen $\angle DQC + \angle DPC = 180°$ ist $DPCQ$ ein Sehnenviereck. Folglich gilt nach Peripheriewinkelsatz

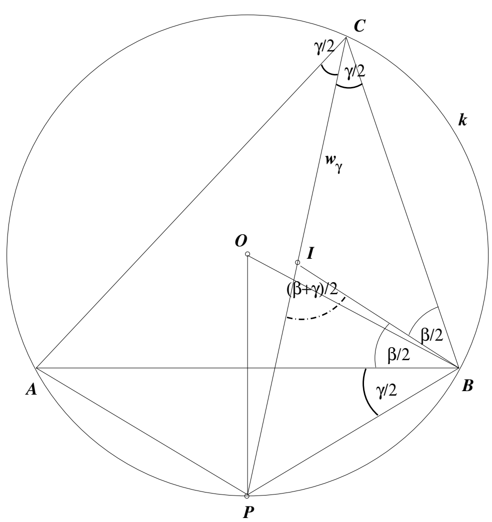
$$\angle PAB = \angle QDC = \angle QPC.$$

Schließlich ist nach Konstruktion $PQ \parallel BC$ und somit $\angle QPC = \angle BCP$ (Wechselwinkel). Hieraus folgt die Behauptung. ∎

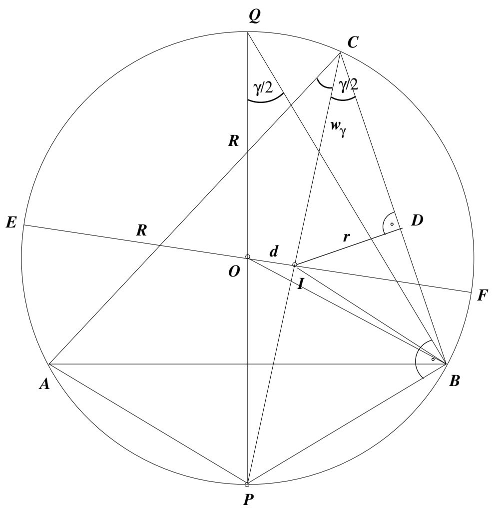
4 Die Winkelhalbierende

Der erste Satz spielt eine wichtige Rolle bei Beweisen und Konstruktionsaufgaben. Er benutzt nur den Peripheriewinkelsatz.

Satz 1 Es sei ABC ein Dreieck. Dann schneidet die Winkelhalbierende w_γ die Mittelsenkrechte m_c auf dem Umkreis des Dreiecks.
Ferner gilt, dass der Inkreismittelpunkt I des Dreiecks genausoweit von diesem Schnittpunkt entfernt ist wie A und B.



Beweis. Es sei P der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden w_γ mit dem Unkreis k. Der Mittelpunkt von k sei M. Da die zugehörigen Peripheriewinkel $\angle ACP = \angle BCP = \gamma/2$ gleich groß sind, sind die entsprechenden Kreisbögen gleich lang: $\overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{BP}$. Somit sind auch die zugehörigen Sehnen gleich lang, $\overline{AP} = \overline{BP}$. Folglich liegt P auf m_c. Da I auf allen drei Winkelhalbierenden liegt, gilt $\angle IBC = \angle IBA = \beta/2$. Nach Außenwinkelsatz im Dreieck IBC gilt somit $\angle PIB = (\beta+\gamma)/2$. Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt $\angle ABP = \gamma/2$ und somit $\angle PBI = \angle PIB = (\beta+\gamma)/2$. Folglich ist das Dreieck PBI gleichschenklig mit $\overline{PI} = \overline{PB}$. ∎



Folgerung 1 In jedem Dreieck gilt

$$d^2 = R^2 - 2Rr,$$

wobei R und r jeweils die Radien des Um- und Inkreises von ABC sind und $d = |OI|$ ist der Abstand der Mittelpunkte.

Wir skizzieren den Beweis aus [Don69, S. 40]. Es sei D der Lotfußpunkt von I auf BC, so dass $|ID| = r$ gilt und Q sei der von P verschiededene Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m_C mit dem Umkreis k. Dann gilt $\triangle IDC \sim \triangle PBQ$, da sie in den rechten Winkeln und dem Innenwinkel $\gamma/2$ übereinstimmen. Folglich gilt

$$r : |CI| = |DI| : |IC| = |BP| : |PQ| = |PB| : (2R).$$

Nach obigem Satz ist aber $|PB| = |PI|$, so dass

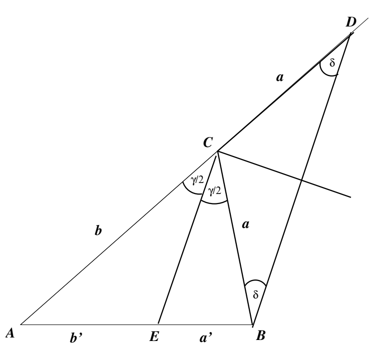
$$r : |CI| = |PI| : (2R) \Longrightarrow 2rR = |PI|\,|IC|.$$

Wendet man nun den Sehnensatz auf die Sehnen $\overline{PC}$ und $\overline{EF}$ an, so hat man

$$2rR = |PI|\,|IC| = |FI|\,|IE| = (R-d)(R+d) = R^2 - d^2,$$

was zu zeigen war.
Wegen $d^2 \geq 0$ erhält man hiermit $R^2 \geq 2rR$ bzw. $R \geq 2r$.

Satz 2 (Über die Winkelhalbierende) In einem Dreieck teilt die Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

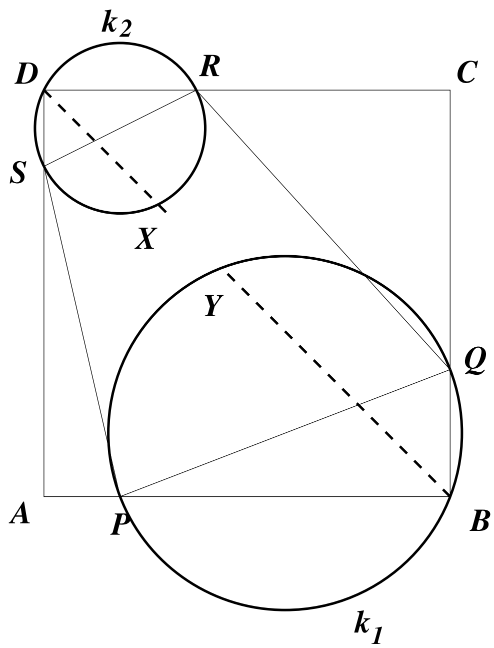


Beweis. Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden w_γ mit $\overline{AB}$ sei E und E teile $\overline{AB}$ in die beiden Teilstrecken $b' = \overline{AE}$ und $a' = \overline{EB}$. Behauptet wird $a' : b' = a : b$. Wir verlängern $\overline{AC}$ über C hinaus um a und erhalten dort den Punkt D. Nach konstruktion ist also das Dreieck BCE gleichschenklig mit den Basiswinkeln δ. Nach dem Außenwinkelsatz gilt dann $2\delta = \gamma$ bzw. $\delta = \gamma/2$. Da $\angle ECB = \delta = \gamma/2 = \angle CBD$ ist und dies Wechselwinkel an geschnittenen Geraden sind, sind diese Geraden parallel, also $CE \parallel DB$. Nach dem Strahlensatz gilt dann $a' : b' = a : b$. Man kann a' und b' sogar explizit ausrechnen und erhält

$$a' = \frac{ac}{a+b}, \quad \text{und} \quad b' = \frac{bc}{a+b}.$$

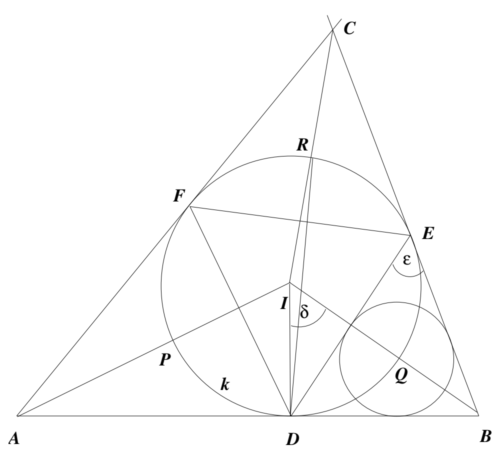
Analog zeigt man, dass die Winkelhalbierende des Außenwinkels die Gegenseite von außen im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt. ■

Aufgabe 31 Gegeben sei ein konvexes Viereck $PQRS$. Konstruiere ein Quadrat $ABCD$, so dass die Punkte P, Q, R und S jeweils auf den Geraden AB, BC, CD bzw. DA liegen.



Analyse. Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit den geforderten Eigenschaften. Wir zeichnen die Kreise k_1 und k_2 mit den Durchmessern $\overline{PQ}$ bzw. $\overline{RS}$. Nach der Umkehrung des Thalessatzes liegen dann B und D auf k_1 bzw. auf k_2. Nach dem obigen Satz verläuft die Winkelhalbierende von $\angle PBQ$ durch den Mittelpunkt Y des Bogens $\overset{\frown}{PQ}$. Entsprechend verläuft die Winkelhalbierende des Winkels $\angle SDR$ durch den Mittelpunkt X des Bogen $\overset{\frown}{SR}$. Da diese beiden Winkelhalbierenden mit der Diagonalen BD des Quadrates $ABCD$ übereinstimmen hat man somit zwei Punkte X und Y, die auf BD liegen.

Konstruktionsbeschreibung. Wir zeichnen die Kreise k_1 und k_2 mit den Durchmessern $\overline{PQ}$ bzw. $\overline{RS}$. Die Punkte X bzw. Y seien die Mittelpunkte der im Innern von $PQRS$ gelegenen Bögen $\overset{\frown}{RS}$ bzw. $\overset{\frown}{PQ}$. Man erhält B bzw. D als Schnittpunkte von XY mit k_1 bzw. k_2.
Diskussion. Die Konstruktion funktioniert nur für den Fall, dass die gegebenen Punkte *im Innern* der Seiten des Quadrats liegen. Fallen X und Y zusammen, so gibt es unendlich viele Lösungen. Das ist zum Beispiel der Fall, wenn $PQRS$ selbst ein Quadrat ist.
Die Aufgabe ist identisch mit Eckard Spechts [Spe01, A.65, S.107]. Die dort angegebene Lösung ist aber völlig verschieden von der hier beschriebenen. Es ist ein Beispiel angegeben, wo 6 Lösungen existieren.



Aufgabe 32 (Baltic Way 1994) Der Inkreis eines Dreiecks ABC berühre die Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ bzw. $\overline{CA}$ in den Punkten D, E bzw. F. Ferner seien P, Q und R die Inkreismittelpunkte der Dreiecke ADF, BED bzw. ECF.
Beweise, dass die Geraden PE, QF und RD sich in einem Punkt schneiden.

Beweis. Es sei I der Mittelpunkt des Inkreises k von Dreieck ABC, $\delta : \angle DIB$ und $\varepsilon := \angle DEB$. Da $DI \perp AB$, ist $\delta = 90° - \beta/2$. Da die Tangentenabschnitte $\overline{BD} = \overline{BE}$ gleich lang sind, ist $\triangle DBE$ gleichschenklig mit Basis $\overline{DE}$ folglich gilt nach dem Innenwinkelsatz $\varepsilon = 90° - \beta/2$; also $\delta = \varepsilon$. Somit ist $DBEI$ ein Sehnenviereck und damit liegt I auf dem Umkreis von Dreieck BDE. Nach Satz 1 ist also $\overline{ID} = \overline{IQ}$. Damit liegt Q auf dem Inkreis k.
Wegen $\overline{DQ} = \overline{QE}$ liegt Q außerdem auf der Mittelsenkrechten von $\overline{DE}$. Wendet man erneut den Satz 1 an, so folgt, dass QF die Winkelhalbierende von $\angle DFE$ ist. Somit schneiden sich QF, PE und DR im Inkreismittelpunkt von Dreieck DEF. ■

Aufgabe 33 (IMO 2006.1) Es sei ABC ein Dreieck mit Inkreismittelpunkt I. Ein innere Punkt P erfülle die Bedingung

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

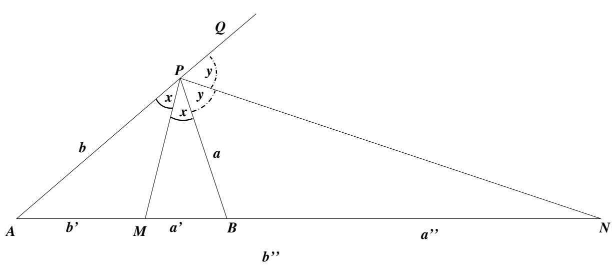
Man zeige, dass $|AP| \geq |AI|$ und Gleichheit gilt nur für $P = I$.

4.1 Apolloniuskreise

Der folgende Satz lässt sich mit Hilfe des obigen Satzes leicht zeigen.

Satz 3 (Apolloniuskreis) Gegeben seien zwei Punkte A und B sowie eine positive reelle Zahl $q \neq 1$. Der geometrische Ort aller Punkte P der Ebene, so dass das Abstandsverhältnis $\overline{PA} : \overline{PB} = q$ ist, ist der Kreis mit dem Durchmesser $\overline{MN}$, wobei die Punkte M und N die Strecke $\overline{AB}$ von innen bzw. außen im Verhältnis q teilen.

Der Kreis mit dem Durchmesser $\overline{MN}$ heißt *Apolloniuskreis* zu den Punkten A und B und zur Zahl q. Im Falle $q = 1$ entartet der Apolloniuskreis zur Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$.



Beweis. Wir benutzen die Umkehrung des obigen Satzes. Da M und N die Strecke $\overline{AB}$ von innen bzw. außen im Verhältnis $a : b$ teilen, liegen M bzw. N auf den Winkelhalbierenden von Innen- bzw. Außenwinkel bei P. Das heißt aber, dass $\angle APQ = 2x + 2y = 180°$ gilt bzw. $x + y = 90°$. Somit ist $\angle MPN = 90°$ und P liegt auf dem Thaleskreis über $\overline{MN}$ ■

Aufgabe 34 Es sei ABC ein Dreieck und q_1, q_2 und q_3 seien positive reelle Zahlen. Ferner seien k_1, k_2 und k_3 die Apolloniuskreise zu $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ bzw. zu $\overline{CA}$ und den reellen Zahlen q_1, q_2 bzw. q_3.
Man beweise, dass sich k_1, k_2 und k_3 genau dann in einem gemeinsamen Punkt P schneiden, wenn $q_1 q_2 q_3 = 1$.

Beweis. Wenn P auf den genannten Apolloniuskreisen liegt, so gilt

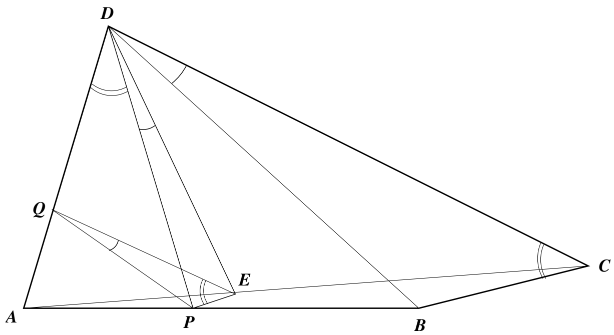
$$\frac{|PA|}{|PB|} = q_1, \quad \frac{|PB|}{|PC|} = q_2, \quad \frac{|PC|}{|PA|} = q_3.$$

Multipliziert man diese 3 Gleichungen, so hat man $q_1 q_2 q_3 = 1$. Die umgekehrte Richtung lässt sich durch indirekten Beweis zeigen. ■

Aufgabe 35 Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC.
Kostruieren Sie einen Punkt P im Innern von ABC, sodass gilt:

$$\overline{PA} : \overline{PB} : \overline{PC} = 1 : 2 : 3.$$

Lösung: Wir konstruieren zur Strecke $\overline{AB}$ den Apolloniuskreis zu $q_1 = \frac{1}{2}$ und zu $\overline{BC}$ den Apolloniuskreis zu $q_2 = \frac{2}{3}$. Der von B verschiedene Schnittpunkt ist der gesuchte Punkt P.



Aufgabe 36 (MO 451036) In einem konvexen Viereck $ABCD$ sei ein Punkt P auf der Seite $\overline{AB}$ derart gewählt, dass $|AP|:|PB| = |AD|:|DC|$ und zusätzlich $\angle ADP = \angle DCB$ gilt.
Beweisen Sie, dass dann $\angle ADC = 2\angle PDB$ git.

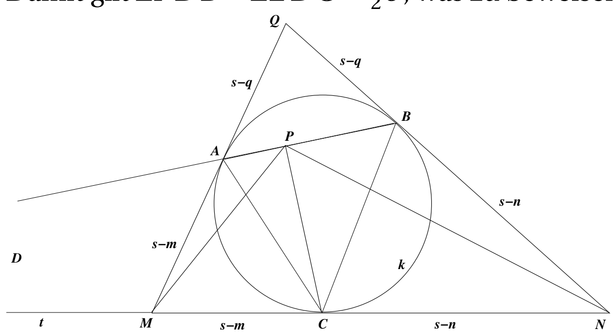
Lösung: Es sei ED die Winkelhalbierende von $\delta = \angle ADC$; wobei E auf der Diagonalen $\overline{AC}$ liege. Nach Satz 2 ist dann $|AD|:|DC| = |AE|:|EC|$. Nach Voraussetzung gilt also

$$|AE|:|EC| = |AP|:|PB|.$$

Nach Umkehrung des Strahlensatzes sind daher die Geraden PE und BC parallel. Die Stauchung mit Zentrum A und Faktor $q = |AP|:|AB|$ überführe das Dreieck BCD in PEQ. Insbesondere gilt $\angle QEP = \angle DCB$. Da nach der zweiten Voraussetzung darüber hinaus $\angle QDP = \angle DCB = \angle QEP$ gilt, folgt nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes, dass P, E,D und Q auf einem gemeinsamen Kreis liegen. Folglich gilt nach Peripheriewinkelsatz $\angle PQE = \angle PDE$ und weiter wegen der Stauchung

$$\angle PQE = \angle PDE = \angle BDC.$$

Damit gilt $\angle PDB = \angle EDC = \frac{1}{2}\delta$, was zu beweisen war.



Aufgabe 37 (MO 451136) Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit Umkreis k. Es sei t die Tangente an k in C. Die Tangenten an k in den Punkten A und B schneiden t in den Punkten M bzw N und der Fußpunkt des Lotes von C auf AB sei miit P bezeichnet.
Man beweise, dass die Gerade PC den Winkel $\angle NPM$ halbiert.

Beweis. Es sei D der Schnittpunkt von AB mit MN. Es sei Q der Schnittpunkt der Tangenten an k in A und B und m, n und q seien die Seitenlängen des Dreiecks MQN mit Inkreis k; wir setzen $s = (m+n+q)/2$. Dann gilt für die Tangentenabschnitte $|CN| = |BN| = s-n$, $|MC| = |MA| = s-m$ und $|QB| = |QA| = s-q$. Nach dem Satz von Menelaos angewandt auf die Gerade AB und das Dreieck MQN ist dann

$$1 = \frac{|ND|}{|DM|} \cdot \frac{|MA|}{|AQ|} \cdot \frac{|QB|}{|BN|} = \frac{|ND|}{|DM|} \cdot \frac{(s-m)(s-q)}{(s-q)(s-n)}.$$

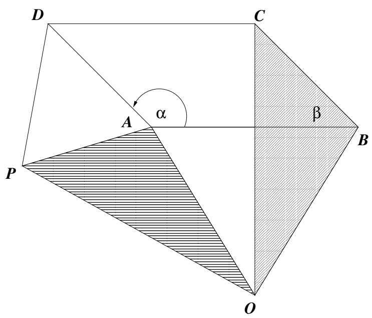
Folglich gilt

$$\frac{|ND|}{|DM|} = \frac{s-n}{s-m} = \frac{|NC|}{|CM|}.$$

Folglich liegen C, D und P auf dem Apolloniuskreis über $\overline{CD}$ bezüglich $\overline{MN}$. Nach Satz 3 bzw. seiner Umkehrung ist PC die Winkelhalbierende von $\angle MPN$. ∎

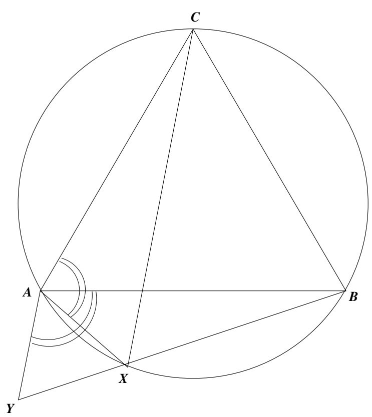
5 Beweise mit Hilfe von Drehungen

Aufgabe 38 Über den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{DA}$ eines Parallelogramms $ABCD$ werden nach außen gleichseitige Dreiecke ABQ bzw. ADP errichtet.
Beweise, dass das Dreieck PQC gleichseitig ist.



Beweis. Die Dreiecke PAQ und CQB sind kongruent nach SWS und gleich orientiert. Tatsächlich gilt $\overline{PA} = \overline{DA} = \overline{BC}$ und $\overline{QA} = \overline{QB}$ und $\angle PAQ = 360° - 120° - \alpha = 240° - \alpha$, wobei $\alpha = \angle BAD$ und $\beta = \angle ABC = 180° - \alpha$ ist. Außerdem gilt $\angle QBC = 60° + \beta = 60° + 180° - \alpha = 240° - \alpha$.
Wegen der gleichen Orientierung und des gemeinsamen Eckpunktes gibt es eine Drehung, die QPA in QCB überführt. Wegen $\angle AQB = 60°$ ist es eine $60°$-Drehung um Q. Somit ist Dreieck AQB gleichseitig. ■

5.1 Alternierende Streckensumme



Aufgabe 39 Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC.
Zeige, dass für alle Punkte X des Bogens $\overparen{AB}$ des Umkreises von Dreieck ABC gilt $\overline{AX} + \overline{BX} = \overline{CX}$.

Lösung: Verlängert man $\overline{BX}$ über X hinaus um die Länge $\overline{AX}$ so erhalte man dort den Punkt Y. Da im Sehnenviereck $AXBC$ sich die gegenüber liegenden Innenwinkel zu $180°$ ergänzen, ist $\angle BXA = 120°$ und damit $\angle YXA = 60°$. Nach Konstruktion ist damit das Dreieck AYX gleichseitig. Wir zeigen die Drehkongruenz der Dreiecke XAC und YAB. In der Tat gilt $\overline{XA} = \overline{YA}$ (gleichseitiges Dreieck) und ebenso $\overline{AC} = \overline{AB}$. Schließlich sind die von diesen Seitenpaaren eingeschlossenen Winkel gleich, $\angle XAC = \angle YAB$. Die Dreiecke sind demnach kongruent nach SWS und folglich $\overline{XC} = \overline{YB} = \overline{XA} + \overline{XB}$.

Aufgabe 40 Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit $|AC| = |BC|$ und mit Umkreis k.
Zeige, dass für alle Punkte X auf dem Bogen $\overparen{AB}$ von k gilt

$$\frac{|XC|}{|XA| + |XB|} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

Beweis. Die Grundidee ist die selbe, nur sind nun die Dreiecke YAB und XAC nur noch ähnlich nach SWS. ■

Die vorangegangene Aufgabe **??** hat eine erstaunliche Verallgemeinerung auf beliebige reguläre n-Ecke.

Aufgabe 41 Es sei n eine ungerade natürliche Zahl $n \geq 3$ und $P_1 P_2 \cdots P_n$ ein reguläres n-Eck, das einem Kreis k einbeschrieben ist. Ferner sei X ein Punkt auf seiner Peripherie zwischen P_1 und P_n.

Beweise, dass die alternierende Abstandsssumme

$$|XP_1| - |XP_2| + \cdots - |XP_{n-1}| + |XP_n| = 0$$

verschwindet.

Beweis. [PS96, p. 35] ■

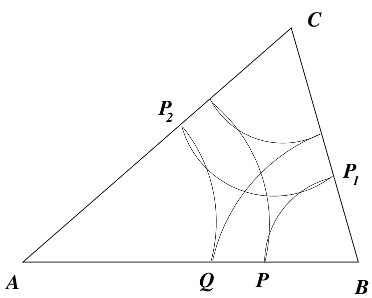
[PS96, p. 35]

Aufgabe 42 Es sei $ABCD$ ein Quadrat, das einem Kreis k einbeschrieben ist und P ein Punkt auf dem Bogen $\overset{\frown}{BC}$.
Beweise, dass

$$\frac{|PA| + |PC|}{|PB| + |PD|} = \frac{|PD|}{|PA|}.$$

Aufgabe 43 Es sei $ABCDEF$ ein reguläres Sechseck und P ein Punkt auf dem Bogen $\overset{\frown}{BC}$.
Beweise, dass gilt

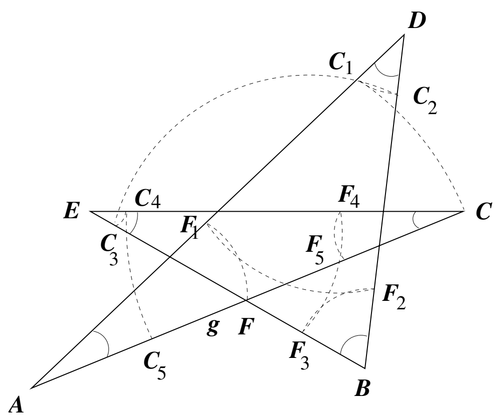
$$|PE| + |PF| = |PA| + |PB| + |PC| + |PD|.$$



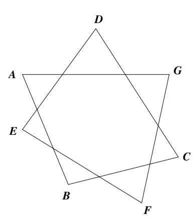
Aufgabe 44 Gegeben seien ein Dreieck ABC und ein Punkt P auf der Strecke $\overline{AB}$. Wir drehen nun P um B um β und erhalten $P_1 \in \overline{BC}$. Dann drehen wir P_1 um C um γ und erhalten $P_2 \in \overline{AC}$. Schließlich drehen wir P_2 um A um α und erhalten $Q \in \overline{AB}$. Mit Q verfahren wir nun genauso, wie mit P und erhalten nach den drei Drehungen einen Punkt $R \in \overline{AB}$. Beweise, dass $P = R$ gilt.

Lösung: Wir benutzen, dass die Komposition von zwei Drehungen in der Ebene um α bzw. β eine Drehung um $\alpha + \beta$ ist oder, falls $\alpha + \beta = 360°$, eine Verschiebung.
Da die Summe der Innenwinkel gleich 180° ist, erhalten wir als Hintereinanderausführung der ersten drei Bewegungen eine Punktspiegelung an $X \in \overline{AB}$, wobei X der Berührungspunkt des Inkreises an AB ist. Da Tangentenabschnitte gleich lang sind, bleibt dieser Punkt fest. Die Komposition zweier identischer Punktspiegelungen ist aber die Identität.

Aufgabe 45 Gegeben sei der nebenstehende Fünfeckstern. Ermittle die Summe seiner Innenwinkel.



Beweis. Wir zeigen, dass die Summe dieser Winkel gleich 180° ist. Dazu betrachten wir die Komposition der Drehungen (A,α), (D,δ), (B,β), (E,ε) und (C,γ), wobei α, β, γ, δ und ε die Innenwinkel des Sterns bei A, B, C, D und E seien. Verfolgt man die Bewegung der Geraden $g = AC$ bei diesen 5 Bewegungen, so erkennt man, dass sie in sich selbst übergeht. Dabei geht C nicht in sich über, sondern in C_5 und F geht in F_5 über, so dass die Gesamtbewegung eine Drehung um 180° oder eine Verschiebung in sich ist. Die Verschiebung kommt nicht in Frage, da $\vec{CC_5} \neq \vec{FF_5}$; Es handelt sich daher um eine Drehung um 180° um den Mittelpunkt von $\overline{CC_5}$. ∎

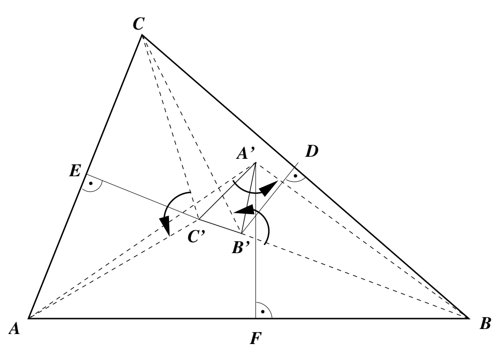


Aufgabe 46 Gegeben sei ein Siebeneck-Stern in der nebenstehenden Art. Beweise, dass die Summe seiner Innenwinkel gleich 540° ist.

Aufgabe 47 Gegeben sei ein Viereck $ABCD$ mit den Innenwinkeln α, β, γ und δ. Wie in der vorigen Aufgabe führen wir nacheinander Drehungen um B, C, D und A um die Winkel β, γ, δ bzw. α aus. Man beweise, dass die Hintereinanderausfäührung die Identität ist genau dann, wenn $ABCD$ ein Tangentenviereck ist.

Lösung: Da $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$, ist die Komposition eine Verschiebung. Da bei einem Tangentenviereck $ABCD$ der Berührungspunkt mit AB fest bleibt, ist die gesuchte Verschiebung in diesem Falle die Ruhe. Offen: Wenn $ABCD$ kein Tangentenviereck ist.

Aufgabe 48 (BWM 1993.2.3) Gegeben sei ein Dreieck ABC. Ferner sei A' der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden w_α mit der Mittelsenkrechten auf $\overline{AB}$, B' der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden w_β mit der Mittelsenkrechten von $\overline{BC}$ und C' der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden w_γ mit der Mittelsenkrechten von $\overline{AC}$.
Man beweise: 1. Das Dreieck ABC ist genau dann gleichseitig, wenn A' und B' zusammmen fallen.
2. Wenn die Punkte A', B' und C' verschieden sind, gilt $\angle B'A'C' = 90° - \frac{1}{2}\angle BAC$.



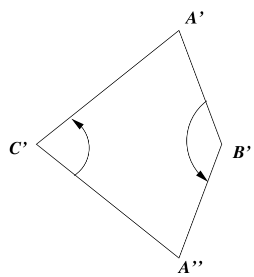
Beweis. Es mögen α, β und γ bzw. α', β' und γ' die Innenwinkel der Dreiecke ABC bzw. $A'B'C'$ sein. Teil 1. Wenn das Dreieck gleichseitig ist, so fallen offenbar Inkreis- und Umkreismittelpunkt überein. Damit fallen alle 3 Punkte zusammen $A' = B' = C'$. Ist umgekehrt $A' = B'$, so stimmen der Umkreismittelpunkt M und der Inkreismittelpunkt I überein. Dann ist aber Dreieck ABI gleichschenklig und somit $\alpha/ = \beta/2$. Analog folgt $\beta/2 = \gamma/$ und somit $\alpha = \beta = \gamma$ — das Dreieck ist gleichseitig.

Teil 2. Wir betrachten die drei Drehungen D_A, D_B und D_C um die Punkte A', B' bzw. C' um die Winkel $\alpha'' = \angle AA'B$, $\beta'' = \angle BB'C$ und $\gamma'' = \angle CC'A$. Nach Konstruktion ist AF die Symmetrieachse im gleichschenkligen Dreieck ABA' mit den Basiswinkeln $\alpha/2$. Somit gilt

$$\alpha'' = 180^\circ - \alpha, \quad \beta'' = 180^\circ - \beta, \quad \gamma'' = 180^\circ - \gamma.$$

Nach Satz **??** ist die Komposition $v := \mathrm{D}_C \circ \mathrm{D}_B \circ \mathrm{D}_A$ eine Drehung um den Gesamtwinkel

$$\alpha'' + \beta'' + \gamma'' = 3 \cdot 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) = 360^\circ.$$

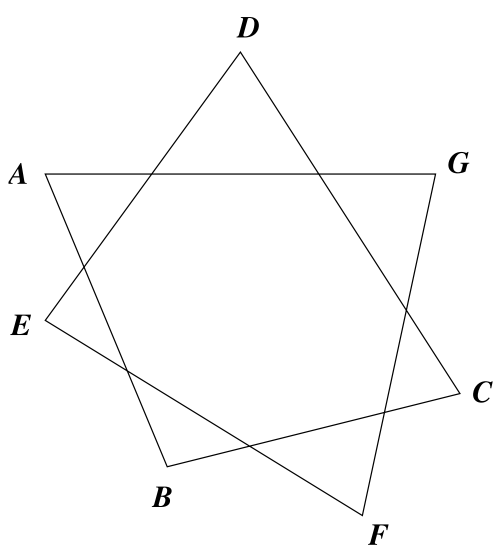


Das heißt, die Komposition ist eine Verschiebung v. Da nacheinander A in B in C in A über geht, ist A ein Fixpunkt der Verschiebung, das heißt, die Verschiebung ist die Ruheabbildung (v ist der Nullvektor). Wir verfolgen die Bahn des Punktes A' unter den drei Drehungen. Bei D_A ist A' Drehpunkt, bleibt also fest. Bild von A' unter D_B sei A'' und schließlich geht A'' bei D_C wieder in A' über, da die Gersamtabbildung die Ruhe war.

Folglich ist $A'B'A''C'$ ein Drachenviereck mit $\overline{B'A'} = \overline{B'A''}$ und $\overline{C'A''} = \overline{C'A'}$. Somit gilt mit dem Innenwinkelsatz

$$2\alpha' + \beta'' + \gamma'' = 360^\circ \Longrightarrow 2\alpha' + 360^\circ - \beta - \gamma = 360^\circ \Longrightarrow \alpha' = \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

∎

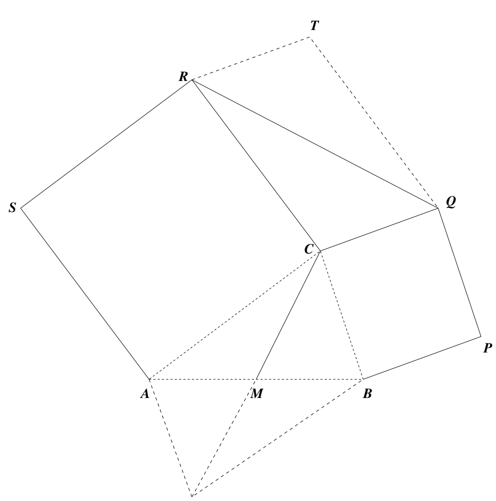


Aufgabe 49 Gegeben sei ein reguläres Siebeneck $ABCDEFG$ und X sei der Schnittpunkt derr Diagonalen AC und BD.
Beweise, dass gilt $\overline{AD} = \overline{AX} + \overline{AB}$.

Lösung: Durch Drehung des 7-Ecks um A um $\alpha = \pi/7$ erhält man das 7-Eck $AB'C'D'DF'G'$. Durch Winkelbetrachtungen zeigt man, dass $B' \in BD$ und $D' \in AC$ gilt. Da $XD'C'B'$ ein Parallelogramm ist, hat man

$$\overline{AD} = \overline{AD'} = \overline{AX} + \overline{XD'} = \overline{AX} + \overline{B'C'},$$

was zu zeigen war.

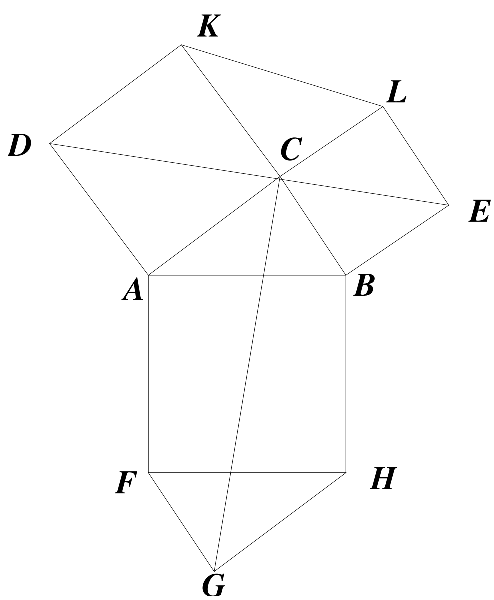


Aufgabe 50 Über den Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ eines spitzwinkligen Dreiecks ABC werden nach außen Quadrate $BPQC$ und $CRSA$ errichtet. Es sei M der Mittelpunkt von $\overline{AB}$.
a) Beweise, dass die Geraden MC und QR senkrecht aufeinander stehen.
b) Beweise, dass $\overline{QR}$ doppelt so lang ist wie $\overline{MC}$.

Beweis. Eine Drehung von ABC um M um 180° liefert das Pasrallelogramm $ADBC$. Analog liefert eine Drehung von CQR um den Mittelpunkt von $\overline{RQ}$ um 90° ein Parallelogramm $CQTR$. Diese Parallelogramme sind kongruent, da sie in den Paaren von Gegenseiten übereinstimmen und es gilt

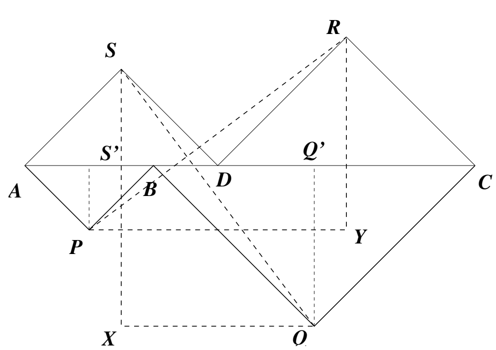
$$\angle QCR = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \angle ACB = 180^\circ - \angle ACB.$$

Dabei entspricht die Diagonale $\overline{DC}$ der Diagonalen $\overline{QR}$. Dreht man $ADBC$ um 90° um C im Uhrzeigersinn, so liegen die beiden Parallelogramme parallel. Dies beweist die Orthogonalität von MC und RQ. Da sich die Diagonalen im Parallelogramm halbieren, folgt auch die zweite Behauptung. ■



Aufgabe 51 Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC, über dessen Seiten nach außen die Quadrate $ABHF$, $BCLE$ und $ACKD$ errichtet wurden. Ferner sei Dreieck HFG zu ABC gleichgerichtet kongruent.
Man zeige, dass die Strecken $\overline{CG} = \overline{ED}$ gleich lang und orthogonal sind.

Beweis. Man zeigt, dass die Vierecke $CAGF$ und $BAED$ mach $SWSWS$ kongruent sind und gleichgerichtet. Damit gibt es eine Drehung um A, die das erste in das zweite Viereck überführt. Der Drehwinkel ist gleich $\angle CAD = 90°$. Folglich sind die einander entsprechenden Strecken $\overline{DE}$ und $\overline{CG}$ gleichlang und orthogonal. ■

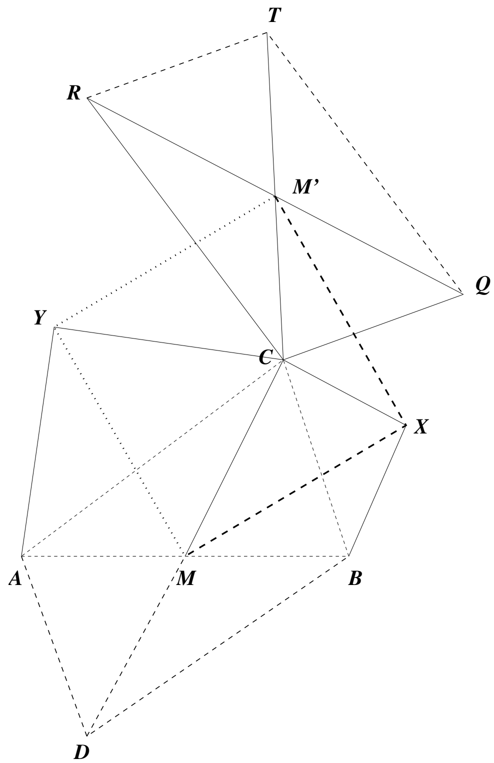


Aufgabe 52 Die Punkte A, B, D und C liegen in dieser Reihenfolge auf einer Geraden. Über den Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ werden nach unten gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke APB und BQC errichtet, wobei die rechten Winkel bei P bzw. Q liegen. Ferner werden nach oben über $\overline{AD}$ und $\overline{DC}$ rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke ASD und DRC mit rechten Winkeln bei R bzw. S.
Beweise, dass die Strecken $\overline{SQ}$ und $\overline{PR}$ gleich lang sind und aufeinander senkrecht stehen.

Beweis. Wir bezeichnen die Längen der folgenden Strecken $2x := \overline{AB}$, $\overline{AC} = 2$ und $2y := \overline{AD}$. Ferner seien S' und Q' die Lotfußpunkte von S und Q auf die Geradse AD. Dann heben wir

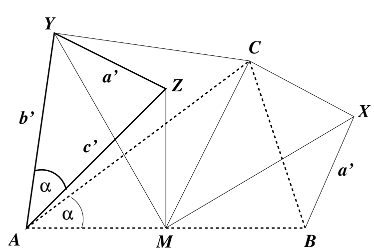
$$\overline{XQ} = \overline{AC} - \overline{AS'} - \overline{Q'A} = 2 - y - (1-x) = 1 + x - y, \quad \overline{XS} = \overline{XS'} + \overline{S'S} = \overline{QQ'} = (1-x) + y = 1 - x + y.$$

Analog erhält man $\overline{PY} = 1 - x + y$ und $\overline{YR} = 1 - y + x$. Somit sind die Dreiecke SQX und PYR kongruent nach SWS. Da die einander entsprechenden Seiten $\overline{XQ}$ und $\overline{RY}$ bzw. $\overline{SX}$ und $\overline{PY}$ senkrecht aufeinander stehen, muss auch das dritte Paar einander entsprechender Seiten zueinander orthogonal und gleich lang sein: $\overline{SQ} \perp \overline{PR}$. Die beiden Dreiecke gehen durch eine 90°-Drehung ineinander über. ■



Aufgabe 53 (BWM 1998.1.3) Über den Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$ eines spitzwinkligen Dreiecks ABC werden nach außen gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke BXC und CYA errichtet. Es sei M der Mittelpunkt von $\overline{AB}$.
Beweise, dass das Dreieck XMY gleichschenklig-rechtwinklig ist.

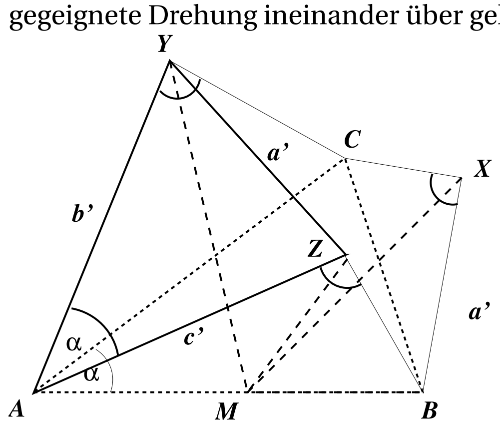
Beweis. 1. Lösung. In Aufgabe 50 wurde gezeigt, dass die Parallelogramme $DBCA$ und $RCQT$ kongruent und gleich orientiert sind. Nach Satz**??** gibt es eine Drehung oder Verschiebung, welche das das erste in das zweite Parallelogramm überführt. Der Schnittpunkt X der Mittelsenkrechten einander entsprechender Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CQ}$ ist das Drehzentrum. Offensichtlich geht das Parallelogramm $DBCA$ durch Drehung um 90° im Uhrzeigersinn um X in das Parallelogramm $RCQT$ über.
Insbesondere ist Dreieck MXM' gleichschenklig-rechtwinklig. Aus Symmetriegründen gilt das auch für das Dreieck MYM'. Somit ist das Viereck $MXM'Y$ ein Quadrat, und die Behauptung ist damit bewieden. ■



2. Lösung In M errichten wir auf AB die Mittelsenkrechte. Auf ihr liege Z so, dass das Dreieck AMZ gleichschenklig-rechtwinklig ist.
Wir zeigen, dass das Dreieck AZY zum Dreieck ABC ähnlich ist mit dem Faktor $q = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. zunächst gilt $\angle YAZ = \alpha = \angle CAB$, da $\angle YAC = \angle ZAM = 45°$. Ferner ist $\overline{YA} = qb$ und $\overline{AZ} = qc$. Nach Ähnlichkeitssatz SWS sind die beiden Dreiecke ähnlich und es gilt $\overline{YZ} = qa$ und $\angle YZB = \beta$.

Dann sind aber die Dreiecke YZM und XBM kongruent nach SWS ($\angle YZM = \angle XBM = 45° + \beta$). Da sie gleich-orientiert sind, gibt es eine Drehung um M um 90°, welche YZM in XMB überführt. Insbesondere ist das Dreieck YMX gleichschenklig-rechtwinklig.

In Folge stellen wir nun drei Aufgaben, die alle auf der selben Idee beruhen: Zunächst konstruiert man ein zum Ausgangsdreieck ähnliches Dreieck und dann daraus zwei kongruente, die durch eine gegeignete Drehung ineinander über gehen.



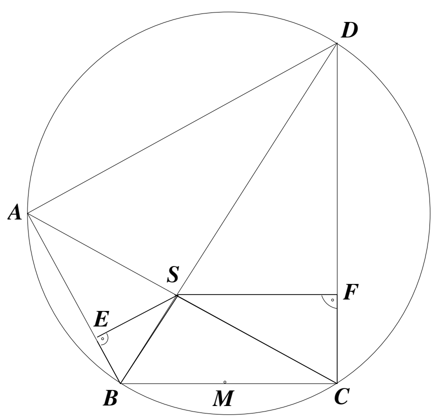
Aufgabe 54 Über den Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$ eines spitzwinkligen Dreiecks ABC werden nach außen ähnliche rechtwinklige Dreiecke BXC und AYC errichtet mit rechten Winkeln bei X und Y und entgegengesetzter Orientierung. Es sei M der Mittelpunkt von $\overline{AB}$.
Beweise, dass das Dreieck XMY gleichschenklig ist.

Beweis. Über der Strecke $\overline{AB}$ errichten wir ein rechtwinkliges Dreieck ABZ, das ähnlich und gleichorientiert ist zu Dreieck ACY mit rechtem Winkel bei Z. Dann gilt $b' : c' = b : c$. Ferner gilt wie oben $\angle YAZ = \alpha = \angle CAB$, Nach Ähnlichkeitssatz SWS sind die beiden Dreiecke ähnlich und es gilt $\overline{YZ} = a'$ mit $a' : b' = a : b$ und $\angle YZB = \beta$. Da das Dreieck AMZ gleichschenklig ist, gilt

$$\delta := \angle MAZ = \angle MZA = \angle XBC.$$

und somit $\angle YZM = \delta + \beta = \angle XBM$. Damit sind die Dreiecke YMX und XMB nach SWS kongruent und insbesondere gilt $\overline{YM} = \overline{XM}$. ∎

Eine unmittelbare Folgerung aus dieser Aufgabe ist hier.

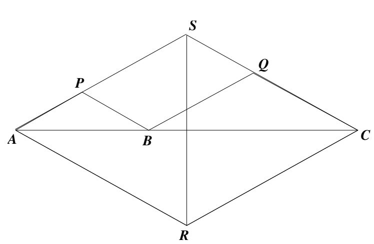


Aufgabe 55 (BWM 2003.2.3) Gegeben sei ein konvexes Sehnenviereck $ABCD$ mit Diagonalenschnittpunkt S; die Fußpunkte der Lote von S auf AB und auf CD seien E bzw. F.
Beweise: Die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{EF}$ halbiert die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$.

Beweis. Es sei M der Mittelpunkt von $\overline{BC}$. Nach dem Peripheriewinkelsatz sind die Dreiecke SEB und SFC einander ähnlich nach WWW. Nach Aufgabe 54 liegt M auf der Mittelsnkrechten von $\overline{EF}$. Analog gilt dies für den Mittelpunkt von $\overline{AD}$. ∎

Aufgabe 56 (BWM 1999.1.3) Gegeben sei eine Strecke $\overline{AC}$ mit einem inneren Punkt B. Über den Basen $\overline{AC}$ und $\overline{CA}$ werden auf der selben Seite von AC gleichschenklige Dreiecke ABP und BCQ mit den Basiswinkeln von 30° errichtet. Ferner wird über $\overline{AC}$ ein weiteres zu den ersten beiden Dreiecken ähnliches Dreieck ACR errichtet, so dass P und R in verschiedenen Halbebenen von AC liegen.
Beweise, dass das Dreieck PQR gleichseitig ist.

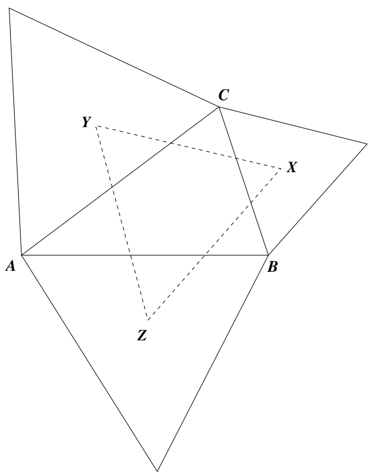
Beweis.



Es sei S der Spiegelungspunkt von R an AC. Dann sind ARS und RCS beide gleichseitig. Nach Konstruktion ist $PBQS$ ein Parallelogramm und somit $\overline{AP} = \overline{PB} = \overline{SQ}$. Damit sind die Dreiecke ARP und SRQ konguent nach SWS, denn sie stimmen außerdem noch überein in

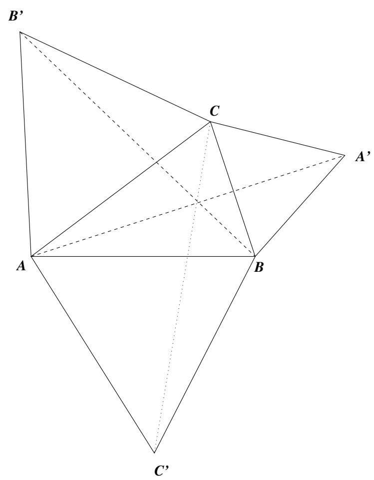
$$\overline{AR} = \overline{SR}, \quad \angle PAR = 60^\circ = \angle QSR.$$

Da die beiden Dreiecke gleich orientiert sind und einen gemeinsamen Punkt R haben, gibt es eine Drehung um R, die ARP in SRQ überführt. ∎



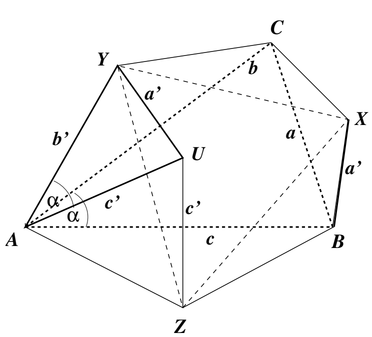
Die folgende Aufgabe ist als „Satz von Napoleon“ bekannt. Wir werden später noch einen anderen Beweis angeben.

Aufgabe 57 Über den Seiten eines Dreiecks ABC werden nach außen gleichseitige Dreiecke errichtet.
Beweise, dass die Mittelpunkte dieser drei gleichseitigen Dreiecke ein gleichseitiges Dreieck bilden.

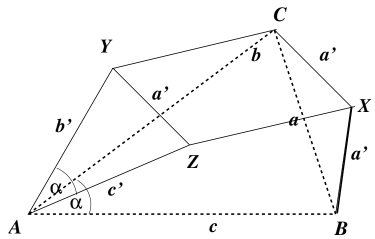


Aufgabe 58 (MO 460834) Über den Seiten eines Dreiecks ABC werden nach außen gkleichseitige Dreiecke ABC', BCA' und ACB' wie in der Zeichnung errichtet.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Strecken $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ und $\overline{CC'}$ gleich lang sind.

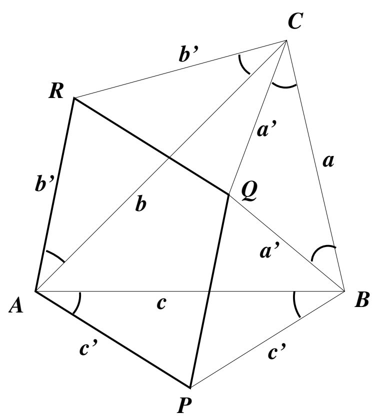
Beweis. Die Dreiecke ACA' und $B'CB$ sind kongruent nach SWS, denn $|AC| = \left|B'C\right| = b$, $\left|A'C\right| = \overline{BC} = a$ und $\angle B'CB = \angle ACA' = 60° + \gamma$. Somit sind auch die dritten Seitenpaare gleich lang, $\left|B'B\right| = \left|A'A\right|$. Analog folgt $\left|B'B\right| = \left|C'C\right|$. Außerdem zeigt der Beweis, dass die beiden kongruenten Dreiecke durch eine 60°-Drehung um C ineinander über gehen. Daher schneiden sich AA' und CC' ebenfalls im Winkel von 60°. ■



Beweis. Es seien X, Y und Z die Mittelpunkte der nach außen aufgesetzten gleichseitigen Dreiecke. Der an AB gespiegelte Punkt Z sei U, so dass AZU ein gleichseitiges Dreieck ist. Wegen $\angle BAU = \angle CAY = 30°$ giilt $\angle UAY = \angle BAC = \alpha$. Ferner gilt $\overline{AU} = c' = c/\sqrt{3}$ und $\overline{AY} = b' = b/\sqrt{3}$. Folglich sind die Dreiecke ABC und AUB nach SWS einander ähnlich mit Ähnlichkeitsfaktor $1/\sqrt{3}$. Insbesondere gilt $\angle YUZ = \beta + 60°$ und $\overline{YU} = a' = a/\sqrt{3}$. Wegen $\overline{UZ} = \overline{BZ} = c/\sqrt{3}$ sind die Dreiecke ZYU und ZXB kongruent nach SWS. Da sie gleich orientiert sind und einen Punkt gemeinsam haben gibt es nach Satz **??** eine Drehung um Z , die ZYU in ZXB überführt. Wegen $\angle UZB = 60°$ ist dies eine 60°-Drehung. Folglich ist XYZ gleichseitig. ■



Aufgabe 59 Über den Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$ eines Dreiecks ABC werden nach außen gleichseitige Dreiecke errichtet, deren Mittelpunkte X bzw. Y seien. Über der Seite $\overline{AB}$ werde nach innen ein gleichseitiges Dreieck mit Mittelpunkt Z errichtet.
Beweise, dass $XCYZ$ ein Parallelogramm ist.



Aufgabe 60 (Sächs. Landessem. 2005, Klasse 9/10) Über den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ eines spitzwinkligen Dreiecks ABC werden nach außen ähnliche gleichschenklige Dreiecke ABP und ACR errichtet. Über $\overline{BC}$ wird *nach innen* ein zu den anderen Dreiecken ähnliches gleichschenkliges Dreieck BCQ errichtet.
Man beweise, dass $APQR$ ein Parallelogramm ist.

Beweis. Die Dreiecke RCQ und PQB sind beide nach SWS ähnlich zum Dreieck ACB. Somit gilt $|RQ| = c'$ und $|PQ| = b'$. Also sind im Viereck $APQR$ die gegenüberliegenden Seiten jeweils gleich lang. ∎

5.2 Komplexe Zahlen und Geometrie

Es ist oft sehr fruchtbar, bei Aufgaben mit Drehungen oder mit Ähnlichkeitsabbildungen die komplexen Zahlen zu verwenden. Hierbei können die folgenden beiden Hilfssätze wichtig sein.
Dabei identifizieren wir die Punkte der Ebene mit komplexen Zahlen. Die Wahl des Ursprunges ist hierbei beliebig.

Lemma 1 Es seien $\omega = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/3} = \cos 120° + \mathrm{i} \sin 120°$ und $\varepsilon = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}/3} = \cos 60° + \mathrm{i}\sin 60°$.
(a) Genau dann ist PQR ein positiv orientiertes gleichseitiges Dreieck in der komplexen Ebene, wenn $P + \omega Q + \omega^2 R = 0$ gilt.
(b) Genau dann bilden XYZ ein gleichschenkliges Dreieck mit Basis $\overline{XY}$ und Winkel an der Spitze $\sphericalangle YZX = 120°$, wenn

$$\omega X - Y + (1-\omega)Z = 0 \quad \text{bzw.} \quad (\omega - 1)X + (\omega^2 - 1)Y + 3Z = 0.$$

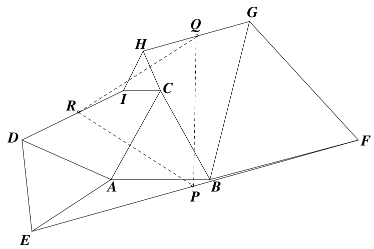
(c) Genau dann ist ABC ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit Basis $\overline{AB}$, wenn

$$(1-\mathrm{i})A + (1+\mathrm{i})B = 2C.$$

Beweis. (a) Zunächst ist $\varepsilon - 1 = \varepsilon^2 = \omega$ und $-\varepsilon = \omega^2$. Formuliert man nun die Tatsache, dass das Bild von Q bei der Drehung um 60° um P (mathematisch positiv) den Punkt R liefert, so ist das eine Multiplikation von $Q - P$ mit ε und wir haben:

$$(Q-P)\varepsilon = R - P \Longrightarrow 0 = R + (1-\varepsilon)P - \varepsilon Q = R + \omega P + \omega^2 Q.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit ω^2, so hat man (a).
(b) XYZ ist das beschriebene Dreieck genau dann, wenn $(X - Z)\omega = Y - Z$ gilt bzw. $\omega X - Y + (1 - \omega)Z = 0$. Multipliziert man diese Gleichung mit $1 - \omega^2$ und beachtet $\omega^3 = 1$, $(1-\omega)(1-\omega^2) = 3$, so ergibt sich die zweite Form von (b).
(c) Folgt aus $\mathrm{i}(A - C) = B - C$. ∎



Aufgabe 61 (IMO Übungsaufgaben, Heft 8, A1) Es seien ABC, ADE, BFG und CHI positiv orientierte gleichseitige Dreiecke in der Ebene.
Man beweise, dass die Mittelpunkte P, Q und R der Strecken $\overline{EF}$, $\overline{GH}$ bzw. $\overline{ID}$ ein gleichseitiges Dreieck bilden.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} A+\omega B+\omega^2 C=0, &\quad A+\omega D+\omega^2 E=0,\\ B+\omega F+\omega^2 G=0. &\quad C+\omega H+\omega^2 I=0. \end{aligned}$$

Nach Lemma 1 müssen wir zeigen, dass

$$\frac{D+I}{2}+\omega\frac{E+F}{2}+\omega^2\frac{G+H}{2}=0.$$

Multipliziert man die zweite Gleichung mit ω^2 und die vierte Gleichung mit ω und addiert beide, so hat man

$$I+D+\omega C+\omega E+\omega^2 H+\omega^2 A=0,$$

die zweite und dritte Gleichung bzw. die dritte und vierte liefern analog

$$\omega(E+F)+\omega^2(A+G)+B+D=0, \quad \text{und} \quad \omega^2(G+H)+\omega(F+C)+I+B=0.$$

Addiert man diese 3 Gleichungen, so hat man

$$\begin{aligned} (D+I)+\omega(E+F)+\omega^2(G+H)+(B+\omega F+\omega^2 G)+(D+\omega E+\omega^2 A)+&\\ +(I+\omega C+\omega^2 H)+(\omega^2 A+B+\omega C)=0.& \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung sind die letzten vier Summanden auf der linken Seite dieser Gleichung gleich Null. Hieraus folgt die Behauptung. ■

Beweis. (von Aufgabe 57) Nach Lemma 1 (b) gilt

$$\begin{aligned} (\omega-1)B+(\omega^2-1)A+3Z=0,\\ (\omega-1)C+(\omega^2-1)B+3X=0,\\ (\omega-1)A+(\omega^2-1)C+3Y=0. \end{aligned}$$

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit 1, die zweite mit ω und die drittre mit ω^2 und addiert alle diese Gleichungen, so hat man

$$0=3Z+3\omega X+3\omega^2 Z+(\omega-1)B+(\omega^2-1)A+(\omega^2-\omega)C+((1-\omega)B+(1-\omega^2)A+(\omega-\omega^2)C,$$

also $0=Z+\omega X+\omega^2 Y$ und die drei Punkte X, Y und Z bilden ein gleichseitiges Dreieck. ■

Aufgabe 62 In der Ebene seine zwei gleichorientierte, ähnliche Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gegeben. Es sei $q\in\mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Die Strecken $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ und $\overline{CC'}$ seien durch die Punkte A'', B'' bzw. C'' im Verhältnis q geteilt, so dass also $\left|AA''\right|:\left|AA'\right|=q$.
Man zeige, dass das Dreieck $A''B''C''$ zu ABC ähnlich ist.

Beweis. Wir identifizieren die sechs gegebenen Punkte mit komplexen Zahlen. Wegen der Ähnlichkeit gibt es eine komplexe Zahl z mit

$$z(B-A)=C-A \quad \text{und} \quad z(B'-A')=C'-A'.$$

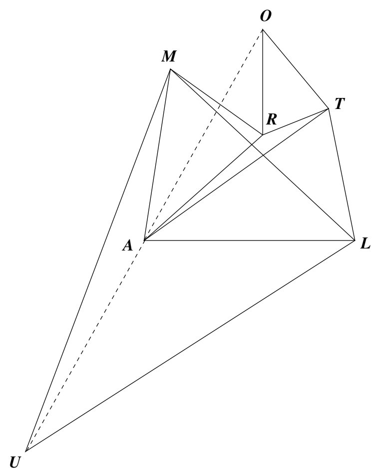
Ferner gilt

$$A''=(1-q)A+qA', \quad B''=(1-q)B+qB', \quad C''=(1-q)C+qC'.$$

Hieraus folgt

$$z(B''-A'')=C''-A''$$

und das Dreieck $A''B''C''$ ist ähnlich zu Dreieck ABC. ∎



Aufgabe 63 (MO 461143) Wir nennen zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gleichorientiert ähnlich, wenn die Eckpunkte A, B, C und A', B', C' den gleichen Umlaufsinn haben und wenn die entsprechenden Innenwinkel übereinstimmen: $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle BCA = \angle B'C'A'$. Man beweise die folgende Aussage: Sind ALT, ARM, ORT und ULM vier gleichorientiert ähnliche Dreiecke, so ist A der Mittelpunkt von $\overline{OU}$.

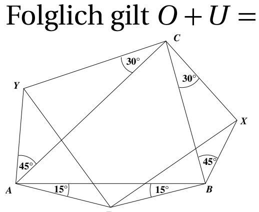
Lösung: Wir betrachten die Punkte A, L, T, R, M, U, O als komplexe Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene. O. B. d. A. sei $A=0$ der Ursprung. Wegen der Ähnlichkeit $ARM \sim ALT$ gibt es eine komplexe Zahl η mit $M=\eta R$ und $T=\eta L$. Dabei ist η nicht reell, da ARM ein nichtausgeartetes Dreieck ist, insbesondere ist $\eta \neq 0,1$. Aus der Ähnlichkeit $ARM \sim ULM$ folgt $M-U=\eta(L-U)$; umgestellt nach U liefert das mit $M=\eta R$

$$U(\eta-1)=\eta L-M=\eta(L-R) \quad \Longrightarrow \quad U=\frac{\eta}{\eta-1}(L-R).$$

Analog folgt aus der Ähnlichleit $ARM \sim ORT$, dass $T-O=\eta(R-O)$ bzw.

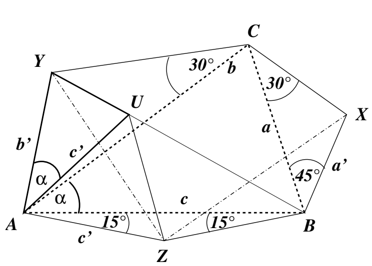
$$O(1-\eta)=T-\eta R=\eta(L-R) \quad \Longrightarrow \quad O=\frac{\eta}{1-\eta}(L-R).$$

Folglich gilt $O+U=0=2A$. Demnach ist A der Mittelpunkt von $\overline{OU}$.



Aufgabe 64 Über den Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks ABC werden nach außen Dreiecke BCX, CAY und ABZ errichtet und zwar so, dass $\angle ZAB = \angle ZBA = 15°$, $\angle YAC = \angle XBC = 45°$ und $\angle YCA = \angle XCB = 30°$.
Beweise, dass das Dreieck XYZ rechtwinklig-gleichschenklig ist.

Beweis.



Es sei U der Punkt der oberen Halbebene zu AB, so das AZU ein gleichseitiges Dreieck ist. Dann gilt wegen $\overline{ZA} = \overline{ZB} = \overline{ZU}$

$$\angle UZB = \angle AZB - 60° = 180° - 15° - 15° - 60° = 90°. \qquad (4)$$

$$\angle ZUB = 45°$$

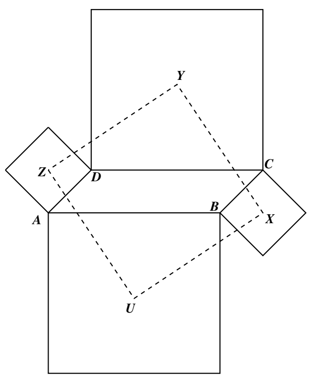
$$\angle UAB = \angle UAZ - \angle BAZ = 60° - 15° = 45° \qquad (5)$$

$$\angle AUB = \angle AUZ + \angle ZUB = 60° + 45° = 105° \Longrightarrow$$
$$\angle ABU = 180° - 105° - 45° = 30° \qquad (6)$$

Somit ist Dreieck UAB ähnlich zu Dreieck YAC und Dreieck XBC nach WWW. Folglich gilt $\overline{AU} = c'$ und $a' : b' : c' = a : b : c$, wobei $a' = \overline{BX}$ und $b' = \overline{AY}$. Demnach ist Dreieck AUY ähnlich zu Dreieck ABC nach Ähnlichkeitssatz SWS, denn es ist $\angle YAC = \angle UAB = 45°$. Zieht man den gemeinsamen Winkel $\angle UAC$ ab, so hat man $\angle YAU = \alpha$. Insbesondere gilt $\overline{YU} = a' = \overline{XB}$. Schließlich gilt

$$\angle YUZ = \beta + 60° = \beta + 15° + 45° = \angle XBZ.$$

Also sind die Dreiecke YUZ und XBZ kongruent und gleich orientiert. Somit gibt es eine Drehung um Z, die die beiden Dreiecke ineinander überführt. Wegen (4) ist der Drehwinkel gleich 90°. Somit ist YZX gleichschenklig-rechtwinklig mit $\overline{YZ} = \overline{ZX}$ und $\angle YZX = 90°$. ■



Aufgabe 65 Über den Seiten eines Parallelogramms $ABCD$ seien nach außen Quadrate errichtet.
Beweise, dass die Mittelpunkte dieser Quadrate ein Quadrat bilden.

Beweis. Nach Aufgabe 53 sind X bzw. Y die Mittelpunkte der über den Seiten des Dreiecks errichteten Quadrate und XMY ist gleichschenklig-rechtwinklig. Bei Drehung um M um 180° geht dann XMY in ZMU über, was demnach ein Quadrat ist. ■

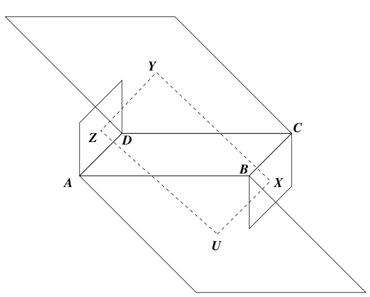
Beweis. Wir geben einen zweiten Beweis von Aufgabe 65 unter Verwendung der komplexen Zahlen und Lemma 1 (c). Nach Voraussetzung gilt $D - C = A - B$ ($ABCD$ ist ein Parallelogramm) und

$$\begin{aligned} 2U &= B(1-\mathrm{i}) + A(1+\mathrm{i}), \\ 2X &= C(1-\mathrm{i}) + B(1+\mathrm{i}), \\ 2Z &= A(1-\mathrm{i}) + D(1+\mathrm{i}). \end{aligned}$$

Folglich gilt

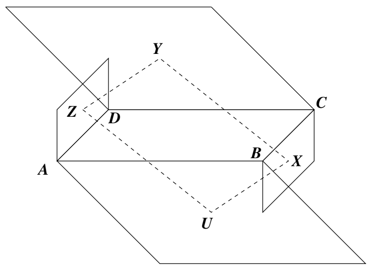
$$2(1-\mathrm{i})X + 2(1+\mathrm{i})Z = -2\mathrm{i}C + 2B + 2A + 2\mathrm{i}D = 2(1-\mathrm{i})A + 2(1+\mathrm{i})B = 4U,$$

was zu zeigen war. ■



Aufgabe 66 Über den Seiten eines Parallelogramms $ABCD$ seien nach außen einander ähnliche Rhomben errichtet, die aber abwechselnd verschieden orientiert sind.
Beweise, dass die Mittelpunkte der Rhomben ein Rechteck bilden.

Beweis. Da die Diagonalen im Rhombus senkrecht aufeinander stehen, sind die Dreiecke BXC und DYC rechtwinklig und einander ähnlich. Nach Aufgabe 54 gilt für den Mittelpunkt M von Strecke $\overline{DB}$, dass $\overline{MX} = \overline{MY}$. Durch Drehung der gesamten Figur um M um 180° erhält man dadurch ein Parallelogramm $ABCD$ mit $\overline{MX} = \overline{MY} = \overline{MZ} = \overline{MU}$. Da bei der Drehung um 180° um M die Punkte X in Z und Y in U über gehen, ist $UXYZ$ ein Viereck mit sich halbierenden gleich lange Diagonalen, also ein Rechteck. ■



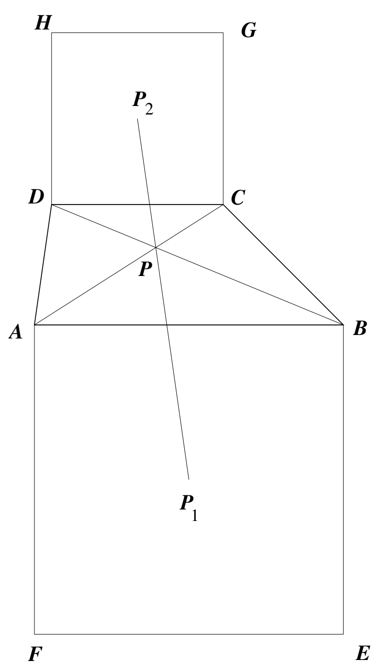
Aufgabe 67 Über den Seiten eines Parallelogramms werden nach außen zueinander ähnliche aber entgegengesetzt-orientierte Parallelogramme errichtet.
Beweise, dass die Mittelpunkte dieser Parallelogramme wieder ein Pasrallelogramm bilden.

Beweis. Der Beweis folgt eifach aus der Drehsymmetrie der Figur be Drehung um M um 180°. Dabei ist M der Schnittpunkt der Diagonalen von $ABCD$. ∎

6 Beweise mit Drehstreckungen

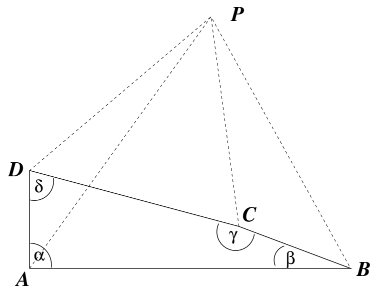
Aufgabe 68 (MO 451323) Zwei Rechtecke verschiedener Größe haben das gleiche Seitenverhältnis. Sie liegen so übereinander, dass auf dem Inneren jeder Seite des größeren Rechtecks ein Eckpunkt des kleineren Rechtecks liegt.
Für welche Seitenverhältnisse ist dies möglich?

Lösung: Das kleinere Rechteck $A'B'C'D'$ geht durch Drehung um einen Winkel φ um den gemeinsamen Mittelpunkt der beiden Rechtecke M und durch Stauchung von $ABCD$ mit Zentrum M und Faktor q aus dem großen Rechteck hervor. Dann sind die Dreiecke $AA'M$ und $DD'M$ kongruent nach SWS (die Diagonalen im Rechteck halbieren einander und sind gleichlang). Außerdem ist aber Dreieck $AA'D'$ ähnlich zu Dreieck $DD'C'$ nach WWW. Folglich sind die Dreiecke sogar kongruent und $\overline{C'D'} = \overline{D'A'}$. Die Rechecke sind also Quadrate.

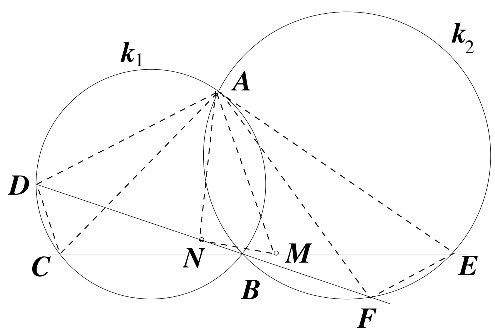


Aufgabe 69 (Bay Area Mathematical Olympiad 1999)
Über den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ eines Trapezes $ABCD$ werden nach außen Quadrate errichtet. Es sei P der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ des Trapezes und P_1 und P_2 seien die Mittelpunkte der beiden Quadrate über $\overline{AB}$ bzw. über $\overline{CD}$.
Beweise, dass die drei Punkte P, P_1 und P_2 auf einer Geraden liegen.

Beweis. Wir zeigen, dass das Quadrat $ABEF$ bei einer Drehstreckung um P um 180° mit dem Faktor $q = \overline{PC} : \overline{PA}$ in das Quadrat $CDHG$ über geht. In der Tat geht A in C über, nach Definition der Abbildung. nach Strahlensatz ist aber auch $\overline{PB} : \overline{PD} = q$ und somit geht P in D über. Folglich geht das gesamte Quadrat $ABEF$, das durch die Strecke $\overline{AB}$ eindeutig bestimmt ist, in das gesamte Quadrat $CDHG$ über. Insbesondere wird der Mittelpunkt P_1 des ersten Quadrats auf den Mittelpunkt P_2 des zweiten Quadrates abgebildet. Da bei der beschriebenen Abbildung stets Original-, Bild- und Drehpunkt auf einer Geraden liegen, ist alles gezeigt. ∎



Aufgabe 70 (Baltic Way 1990.6) Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $\overline{AD} = \overline{BC}$ und $\alpha + \beta = 120°$. Ferner sei P ein äußerer Punkt des Vierecks, so dass A und P auf verschiedenen Seiten von CD liegen und Dreieck DPC gleichseitig ist. Beweise, dass auch das Dreieck APB gleichseitig ist.



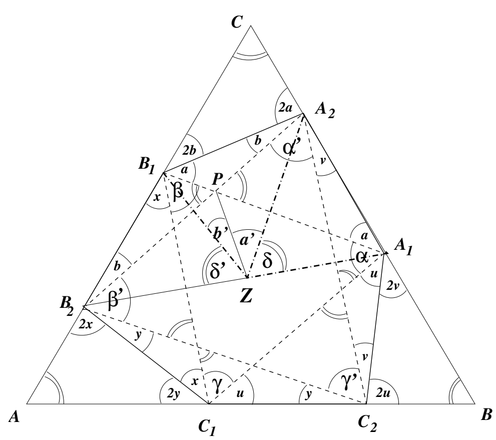
Aufgabe 71 (BWM 2005.2) Zwei Kreise k_1 und k_2 schneiden sich in A und B. Eine erste Gerade durch B schneidet k_1 in C und k_2 in E. Eine zweite Gerade durch B schneidet k_1 in D und k_2 in F; dabei liege B zwischen den Punkten C und E sowie zwischen den Punkten D und F. Schließlich seien M und N die Mittelpunkte der Strecken $\overline{CE}$ bzw. $\overline{DF}$.

Man beweise: Die Dreiecke ACD, AEF und AMN sind zueinander ähnlich.

Beweis. Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt

$$\angle ADF = \angle ACE, \quad \angle AFD = \angle AEC.$$

Somit sind die Dreiecke ADF und ACF einander ähnlich (und gleich orientiert) nach dem Ähnlichkeitssatz WW. Daher gibt es eine Drehstreckung, die das erste Dreieck ins zweite überführt; genauer, es handelt sich um eine Drehung um A um den Winkel $\angle DAC$ mit anschließender Streckung mit Zentrum A und Faktor $\left|\overline{AC}\right| : \left|\overline{AD}\right|$. Hieraus folgt sofort die Ähnlichkeit der oben genannten Dreiecke, da D in C, N in M und F in E über gehen. Die Dreiecke sind paarweise einander ähnlich nach dem Ähnlichkeitssatz SWS. ■



Aufgabe 72 (IMO 2005) Auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks ABC werden sechs Punkte folgendermaßen gewählt: A_1 und A_2 auf $\overline{BC}$, B_1 und B_2 auf $\overline{AC}$ sowie C_1 und C_2 auf $\overline{AB}$, wobei diese Punkte ein gleichseitiges konvexes Sechseck $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ bilden.

Man beweise, dass sich die Geraden A_1B_2, B_1C_2 und C_1A_2 in einem Punkt schneiden. (Rumänien)

Beweis. Zunächst führen wir die Winkel x, y, u, v, a, b, α, β, γ, α', β' und γ' ein, wie in der obigen Skizze. Da das Sechseck gleichseitig ist, haben die Außenwinkel bei $A_1, A_2, \ldots, C_2$ jeweils die Größe $2v, 2a, \ldots, 2u$. Da ABC ein gleichseitiges Dreieck ist, hat man

$$x + y = u + v = a + b = 60°. \tag{7}$$

Damit ergibt sich, dass alle doppelt gestrichenen Winkel in der Skizze gleich 60° sind (für δ und δ' kommt der Beweis unten). Außerdem folgt aus (7) unter Beachtung der gestreckten Winkel an den

Eckpunkten des Sechsecks

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha' = u + b,\\ \beta &= \beta' = a + y,\\ \gamma &= \gamma' = b + u.\end{aligned}$$

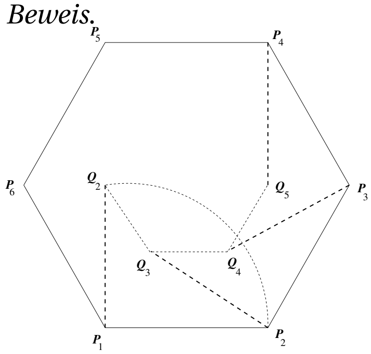
Hauptidee: Folglich sind die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ einander ähnlich und gleich orientiert nach Ähnlichkeitssatz WWW. Folglich muss es eine Drehstreckung um einen Punkt Z geben mit Faktor q. Bei dieser Drehstreckung geht auch $\triangle A_1ZB_1$ in $\triangle A_2ZB_2$ über. Da der Winkel zwischen A_1B_1 und A_2B_2 gleich 60° ist, gilt für den Drehwinkel dieser Bewegung

$$\delta = \angle A_1ZA_2 = 60^\circ = \delta'.$$

Somit ist $\delta = 60^\circ = \angle A_2PA_1$ und damit ist das Viereck A_1A_2PZ ein Sehnenviereck. Folglich gilt $a' = a$ (Peripheriewinkelsatz). Analog ist auch B_1B_2ZP ein Sehnenviereck, was zur Folge hat, dass $b' = b$. Somit gilt schließlich $\angle A_2ZB_1 = a'+b' = a+b = 60^\circ$. Damit ist aber $\angle A_1ZB_2 = \delta+60^\circ+\delta' = 18 =^\circ$ ein gestreckter Winkel. Das selbe gilt für $\angle C_2ZB_1$ und $\angle A_2ZC_1$. Damit ist die Behauptung gezeigt. ■

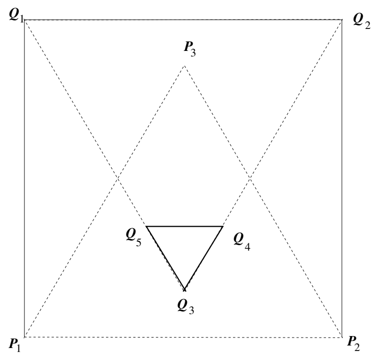
Aufgabe 73 Die Eckpunkte eines regulären n-Ecks mögen alle auf dem $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$-Gitter liegen (das heißt, sie haben alle ganzzahlige Koordinaten).
Beweise, dass $n = 4$ ist.

Beweis.



Wir betrachten den Fall $n > 4$ und führen einen indirekten Beweis mit Hilfe des Maximumprinzips und mit einer Stauchung. Angenommen, es gibt ein reguläres Gitterpunkts-n-Eck, dann hat es eine gewisse Seitenlänge a mit $a^2 = x_1^2 + y_1^2$, $x_1, y_1 \in \mathbb{N}$. Da die Menge der ganzzahligen Lösungen $(x, y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ der Ungleichung $1 \le x^2 + y^2 \le a^2$ für festes $a > 0$ immer endlich ist, gibt es insbesondere eine minimale Seitenlänge $a_0 \in \mathbb{N}$, also ein kleinstes reguläres n-Eck $P_1P_2\cdots P_n$, $P_i \in \mathbb{Z}^2$, $i = 1, \ldots, n$ im Gitter.

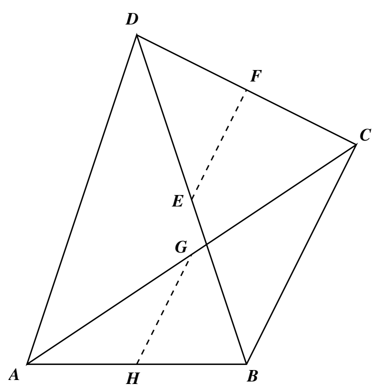
Es sei nun Q_i der Bildpunkt von P_i bei der Drehung um P_{i-1} um 90° entgegen dem Uhrzeiger. Da der Innenwinkel $\alpha_n = \frac{180^\circ}{n}\cdot(n-2) > 90^\circ$ für $n > 4$, liegen alle Q_i im Innern des n-Ecks $P_1\cdots P_n$. Außerdem sind alle Q_i wiederunm Gitterpunkte in $\mathbb{Z}^2$, da $\mathbb{Z}^2$ bei einer Drehung um einen Gitterpunkt um 90° in sich über geht.
Aus Symmetriegründen ist $Q_1Q_2\cdots Q_n$ ebenfalls ein reguläres n-Eck, aber mit echt kleinere Seitenlänge $a < a_0$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Minimalität von a_0. Folglich kann es ein solches n-Eck nicht geben. ■



Beweis. Fall $n = 3$. Angenommen, $P_1P_2P_3$ ist ein gleichseitiges Gitterpunktdreieck minimaler Seitenlänge a_0. Nun sei Q_1 der Bildpunkt von P_2 bei der Drehung um P_1 um 90°. Dies ist wieder ein Gitterpunkt. Sei ferner Q_2 der Bildpunkt von P_1 bei der Drehung um P_2 um −90° — auch ein Gitterpunkt. Die Drehung um den Mittelpunkt $M \in \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ des Quadrates $P_1P_2Q_2Q_1$ um 180° überführt $\mathbb{Z}^2$ wieder in $\mathbb{Z}^2$ und insbesondere den Gitterpunkt P_3 in einen Gitterpunkt Q_3 im Innern von $P_1P_2P_3$.
Führt man die selbe Konstruktion mit den Basispunkten P_2, P_3 und dann mit P_3 und P_1 jeweils noch einmal aus, so erhält man Gitterpunkte Q_4 und Q_5. Dann ist aber $Q_3Q_4Q_5$ ein gleichseitiges Gitterpunktdreieck mit kleinere Seitenlänge $a < a_0$ — Ein Widerspruch zur Minimaltät von a_0. ■

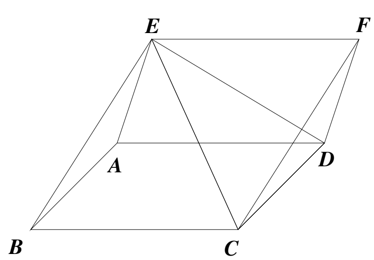
7 Räumliche Aufgaben

7.1 Verschiebung



Aufgabe 74 Beweise: Bei einem beliebigen Tetraeder $ABCD$ bilden die Kantenmitten E, F, G und H der Kanten $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, $\overline{CA}$ bzw. $\overline{AB}$ ein Parallelogramm. Im Falle eines regulären Tetraeders bilden sie ein Quadrat.

Beweis. Nach Umkehrung des Strahlensatzes ist $\overline{EF}$ parallel zu $\overline{BC}$ und halb so lang. Analog ist $\overline{HG}$ parallel zu $\overline{BC}$ und haljb so lang. Folglich sind die Strecken $\overline{EF}$ und $\overline{HG}$ gleich lang und parallel. Somit ist $EFGH$ ein Parallelogramm.
Im regulären Fall gilt überdies $\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HE}$ und auch die Diagonalen dieses Rhombus $EFGH$ sind aus Symmetriegründen gleich lang $\overline{EG} = \overline{HF}$. $EFGH$ ist damit ein Quadrat. ■



Aufgabe 75 (MO 440923, MO 441023) Gegeben sei eine Pyramide $ABCDE$ mit quadratischer Grundfläche $ABCD$, deren Seitenflächen ABE, BCE, CDE und DAE sämtlich gleichseitige Dreiecke sind. Auf der Seitenfläche CDE sei nach außen ein regelmäßiges Tetraeder $CDEF$ aufgesetzt. Untersuche, wie viele Seitenflächen der Körper $ABCDEF$ hat.

Lösung: Der entstandene Körper ist eine schiefe dreiseitige Pyramide mit den dreieckigen Grund- und Deckflächen ABC, CDF und den beiden Rhomben $BCFE$ und $ADFE$ und dem Quadrat $ABCD$ als Seitenflächen. Der Körper hat also nur 5 Flächen und nicht 7. Schüler der Klasse 10 konnte hier den Kosinussatz anwenden, um jeweils die Winkel zwischen den Seitenflächen der Pyramide bzw. des Tetraeders zu berechnen.
Zum Beweis. Wir betrachten die Verschiebung mit dem Verschiebungspfeil $\overrightarrow{BC}$. Hierbei gehen B in C und A in D über. Das Bild von E sei X. Es genügt zu zeigen, dass $X = F$ ist, denn dann liegen E, F,

B, C in einer gemeinsamen Ebene. Der beweis ist erbracht, wenn $ECDX$ ein reguläres Tetraeder ist. Als Bild von ABE ist DCX gleichseitig mit der Kantenlänge a. Ferner ist nach Voraussetzung CDE gleichseitig mit der selben Kantenlänge a. Schließlich ist $\overline{EX} = a$, das die Verschiebung die Länge a hatte. Somit sind alle Kantenlängen des Tetraeders $CDEX$ gleich a. Da es bis auf Kongruenz nur ein reguläres Tetraeder der Seitenlänge a gibt, muss $CDEX = CDEF$ gelten. Somit ist $X = F$ und alles ist gezeigt.
Beweisvariante: Man kann sich $ABCDEF$ in ein reguläres Tetraeder der doppelten Seitenlänge $2a$ eingebettet denken, wobei F eine Ecke ist und A, B, C, D, E sind Kantenmitten des großen Tetraeders. Nach Aufgabe 74 ist dann $ABCD$ ein Quadrat.

Aufgabe 76 (Variante von Aufgabe 24) Gegeben seien vier paarweise nicht kongruente sich nicht schneidende Kugeln K_i, $i = 1, \ldots, 4$ im Raum. Für $i \neq j$ sei P_{ij} die Spitze des Kegels, welcher den Kugeln K_i und K_j umbeschrieben ist.
Beweisen Sie, dass die sechs Punkte P_{ij}, $i \neq j$ in einer gemeinsamen Ebene liegen.

Aufgabe 77 (Variation von Aufgabe 23, MO ????) Gegeben sei ein Tetraeder. Durch jeden Eckpunkt und die benachbarten Kantenmitten wird eine Kugel gelegt.
Beweise, dass sich die entstandenen vier Kugeln in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 78 Zeige,dass das folgende räumliche Analogon von Aufgabe 21 nicht gilt: Wenn sich vier kongruente Kugeln in einem gemeinsamen Punkt schneiden, dann liegen die vier anderen Schnittpunkte je dreier dieser Kugeln auf einer zu den Ausgangskugeln kongruenten Kugel.

Beweis. Als Gegenbeispiel dient das rechtwinklig-gleichschenklige Tetraeder (als die 4 Mittelpunkte der 4 Kugeln), wo die 4 Schnittpunkte je dreier Kugeln (das sind gerade die 4 Mittelpunkte der Umkreise der Seitenflächen des Tetraeders) in einer *Ebene* liegen. ■

7.2 Drehung

Aufgabe 79 Gegeben sei ein gerader Kreiszylinder der Höhe h mit Radius r, der randvoll mit Wasser gefüllt ist.
Wie viel Wasser fließt heraus, wenn man ihn um 30° kippt?

Lösung: Verdoppelt man den Leerkörper durch Drehung um 180° um die in die Deckfläche verschobene Drehachse (kleine Halbachse der Ellipsenfläche), so erhält man einen Zylinder, dessen Volumen berechnet werden kann.

Aufgabe 80 Es sein $A_0A_1 \cdots A_{n-1}$ ein n-Eck in der Ebene und $B_0B_1 \cdots B_{n-1}$ das n-Eck, dessen Mittelpunkte genau die Mittelpunkte der über den Seiten des n-Ecks $A_0 \cdots A_{n-1}$ nach außen errrichteten regulären n-Ecke.
Zeige dass $B_0 b_1 \cdots b_{n-1}$ regulär ist genau dann, wenn $A_0 \cdots A_{n-1}$ affin regulär ist.

Aufgabe 81 Ein Fünfeck in Raum, das gleichseitig und gleichwinklig ist, liegt in einer Ebene.

8 Kürzeste Linien

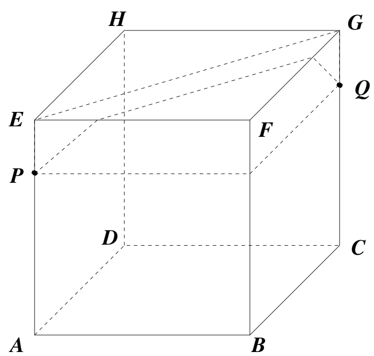
Aufgabe 82 Gegeben sei eine Gerade g in der ebene und zwei verschiedene Punkte A und B auf der selben Seite von g.
Bestimmen Sie einen Punkt C auf g, so dass der Steckenzug ACB $\overline{AC} + \overline{CB}$ minimale Länge hat.

Aufgabe 83 Gegeben sei ein Punkt P im Innern eines Winkels $\angle(a,b)$.
Bestimmen Sie zwei Punkte $Q \in a$ und $R \in b$, so dass das Dreieck $\triangle PQR$ minimalen Umfang besitzt.

Aufgabe 84 Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC bestimmen Sie drei Punkte P, Q, R auf den Seiten, so dass das Dreieck PQR minimalen Umfang hat.

Aufgabe 85 (Fermat-Punkt) Gegeben sei ein Dreieck ABC, bei dem alle Innenwinkel kleiner gleich $120°$ sind.
Bestimmen Sie den Punkt F der Ebene, so dass die Summe der Streckenlängen $\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}$ minimal wird.

Aufgabe 86 Gegeben sei ein konvexes Viereck $ABCD$.
Bestimmen Sie alle Punkte F, so dass die summe der Abstände von F zu den Eckpunkten $\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}+\overline{FD}$ minimal wird.



Aufgabe 87 Eine Schnecke kriecht auf der Oberfläche eines Würfels $ABCDEFGH$ der Kantenlänge 1 vom Punkt P auf der Kante $\overline{AE}$ zum Punkt Q auf der Kante CG. Dabei liegen P und Q genau in der Höhe $\frac{3}{4}$.
Bestimmen Sie den Verlauf des kürzesten Weges und dessen Länge.

Aufgabe 88 (MO 460932) Ein Apfel hat die Gestalt einer Kugel vom Radius 1. Eine ganz kleine Made hat sich durch den Apfel gefressen. Sie drang im Punkt P der Oberfläche in den Apfel ein und verließ den Apfel im Punkt Q der Oberfläche wieder. Dabei war ihr Weg eine Linie der Länge 2, welche nicht unbedingt gerade war.
Zeigen Sie, dass man den Apfel durch einen ebenen Schnitt so in zwei gleich große Hälften zerlegen kann, das das Innere einer der beiden Hälften vom Weg der Made frei bleibt.

Beweis. Die Grundidee liegt im Spiegelungstrick, nämlich in der Konstruktion einer Ebene ε durch den Mittelpunkt M der Kugel, so dass *der kürzeste Weg* von P nach Q über ε mindestens die Länge 2 hat.
Es sei w die Winkelhalbierende von $\angle PMQ$ und ε die Ebene, die durch M geht und senkrecht auf w steht. Der Spiegelungspunkt von Q an ε sei Q'. Verbindet man P mit Q' durch eine Gerade, so ist M ihr Schnittpunkt mit der Ebene ε. Ist N irgend ein vom M verschiedener Punkt auf ε, so folgt aus der Dreiecksungleichung im Dreieck $Q'NP$:

$$\overline{QN}+\overline{NP}=\overline{Q'N}+\overline{NP}>\overline{Q'P}=2.$$

Folglich hat jeder Weg von P nach Q über ε eine Länge ≥ 2. Umgekehrt heißt das, dass jeder Weg von P nach Q, der höchstens die Länge 2 hat, die Ebene ε nicht schneidet. Somit enthält der offene Halbraum von ε, der nicht P und Q enthält keinen Punkt des Weges der Made. ■

Literatur

[Don69] E. Donath. *Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks.* Number XX in Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, second edition, 1969.

[PS96] A. S. Posamentier and C. T. Salkind. *Challenging problems in geometry*. Dover Publications, Inc., New York, 1996.

[Spe01] E. Specht. *geometria – scientiae atlantis*. Otto-von-Guericke-Universität, Magdeburg, 2001.

Axel Schüler, Institut für Angewandte Trainingswissenschaft, Marschnerstr. 29, 04109 Leipzig
E-Mail: `Axel.Schueler@math.uni-leipzig.de`