Geometrische Konstruktionen und Beweise mit Bewegungen

A 1 Gegeben sei ein Dreieck ABC. Konstruiere ein Quadrat $PQRS$, so dass $\overline{PQ}$ auf der Seite $\overline{AB}$, R auf $\overline{BC}$ und S auf $\overline{CA}$ liegt.

A 2 Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Konstruiere einen Kreis k durch D, der die Seiten AB und BC berührt.

A 3 Gegeben seien zwei Geraden g und h und ein Kreis k. Konstruiere ein Quadrat $ABCD$ mit $A, C \in h$, $D \in g$ und $B \in k$.

A 4 Gegeben seien drei parallele Geraden g, h und k. Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC mit $A \in g$, $B \in h$ und $C \in k$.

A 5 Gegeben seien zwei sich schneidende Kreise k_1 und k_2. Einer der Schnittpunkte sei S. Konstruiere eine durch S gehende Gerade, die k_1 und k_2 außer in S noch in den Punkten P bzw. Q so schneidet, dass S der Mittelpunkt von $\overline{PQ}$ ist.

A 6 Gegeben seien drei konzentrische Kreise k_1, k_2 und k_3 mit den Radien 3, 4 und 5. Konstriere ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$ und $\gamma = 90°$, so dass A, B und C jeweils auf k_1, k_3 bzw. auf k_2 liegen.

A 7 Gegeben sei ein Punkt P. Konstruiere ein Quadrat $ABCD$, sodass die Abstände von P zu A, B und C gleich 1, 2 bzw. 3 sind.

A 8 Gegeben seien drei benachbarte kongruente Quadrate. Zeige, dass $\alpha + \beta = 45°$. Dabei sei α der kleinste Winkel im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten 1 und 2 und β der kleinste Winkel im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten 1 und 3.

A 9 Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Der Punkt P auf $\overline{AC}$ teile die Strecke im Verhältnis $4:1$, der Punkt Q teile die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis $3:2$. Beweise, dass PQD ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ist.

A 10 Über den Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ eines spitzwinkligen Dreiecks ABC werden nach außen Quadrate $BPQC$ und $CRSA$ errichtet. Es sei M der Mittelpunkt von $\overline{AB}$. Beweise, dass die Geraden MC und QR senkrecht aufeinander stehen und dass $\overline{QR}$ doppelt so lang ist wie $\overline{MC}$.

A 11 Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC, über dessen Seiten nach außen die Quadrate $ABHF$, $BCLE$ und $ACKD$ errichtet wurden. Ferner sei Dreieck HFG zu ABC gleichgerichtet kongruent. Man zeige, dass die Strecken $\overline{CG} = \overline{ED}$ gleich lang und orthogonal sind.

A 12 Die Punkte A, B, D und C liegen in dieser Reihenfolge auf einer Geraden. Über den Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ werden nach unten gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke APB und BQC errichtet, wobei die rechten Winkel bei P bzw. Q liegen. Ferner werden nach oben über $\overline{AD}$ und $\overline{DC}$ rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke ASD und DRC mit rechten Winkeln bei R bzw. S. Beweise, dass die Strecken $\overline{SQ}$ und $\overline{PR}$ gleich lang sind und aufeinander senkrecht stehen.

A 13 Über den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{DA}$ eines Parallelogramms $ABCD$ werden nach außen gleichseitige Dreiecke ABQ bzw. ADP errichtet. Beweise, dass Dreieck PQC gleichseitig ist.

A 14 Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC. Zeige, dass für alle Punkte X des Bogens $\overset{\frown}{AB}$ des Umkreises von Dreieck ABC gilt $\overline{AX} + \overline{BX} = \overline{CX}$.

A 15 (BWM 1998.1.3) Über den Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$ eines spitzwinkligen Dreiecks ABC werden nach außen gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke BXC und CYA errichtet. Es sei M der Mittelpunkt von $\overline{AB}$. Beweise, dass das Dreieck XMY gleichschenklig-rechtwinklig ist.

A 16 (MO 471313) Die Kreise k_1 mit dem Mittelpunkt M_1 und k_2 mit dem Mittelpunkt M_2 schneiden sich in zwei verschiedenen Punkten A und B. Die Gerade AM_1 schneidet k_1 außer in A noch im Punkte C; die Gerade AM_2 schneidet k_2 außer in A noch in D. Zeige, dass die Geraden M_1M_2 und CD parallel sind, und dass B auf der Geraden CD liegt.

A 17 (Baltic Way 1992) Gegeben sei ein Kreis k in der Ebene und zwei Kreise k_1 und k_2, die k von innen in den Punkten A bzw. B berühren. Ferner sei t eine gemeinsame Tangente von k_1 und k_2 so, dass k_1 und k_2 beide auf der selben Seite von t liegen. Es seien C und D die Berührungspunkte von t mit k_1 bzw. k_2. Beweise, dass die Geraden AC und BD sich in einem Punkt F schneiden, der auf k liegt.

A 18 (BWM 1996.2.3) Über den Seiten eines Dreiecks ABC sind nach außen Rechtecke ABB_1A_1, BCC_1B_2 und CAA_2C_2 errichtet. Beweise, dass sich die Mittelsenkrechten der Strecken $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$ und $\overline{C_1C_2}$ in einem gemeinsamen Punkt schneiden.

A 19 (MO 421142) Im Innern des Dreiecks ABC liegen vier kongruente Kreise k_1, k_2, k_3 und k_4 mit den Mittelpunkten A', B', C' und M' wie in der nebenstehenden Skizze angedeutet. Dabei berühren k_1, k_2 und k_3 jeweils zwei Seiten des Dreiecks und k_4 von außen. Beweise, dass M' auf der Geraden durch In- und Umkreismittelpunkt von Dreieck ABC liegt.

A 20 Gegeben seien drei kongruente Kreise k_1, k_2 und k_3, die durch einen gemeinsamen Punkt M verlaufen und sich paarweise außer in M noch in den Punkten A, B und C schneiden. Beweise, dass der Umkreis k_4 von ABC kongruent zu den drei Ausgangskreisen ist.

A 21 Gegeben seien drei paarweise inkongruente, sich nicht schneidende Kreise in der Ebene. Beweise: Die drei Schnittpunkte der äußern gemeinsamen Tangenten je zweier Kreise liegen auf einer gemeinsamen Geraden.

A 22 (IMO 1983) Gegeben seien zwei sich in P schneidende Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 bzw. M_2. Von P aus bewegen sich Punkte R_1 bzw. R_2 auf k_1 bzw. k_2 mit *gleicher Winkelgeschwindigkeit* im Uhrzeigersinn; das heißt, wenn R_1 einen Halbkreis durchlaufen hat, so auch R_2 auf k_2. Man beweise, dass es einen Punkt der Ebene gibt, der von R_1 und R_2 zu jedem Zeitpunkt gleichweit entfernt ist.

A 23 Gegeben sei ein Parallelogramm $ABCD$ und im Innern ein Punkt P mit $\angle APB + \angle CPD = 180°$. Beweise, dass $\angle PAB = \angle PCB$.

A 24 Beweise: Bei einem beliebigen Tetraeder $ABCD$ bilden die Kantenmitten E, F, G und H der Kanten $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, $\overline{CA}$ bzw. $\overline{AB}$ ein Parallelogramm. Im Falle eines regulären Tetraeders bilden sie ein Quadrat.

A 25 (MO 440923, MO 441023) Gegeben sei eine Pyramide $ABCDE$ mit quadratischer Grundfläche $ABCD$, deren Seitenflächen ABE, BCE, CDE und DAE sämtlich gleichseitige Dreiecke sind. Auf der Seitenfläche CDE sei nach außen ein regelmäßiges Tetraeder $CDEF$ aufgesetzt. Untersuche, wie viele Seitenflächen der Körper $ABCDEF$ hat.

A 26 (Bay Area Mathematical Olympiad 1999) Über den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ eines Trapezes $ABCD$ werden nach außen Quadrate errichtet. Es sei P der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ des Trapezes und P_1 und P_2 seien die Mittelpunkte der beiden Quadrate über $\overline{AB}$ bzw. über $\overline{CD}$. Beweise, dass die drei Punkte P, P_1 und P_2 auf einer Geraden liegen.

A 27 (BWM 2005.2) Zwei Kreise k_1 und k_2 schneiden sich in A und B. Eine erste Gerade durch B schneidet k_1 in C und k_2 in E. Eine zweite Gerade durch B schneidet k_1 in D und k_2 in F; dabei liege B zwischen den Punkten C und E sowie zwischen den Punkten D und F. Schließlich seien M und N die Mittelpunkte der Strecken $\overline{CE}$ bzw. $\overline{DF}$. Beweise: Die Dreiecke ACD, AEF und AMN sind zueinander ähnlich.

A 28 (Napoleon) Über den Seiten eines Dreiecks ABC werden nach außen gleichseitige Dreiecke errichtet. Beweise, dass die Mittelpunkte dieser drei gleichseitigen Dreiecke ein gleichseitiges Dreieck bilden.

A 29 Über den Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks ABC werden nach außen Dreiecke BCX, CAY und ABZ errichtet und zwar so, dass $\angle ZAB = \angle ZBA = 15°$, $\angle YAC = \angle XBC = 45°$ und $\angle YCA = \angle XCB = 30°$. Beweise, dass das Dreieck XYZ rechtwinklig-gleichschenklig ist.

A 30 Die Eckpunkte eines regulären n-Ecks mögen alle auf dem $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-Gitter liegen (das heißt, sie haben alle ganzzahlige Koordinaten). Beweise, dass $n = 4$ ist.

A 31 Es seien $k \geq 2$ und $n \geq 3$ natürliche Zahlen. Die Eckpunkte eines regulären n-Ecks mögen alle auf dem $\mathbb{Z}^k$-Gitter liegen (das heißt, sie haben alle ganzzahlige Koordinaten). Beweise, dass $n \in \{3, 4, 6\}$ gilt.

Axel Schüler, Institut für Angewandte Trainingswissenschaft, Marschnerstraße 29, 04109 Leipzig
email: `Axel.Schueler@math.uni-leipzig.de`