# Spiegelung an Dreiecken

## 1 Spiegelung von Punkten an Dreiecken

### 1.1 Bemerkung zur Aufgabe 450833 - LMO 2006

⋆Aufgabe 450833:
Drei kongruente Kreise mit den Mittelpunkten $M_1$, $M_2$, $M_3$ und dem Radius $r$ verlaufen durch einen Gemeinsamen Punkt $D$. Diese Kreise schneiden einander außerdem in weiteren Punkten, die mit $A$, $B$ und $C$ bezeichnet werden.

a. Beweise, dass man einen Punkt $S$ konstruieren kann, der von diesen drei Schnittpunkten den gleichen Abstand besitzt!
b. Vergleiche den Radius des Kreises mit dem Mittelpunkt, auf dem $A$, $B$ und $C$ liegen, mit dem Radius $r$!

Die Teilaufgabe a. lässt viele Möglichkeiten in Hinsicht auf den (inhaltlichen) Umfang der Lösung. Um rigoros zu sein, müsste man beweisen, dass die Punkte $A$, $B$ und $C$ nicht auf einer Geraden liegen. Dies würde wohl eine ganz eigene Aufgabe sein. Dieser Punkt $S$ existiere also und ist damit der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$ und der mit $r$ zu vergleichende Radius ist der Umkreisradius $\rho$ dieses Dreiecks.
Wie man schnell vermuten wird, sind diese beiden Radien gleich groß. Die Musterlösung führt einen Beweis über die zahlreichen Rhomben, die sich ergeben, wenn man alle bekannten Radien einzeichnet. Dieser Beweis ist an sich recht elegant und leicht einzusehen, jedoch schwer zu finden. Jedenfalls wurde er von keinem thüringer Teilnehmer dieser Altersklasse gefunden. Es wurde hingegen von einem Schüler eine Beweisidee gefunden, die meiner Meinung nach eleganter ist und die Bedeutung von Geometrie in mathematischen Zirkeln unterstreicht, da die Ideen sehr nah bei den Inhalten solcher Zirkel insbesondere der Thematik „Euler'sche Gerade und Feuerbach'scher Kreis“[1] liegen.

Kernpunkt des Beweises ist folgendes Lemma:

□Lemma von Startnummer 840:
Sei $U$ der Umkreismittelpunkt von $\triangle PQR$ und seien $P'$, $Q'$ und $R'$ die Bildpunkte von $U$ bei Spiegelung an den Seiten $\overline{QR}$, $\overline{PR}$ und $\overline{PQ}$. Seien weiterhin $P''$, $Q''$ und $R''$ die Bilder von $P$, $Q$ und $R$ bei Spiegelung an $U$. Dann gehen $\triangle P'Q'R'$ und $\triangle P''Q''R''$ durch Verschiebung ineinander über. Insbesondere gilt $\triangle P'Q'R' \cong \triangle PQR$.

Beweis: Da $U$ der Umkreismittelpunkt ist, sind liegen nach Konstruktion $\overline{UP'}$,$\overline{UQ'}$ und $\overline{UR'}$ auf den Mittelsenkrechten von $\triangle PQR$ und die Mittelpunkte dieser Strecken sind die Seitenmittelpunkte von $\triangle PQR$. Das bedeutet, $\triangle P'Q'R'$ geht aus dem

[1] Für weitere Informationen zu diesem Thema siehe auch *„Euler'sche Gerade und Feuerbach'scher Kreis“* von Hans-Gert Gräbe, Mathematische Bibliothek der LSGM: http://lsgm.uni-leipzig.de/KoSemNet/pdf/graebe-99-1.pdf.

Seitenmittelpunktsdreieck von $\triangle PQR$ durch zentrische Streckung mit Streckfaktor 2 und Streckzentrum $U$ hervor. Da das Seitenmittelpunktsdreieck wiederum aus $\triangle PQR$ durch zentrische Streckung mit Streckfaktor $-\frac{1}{2}$ und Streckzentrum $S$ hervorgeht, gilt $\triangle P'Q'R' \cong \triangle PQR$. Außerdem sind die Seiten von $\triangle PQR$ und $\triangle P'Q'R'$ paarweise parallel. Damit ist die zweite Teilaussage bewiesen. Der weitere Beweisverlauf orientiert sich an der Euler'schen Gerade. Es muss eine zentrische Streckung mit dem Streckfaktor $-1$, also eine Punktspiegelung, geben, die $\triangle PQR$ in $\triangle P'Q'R'$ überführt. Bekanntermaßen ist $U$ als Umkreismittelpunkt gleichzeitig Höhenschnittpunkt des Seitenmittelpunktsdreiecks und damit auch Höhenschnittpunkt von $\triangle P'Q'R'$. D.h. bei der gesuchten zentrischen Streckung bzw. Punktspiegelung, geht $U$ in den Höhenschnittpunkt $H$ von $\triangle PQR$ über. Das gesuchte Streck- bzw. Spiegelungszentrum ist also der Mittelpunkt $N$ der Strecke $\overline{UH}$: der Mittelpunkt des Feuerbachkreises von $\triangle PQR$.
Das heißt, die Dreiecke $\triangle P'Q'R'$ und $\triangle P''Q''R''$ gehen durch Punktspiegelung aus $\triangle PQR$ hervor, und lassen sich damit durch Verschiebung ineinander überführen.$\square$

Was hat dieser Satz nun mit der eigentlichen Aufgabe zur tun? Da die drei Kreise den gleichen Radius $r$ haben, ist $D$ der Umkreismittelpunkt von $\triangle M_1M_2M_3$. Außerdem gehen die Punkte $A$, $B$ und $C$ aus $D$ durch Spiegelung an den Seiten dieses Dreiecks hervor (Elementarer Zusammenhang zwischen den beiden Schnittpunkten zweier Kreise). Das Lemma lässt sich also in dieser Situation anwenden und es gilt $\triangle M_1M_2M_3 \cong \triangle ABC$. Damit sind insbesondere die Umkreisradien beider Dreiecks gleich.$_\star$

### 1.2 Ähnliches Verhalten

Nachdem der Zusammenhang des Lemmas von Startnummer 840 bewiesen ist, stellt sich sofort folgende Frage:

> Frage: Gibt es weitere Punkte $X$, die bei Spiegelung an $\triangle PQR$ auf dazu kongruente Dreiecke $\triangle X_pX_qX_r$ abgebildet werden? Wenn ja, wie lassen sie sich beschreiben?

## 2 Spiegelung von Geraden an Dreiecken

Spiegelt man eine Gerade an den drei Seiten eines Dreieckes, so entstehen drei neue Gerade, die (meistens) ein neues Dreieck bilden. Allerdings scheint dieses Dreieck nicht so einfach zu beschreiben zu sein, wie das Bild eines Punkt. Auch hier stellt sich eine ähnliche Frage:

> Frage: Gibt es Geraden, die bei Spiegelung an einem Dreieck auf dazu ähnliche (kongruente) Dreiecke abgebildet werden. Wenn ja, wie lassen sie sich beschreiben?