

# Das Kartenspiel SET

Axel Schüler

1.10.2025

## 1 Geometrie der Ebene

Wir betrachten zunächst das abgewandelte Spiel SET2, bei dem jede Karte nur zwei Eigenschaften besitzt, etwa Anzahl und Form und diese Eigenschaften wie im Originalspiel jeweils drei Ausprägungen haben 1, 2, 3 und Rechteck, Welle bzw. Oval.

**Satz 1 (Hauptsatz)** *Zu je zwei verschiedenen Karten aus SET (SET2 bzw. SET3) gibt es genau eine Karte, die diese beiden Karten zu einem Set ergänzt.*

Wir werden später einen Beweis skizzieren.

**Aufgabe 1:** (a) Wie viele Karten hat SET2?

(b) Wie viele Sets hat SET2, wie viele Nicht-sets (Nsets) hat SET2?

*Lösung zu 1.* (a) Da jede der beiden Eigenschaften genau 3 Ausprägungen hat, gibt es  $3 \cdot 3 = 9$  Karten in SET2. Analog hat SET3 genau  $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$  Karten und das Originalset hat 81 Karten.

(b) Wir bezeichnen die Menge der sets mit  $G_i$ ,  $i = 2, 3, 4$ , je nachdem ob wir SET2, SET3 oder SET betrachten. Dabei steht  $G$  auch für „Gerade“. Nach dem Hauptsatz kann man beliebige zwei Karten wählen, die dritte liegt dann fest, will man ein Set haben. Beachtet man, dass es bei diesem Tripel nicht auf die Reihenfolge der Wahl ankommt, so liefern die 6 Permutationen dasselbe Set:

$$|G_2| = 9 \cdot 8 / 6 = 12, \quad |G_3| = 27 \cdot 26 / 6 = 9 \cdot 13 = 117, \quad |G_4| = 81 \cdot 80 / 6 = 27 \cdot 40 = 1080.$$

Analog erhält man für die Mengen  $NG_2$ ,  $NG_3$  und  $NG$  der Nicht-Sets:

$$|NG_2| = 9 \cdot 8 \cdot 6 / 6 = 72, \quad |NG_3| = 27 \cdot 26 \cdot 24 / 6 = 2808, \quad |NG_4| = 81 \cdot 80 \cdot 78 / 6 = 93960.$$

**DEFINITION.** Es sei  $i = 2, 3, 4$ . Ein  $i$ -cap ist eine Teilmenge von SET $_i$ ,  $i = 2, 3, 4$ , die kein Set enthält.

Wir werden uns gründlich mit maximalen  $i$ -caps beschäftigen und obere und untere Schranken für maximale  $i$ -caps angeben.

## 1.1 Die Restklassen modulo 3

Die Menge der Restklassen modulo 3 bezeichnen wir mit  $\mathbb{F}_3$ , also  $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ . Hierbei steht 'F' für „field“ denn diese drei Elemente bilden einen „Körper“. Das bedeutet im Wesentlichen, dass man in  $\mathbb{F}_3$  addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren kann. Bildet man das Mengen-Kreuzprodukt von  $\mathbb{F}_3$  mit sich selbst, so erhalten wir die Vektorräume

$$\mathbb{F}_3^2 = \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3 = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{F}_3\}, \quad \mathbb{F}_3^3 = \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3, \quad \mathbb{F}_3^4 = \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3.$$

Ebenso wie man  $\mathbb{R}^2$  sowohl als *Punktmenge* als auch als *Vektorraum* ansehen kann, wollen wir auch  $\mathbb{F}_3^2, \mathbb{F}_3^3, \mathbb{F}_3^4$  als Punktmenge ansehen. Dementsprechend können wir über Geraden, Ebenen, Parallelität und Schnitte reden.

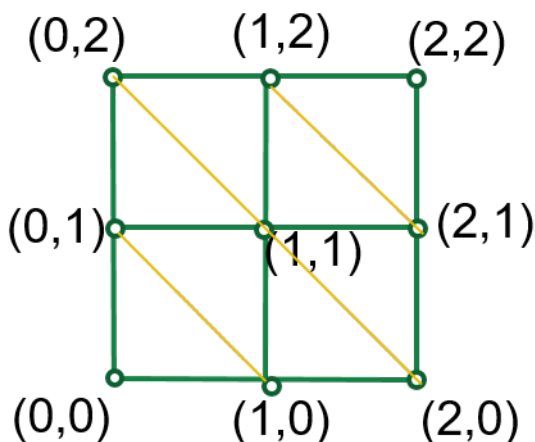
Wir können nun SET2 mit  $\mathbb{F}_3^2$ , SET3 mit  $\mathbb{F}_3^3$  und SET mit  $\mathbb{F}_3^4$  identifizieren, indem wir die erste Koordinate mit der Anzahl, die zweite Koordinate mit der Form, die dritte mit der Farbe und die vierte mit der Füllung identifizieren. Nun lässt sich ganz einfach beschreiben, was ein Set ist:

DEFINITION. Ein Set ist eine Menge von 3 Punkten  $A, B$  und  $C$  aus SETi mit

$$A + B + C = 0.$$

Für SET2 würde das mit  $A = (a_1, a_2)$ ,  $B = (b_1, b_2)$  und  $C = (c_1, c_2)$  bedeuten, dass

$$a_1 + b_1 + c_1 \equiv 0 \pmod{3} \quad \text{und} \quad a_2 + b_2 + c_2 \equiv 0 \pmod{3}.$$



Wir sehen, dass drei Punkte ein Set bilden, genau dann, wenn diese drei Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Die waagerechten und senkrechten Linien sowie die gelben Linien bilden jeweils drei parallele Geraden.

*Bemerkung.* (a) Jede Gerade enthält genau drei Punkte. Sind  $A$  und  $B$  in  $\mathbb{F}_3^i$  gegeben, so hat die Gleichung  $A + B + C = 0$  genau die eine Lösung  $C = -A - B = 2A + 2B$ . Das beweist den obigen Satz (1).

(b) Zwei Geraden in  $\mathbb{F}_3^2$  sind entweder parallel oder sie schneiden sich in genau einem Punkt. Es sind immer je drei Geraden mit jeweils drei Punkten parallel in  $\mathbb{F}_3^2$ , d. h., alle 9 Punkte können immer auf drei parallele Geraden verteilt werden.

(c) Es gibt genau 4 verschiedene Richtungen, in die Geraden verlaufen können und somit  $G_2 = 4 \cdot 3 = 12$  verschiedene Geraden. Die Richtungen sind durch die Vektoren  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$  und  $(1, 2)$  gegeben. ■

**Satz 2** (a) *Es gibt ein vierelementiges 2-cap.*

(b) *Je 5 Punkte aus  $\mathbb{F}_3^2$  enthalten ein Set (die drei Punkte einer Geraden).*

*Beweis.* Wenn man von den drei Restklasse, eine Restklasse „verbietet“, etwa Restklasse 2 und nur mit Koordinatenwerten 0 und 1 Punkte bildet, so erhält man jeweils vier Punkte, die kein Set (keine vollständige Gerade) enthalten, etwa  $M = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ . Man prüft leicht nach, dass  $C = 2A + 2B$  stets eine Koordinate 2 hätte, wenn man  $A, B$  aus  $M$  wählt, also  $C \notin M$ .

(b) Es sei  $N$  eine Menge aus 5 Punkten von  $\mathbb{F}_3^2$ . Angenommen,  $N$  enthält kein Set. Verteilt man die Punkte von  $N$  auf die drei parallele Geraden  $g_0, g_1, g_2$ , dann müssen sich die fünf Punkte wie  $5 = 2 + 2 + 1$  auf die drei Geraden verteilen, da andernfalls bereits ein Set vorläge. O.B.d.A. möge  $g_0$  nur einen Punkt  $P_0$  aus  $N$  enthalten. Dann müssen aber die anderen 4 Punkte aus  $N$  sich auf den restlichen 3 Geraden durch  $P_0$  befinden. Denn die vier Geraden durch  $P_0$  enthalten *alle* 9 Punkte der Ebene ( $4\text{Geraden} \cdot 2\text{Punkte}/\text{Gerade} + 1\text{Punkt}(P_0) = 9$ ). Keine zwei der  $4 \cdot 2 = 8$  Punkte der vier Geraden können gleich sein, da sonst zwei verschiedene Geraden zwei identische Punktpaare hätten  $P_0$  und einen weiteren Punkt. Verteilt man also die restlichen 4 Punkte aus  $N$  auf die restlichen 3 Geraden durch  $P_0$ , so müssen auf mindestens einer dieser Geraden zwei weitere Punkte von  $N$  liegen. Diese bilden zusammen mit  $P_0$  eine vollständige Gerade (Set). □

## 2 Geometrie im dreidimensionalen Raum $\mathbb{F}_3^3$

Die Anzahl der Punkte ( $p_3 = |P_3| = 27$ ) und der Geraden ( $g_3 = |G_3| = 9 \cdot 13 = 117$ ) wurden bereits berechnet. Wir wissen auch, dass es genau 3 Punkte pro Gerade gibt ( $p_g = 3$ ) und in jeder Ebene genau 4 Geraden durch jeden Punkt der Ebene gibt. Ferner gibt es stets 9 Punkte in jeder Ebene und 12 Geraden (4 Richtungen) in jeder Ebene.

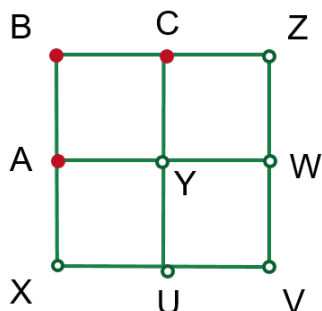
Wir wollen bestimmen wie viele Geraden des Raumes durch einen Punkt gehen,  $g_p$ , wie viele Ebenen des Raumes durch einen Punkt ( $e_p$ ) gehen und wie viele Ebenen des Raumes durch eine Gerade gehen ( $e_g$ ).

Wir bestimmen  $g_p$  auf zwei unabhängigen Wegen: Zunächst gibt es durch den Nullpunkt  $(0, 0, 0)$  die 4 Geraden der Ebene  $z = 0$ . Außerdem gibt es zu jedem der 9 Punkte der Ebene  $z = 1$  eine weitere Gerade. Alle diese Geraden sind voneinander verschieden und weitere Geraden durch  $(0, 0, 0)$  gibt es nicht. Fazit  $g_p = 4 + 9 = 13$ . Zweiter Weg

(doppeltes Abzählen): Es gilt  $g_p \cdot p_3 = p_g \cdot g_3$ . Daher gilt

$$g_p = \frac{p_g \cdot g_3}{p_3} = \frac{3 \cdot 9 \cdot 13}{27} = 13.$$

Die Zahl der Geraden durch einen Punkt gibt gleichzeitig die Anzahl der Richtungen an, die im Raum existieren. Zu jeder Richtung gibt es genau drei parallele Ebenen, die senkrecht zur Richtung stehen. Somit gilt  $e_3 = 3 \cdot 13 = 39$ .



**Satz 3** *Drei nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegende Punkte  $A, B, C \in \mathbb{F}_3^3$  spannen genau eine Ebene aus 9 Punkten auf.*

*Beweis.* Man berechnet  $Z = 2B + 2C$ ,  $X = 2A + 2B$ ,  $V = 2A + 2C$  und erhält, da  $B, V, Y$  ein Set bilden  $Y = 2B + 2V = 2B + A + C$ . Analog bestimmt man  $U$  und  $W$ . Tatsächlich bilden diese 9 Punkte eine Ebene wie  $\mathbb{F}_3^2$ .

□

Zweiter Beweis für  $e_3 = 39$ . Es gibt in  $\mathbb{F}_3^3$  genau  $ng_3 = |NG_3| = 3^3 \cdot 8 \cdot 13 = 2808$  Nsets, die nach Satz (3) alle genau eine Ebene erzeugen. Diese Ebene wird aber von allen  $ng_2 = |NG_2| = 8 \cdot 9 = 72$  in ihr enthaltenen Nsets erzeugt. Also gilt

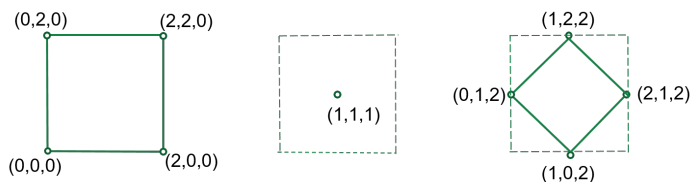
$$e_3 = \frac{ng_3}{ng_2} = \frac{3^3 \cdot 8 \cdot 13}{8 \cdot 9} = 3 \cdot 13 = 39.$$

Durch doppeltes Abzählen berechnen wir nun noch die fehlenden Parameter  $e_p =$  Anzahl der Ebenen durch einen Punkt,  $e_g =$  Anzahl der Ebenen durch eine Gerade:

$$e_p = \frac{p_e \cdot e_3}{p_3} = \frac{9 \cdot 3 \cdot 13}{27} = 13,$$

$$e_g = \frac{g_e \cdot e_3}{g_3} = \frac{12 \cdot 3 \cdot 13}{9 \cdot 13} = 4.$$

Jede Gerade liegt also in 4 verschiedenen Ebenen.



**Satz 4** (a) *Es gibt ein 9-elementiges 3-cap.*

(b) *Unter beliebigen 10 Punkten existiert immer eine vollständige Gerade.*

*Beweis.* (a) In der nebenstehenden Skizze ist ein solches maximale 3-cap aus 9 Punkten zu sehen. Man prüft leicht nach, dass tatsächlich  $A + B + C \neq 0$  gilt für alle Tripel aus verschiedenen Punkten.

(b) Es sei nun  $M$  eine Menge aus 10 Punkten. Angenommen,  $M$  enthält kein Set (= keine vollständige Gerade). Dann können sich die 10 Punkte nur in folgender Art auf drei parallele Ebenen verteilen:

$$10 = 3 + 3 + 4 = 4 + 4 + 2.$$

Wären in einer Ebene 5 Punkte, dann würde in dieser Ebene nach Satz (2) (b) ein Set enthalten sein. Es gibt also eine Ebene  $e_1$ , die maximal 2 oder 3 Punkte  $X_1$  und  $X_2$  aus  $M$  enthält. Zumindest 7 weitere Punkte liegen außerhalb der Geraden  $g_1 = [X_1X_2]$ . Da genau 4 Ebenen durch  $g_1$  gehen, also neben  $e_1$  nur noch drei weitere Ebenen, können sich die 7 Punkte auf die 3 weiteren Ebenen nur wie folgt verteilen:

$$7 = 1 + 1 + 5 = 3 + 2 + 2 = 3 + 3 + 1.$$

In allen Fällen, sind mindestens 3 weitere Punkte in einer der drei Ebenen. Zusammen mit  $X_0$  und  $X_1$  sind das dann aber mindestens 5 Punkte in einer Ebene. Also enthält  $M$  ein Set – im Widerspruch zur Annahme.  $\square$

**Aufgabe 2:** Die  $|G_4| = 1080$  Sets in  $\mathbb{F}_3^3$  können in die vier disjunkten Mengen von  $i$ -Sets,  $i = 0, 1, 2, 3$ ,  $G_{4i}$  unterteilt werden. Bei einem  $i$ -Set seien genau  $i$  Koordinaten der drei Punkte gleich, etwa

$$G_{40} = \{\{A, B, C\} \mid A + B + C = 0, a_1 \neq b_1, a_2 \neq b_2, a_3 \neq b_3\}$$

und  $\{(1, 2, 0, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 2)\} \in G_{42}$ , weil die ersten und dritten Koordinaten übereinstimmen und die zweiten und vierten nicht.

Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente der vier Set-Mengen  $G_{40}, G_{41}, G_{42}, G_{43}$ .

**Satz 5** (a) In  $\mathbb{F}_3^n$  gibt es stets ein  $n$ -cap aus  $2^n$  Elementen

(b) Ein  $n$ -cap hat höchstens  $(3^n + 1)/2$  Elemente.

*Beweis.* (a) Die Menge  $M = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \{0, 1\}\}$  besteht aus  $2^n$  Elementen ohne ein Set. Denn mindestens ein Punkt muss mindestens eine Koordinate haben, die gleich 2 ist, damit ein Set vorliegt.

(b) (nach Lisa Sauermann, Festvortrag Bundesrunde 60. Mathematikolympiade 2021) Es sei  $M$  ein  $n$ -cap, also eine Menge ohne Set. Wir wollen zeigen, dass  $|M| \leq (3^n + 1)/2$ . Sei  $X$  ein Punkt aus  $M$ . Dann lassen sich nach Satz (1) die restlichen  $2k = 3^n - 1$  Punkte in  $k$  Paare  $\{(A_1, B_1), (A_2, B_2), \dots, (A_k, B_k)\}$  so einteilen, dass  $(A_i, B_i, X)$  immer ein Set bildet. Die neu gefundenen  $B_i$  sind dabei von allen vorangegangenen  $A_j$  und  $B_j$  verschieden. Da  $M$  kein Set enthält, kann es von allen Paaren immer nur eine Hälfte enthalten. Also gilt  $|M| \leq k + 1 = (3^n + 1)/2$ .

$\square$

## Literatur

[DM03] Benjamin Lent Davis and Diane Maclagan. The card game set. *The Mathematical Intelligencer*, 25(3):33–40, 2003

- [Mel11] Miriam Melnick. The joy of set. *Bard College at Simon's Rock*, 2011. <http://www.setgame.com/sites/default/files/teacherscorner/THE%20JOY%20OF%20SET.pdf>.
- [Rey14] Paola Y Reyes. The mathematics of the card game set. *Rhode Island College*, 2014.