Mathelager Februar 2023

Geometrie – einige schöne Theoreme und Beweise

Windischleuba, 13.02.2023

Dr. Matthias Hübner

matthias_huebner@t-online.de

https://www.linkedin.com/in/matthias-hübner-657b359/

Geometrie – einige schöne Theoreme und Beweise

- Summe der Innenwinkel im Dreieck = 180 Grad (Pi)
- Summe der Innenwinkel im n-Eck
- Summe der orientierten Außenwinkel
- Summe der Außenwinkel: Verallgemeinerung auf rektifizierbare Kurven
- 3 Mittelsenkrechte eines Dreiecks schneiden sich in 1 Punkt
- 3 Winkelhalbierende eines Dreiecks schneiden sich in 1 Punkt
- 3 Seitenhalbierende eines Dreiecks schneiden sich im Schwerpunkt
- 3 Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt
- Satz des Ceva
- Kreiswinkelsatz, Satz des Thales
- Pythagoras
- Sinus-Satz
- „Satz des Napoleon“
- die Geometrieaufgabe vom 21.01.
- Satz des Menelaos
- sin(a+b) = sina*cosb + cosa*sinb
- Inversion am Kreis ist konforme Abbildung

Summe der Innenwinkel im Dreieck

- Parallelenaxiom
- Gegenwinkel, Wechselwinkel

Summe der Innenwinkel im n-Eck

- Zurückführen auf Summe der Innenwinkel im Dreieck
- Am einfachsten: konvexe n-Ecke
- Bisschen komplizierte, gleiche Idee: Sternförmige n-Ecke
- Allgemeiner Fall: Zerlegung in konvexe oder sternförmige Bereiche
- Mehr als eine Umdrehung

Summe der orientierten Außenwinkel

- Drehungen um einen Punkt
- Drehungen um sich selbst
- Mehrfache Drehungen

- 8!

Verallgemeinerung auf rektifizierbare Kurven

- Rektifizierbarkeit, Differenzierbarkeit
- Endliche Länge – endlicher Faden
- Singularitären: “Geschwindigkeit” = 0, Ecken

3 Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich im Umkreismittelpunkt

- Der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks ABC ist ein Punkt, der von den 3 Ecken A, B, C des Dreiecks den gleichen Abstand (= Radius des Umkreises hat)
- Die Mittelsenkrechte MSR(AB) einer Strecke AB auf einer Ebene ist der Geometrische Ort ("Locus") aller der Punkte der Ebene, die den gleichen Abstand zu beiden Punkten haben. MSR(AB) auf einer Ebene ist eine Gerade

1. Beweisidee

- Die 2 Geraden MSR(AB) und MSR(BC) schneiden sich in 1 Punkt M_U. Dieser Punkt hat einmal denselben Abstand zu A und B, und andererseits denselben Abstand zu B und C. Also hat er denselben Abstand zu C und A. Also liegt er auf MSR(CA). Also schneiden sich die 3 Mittelsenkrechten in 1 Punkt.
- Was ist mit dem Extremfall MSR(AB) und MSR(BC) parallel?

2. Beweisidee

- Geometrischer Ort ("Locus") aller Kreise durch 2 Punkte A, B und benutze Stetigkeitsargument, dass ein Kreis durch den 3. Punkt C gehen muss.

3 Winkelhalbierenden eines Dreieckes schneiden sich in 1 Punkt

- Der Inkreismittelpunkt eines Dreiecks ABC ist ein Punkt, der von den 3 Seiten des Dreiecks den gleichen Abstand (= Radius des Inkreises hat)
- Die Winkelhalbierende WH(CAB) des Winkels bei A ist der Geometrische Ort ("Locus") aller der Punkte der Ebene, die den gleichen Abstand zu den Strahlen AB, AC haben. WH(CAB) ist eine Gerade

1. Beweisidee

- Die 2 Geraden WH(CAB) und WH(ABC) schneiden sich in 1 Punkt M_I. Dieser Punkt hat
  - denselben Abstand zu den Strahlen AB und AC
  - denselben Abstand zu den Strahlen BC und BA
  - Also hat M_I auch denselben Abstand zu den Strahlen CA (= Strahl AC) und CB (= Strahl BC). Also liegt M_I auch auf WH(BCA). Also schneiden sich die 3 Winkelhalbierenden in 1 Punkt.
- Was ist mit dem Extremfall WH(CAB) und WH(ABC) parallel?

2. Beweisidee

- Geometrischer Ort ("Locus") aller Kreise, die 2 Strahlen, die von einem Punkt ausgehen, berühren, und Stetigkeitsargument

- Verhältnis der Seiten-Abschnitte, wo eine Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite schneidet. Später Anwendung für Umkehrung des Satzes von Ceva
- Mit r_I Radius des Inkreises gilt Flächeninhalt $A = r_I * (a+b+c) / 2$

3 Seitenhalbierende eines Dreiecks schneiden sich im Schwerpunkt

- Physikalische Sichtweise: Schwerpunkt, auch Massenmittelpunkt genannt
- In dieser Form auf beliebig viele Punkte verallgemeinerbar
- Auch auf unendlich viele Punkte – dann mit einem (z.B. Borel-)Maß

Für 3 Punkte gleicher Masse auf den Ecken eines Dreiecks

- Seitenverhältnisse 1:1 auf 1 Seite
- 1:2 und 1:3 aur Seitenhalbierenden

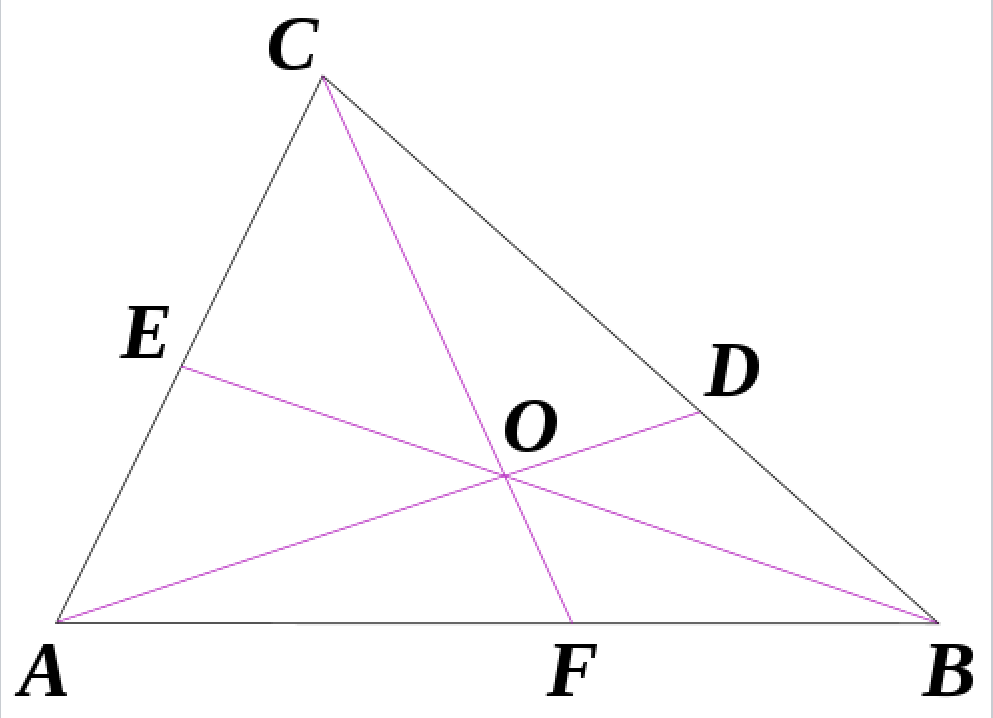
Höhen schneiden sich in 1 Punkt

- Schöne Anwendung für Umkehrung des Satzes von Ceva (next slide)

Satz des Ceva

- Beweis über Flächeninhalte

Die Umkehrung des Satzes von Ceva ist fast noch interessanter: Wenn die 3 Verhältnisse der Streckenabschnitte die angegebene Gleichung erfüllen, dann schneiden sich die 3 Linien in 1 Punkt.



Satz von Ceva

$$O = AD \cap CF \cap BE \Rightarrow \frac{|AF| \cdot |BD| \cdot |CE|}{|AE| \cdot |BF| \cdot |CD|} = 1$$

- Anwendung auf 3 Winkelhalbierende
- Anwendung auf 3 Seitenhalbierende
- Anwendung auf 3 Höhen

Kreiswinkelsatz (Zentriwinkelsatz), Umfangswinkelsatz (Peripheriewinkelsatz), Satz des Thales

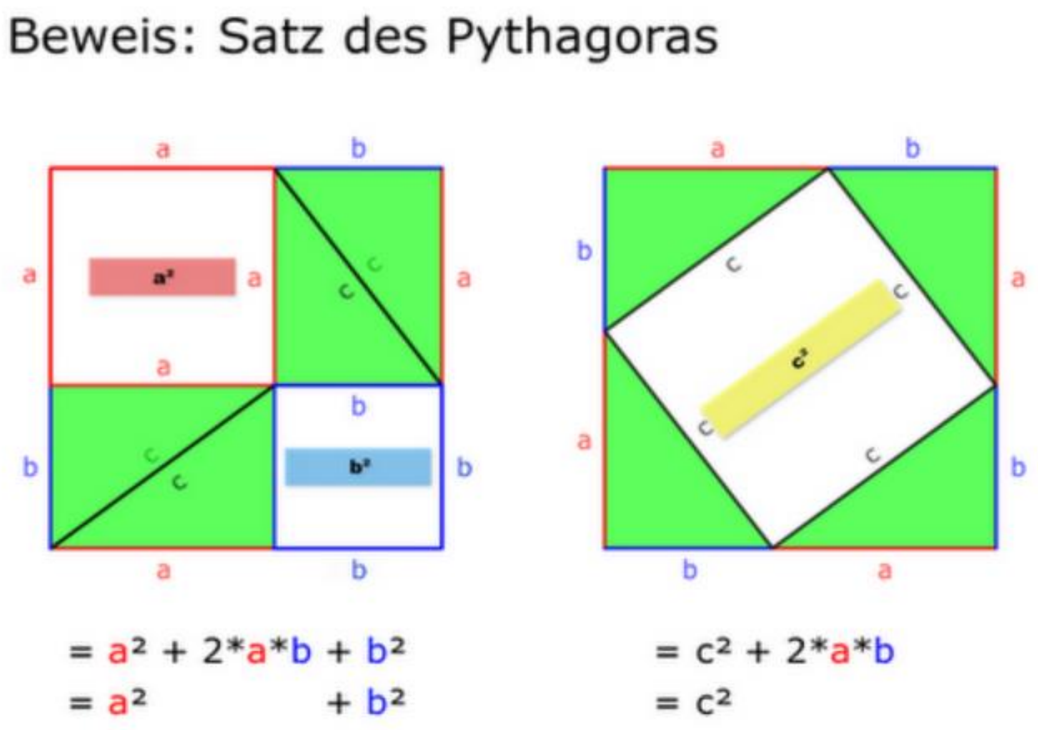
- Der Mittelpunktswinkel (Zentriwinkel) eines Kreisbogens ist doppelt so groß wie einer der zugehörigen Umfangswinkel (Peripheriewinkel).

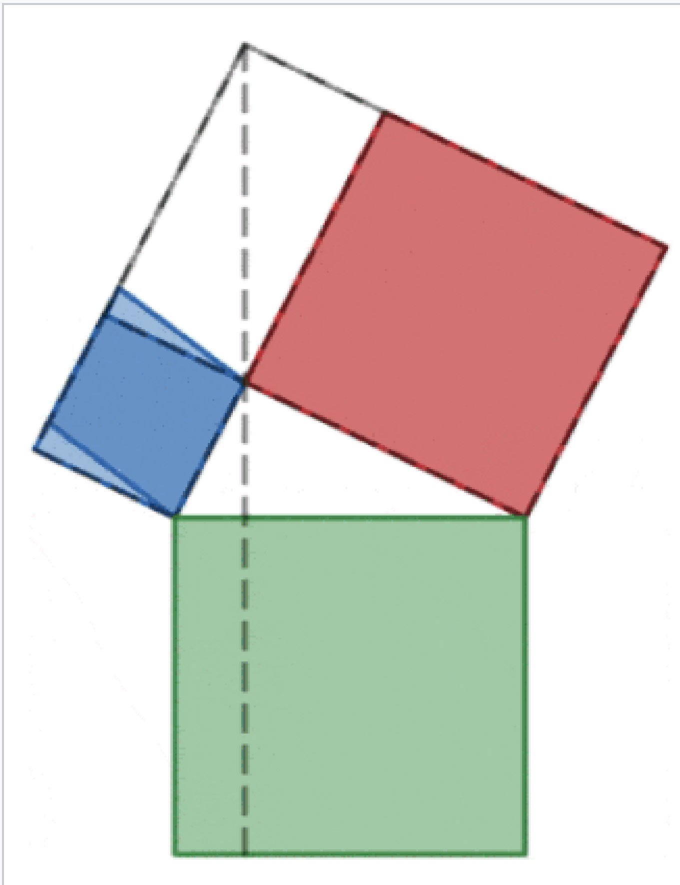
- Kritische Hilfslinie
- “Andere Seite”, gegenüberliegende Winkel im Sehnenviereck

- Der Umfangswinkelsatz ist eine unmittelbare Konsequenz des Kreiswinkelsatzes: Jeder Umfangswinkel ist nach dem Kreiswinkelsatz halb so groß wie der Mittelpunktswinkel (Zentriwinkel). Also müssen alle Umfangswinkel gleich groß sein.
- In einem Sehnenviereck: gegenüberliegende Peripheriewinkel addieren sich zu 180 Grad.

Pythagoras

- Hier und heute 4 Beweise (angeblich gibt es Hunderte)
- 1. Quadrat Seite c, c^2 = 4 * ab/2 + (b-a)^2
- 2. c = b cos(alpha) + a cos (beta)





Scherung der Kathetenquadrate

Inverser Satz des Pythagoras

- Höhe h, 2 Katheten a und b

$$1 / h^2 = 1 / a^2 + 1 / b^2$$

Sinus-Satz

- Verbindung zum
- 1. Umkreis
- 2. Kreiswinkelsatz

- a = 2r sin (alpha)
- b = 2r sin (beta)
- c = 2r sin (gamma)

Satz des Menelaos

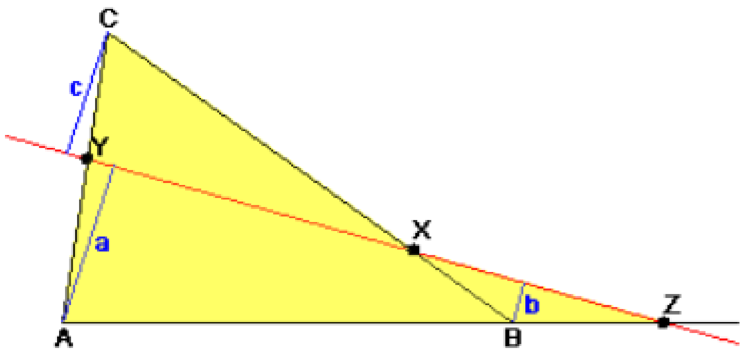
Der Satz von Menelaos lässt sich mit Hilfe des Strahlensatzes beweisen. Man betrachtet drei Lote auf die gegebene Gerade, die von den Ecken A, B und C ausgehen. Die Längen der Lotstrecken seien mit a, b und c bezeichnet.

Aus dem Strahlensatz erhält man folgende Verhältnisgleichungen:

$$\overline{AZ} : \overline{BZ} = a : b$$

$$\overline{BX} : \overline{CX} = b : c$$

$$\overline{CY} : \overline{AY} = c : a$$



Multipliziert man diese drei Gleichungen miteinander, so ergibt sich

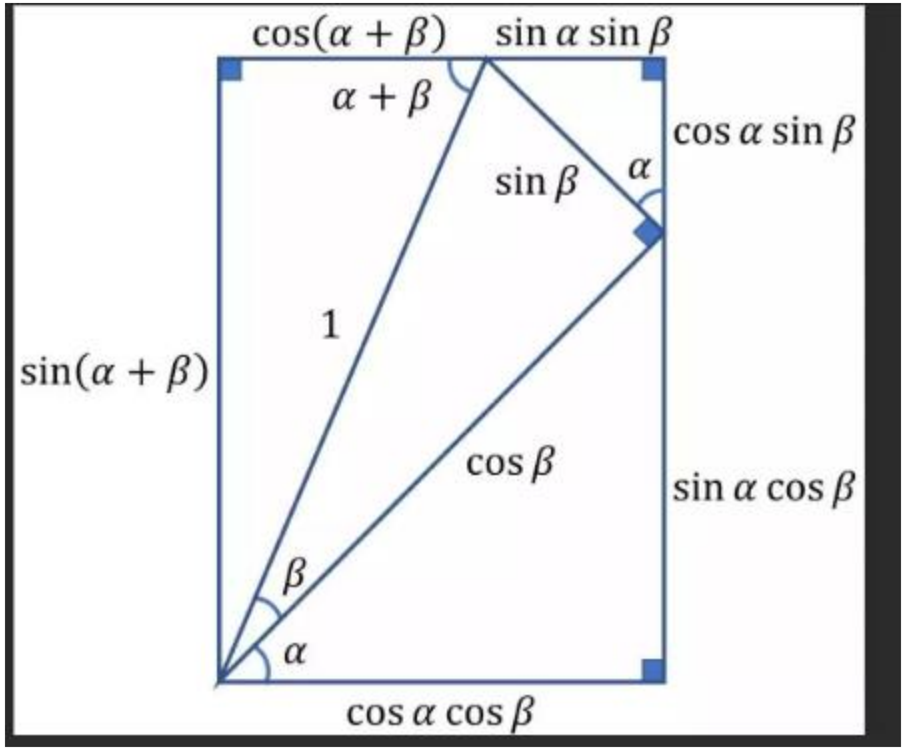
$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = \frac{a \cdot b \cdot c}{b \cdot c \cdot a} = 1$$

und weiter (durch Multiplikation mit dem Nenner)

$$\overline{AZ} \cdot \overline{BX} \cdot \overline{CY} = \overline{AY} \cdot \overline{BZ} \cdot \overline{CX}.$$

sin(alpha + beta) = sin alpha * cos beta + cos alpha * sin beta

- Weg über Eulersche Formel ist einfach, aber meines Erachtens nicht sehr schön, weil nicht geometrisch! Aber dafür gut zu merken.
- Hier ein wunderschöner geometrischer Beweis



sin alpha < alpha < tan alpha für 0 < alpha < pi/2 (im Bogenmaß!)

- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

- Zeige geometrisch über Flächeninhalte von gleichseitigen Dreicken mit 1 Punkt im Zentrum des Kreises

$\sin a < 2\sin(a/2) < 4\sin(a/4) < 8\sin(a/8) < \ldots$

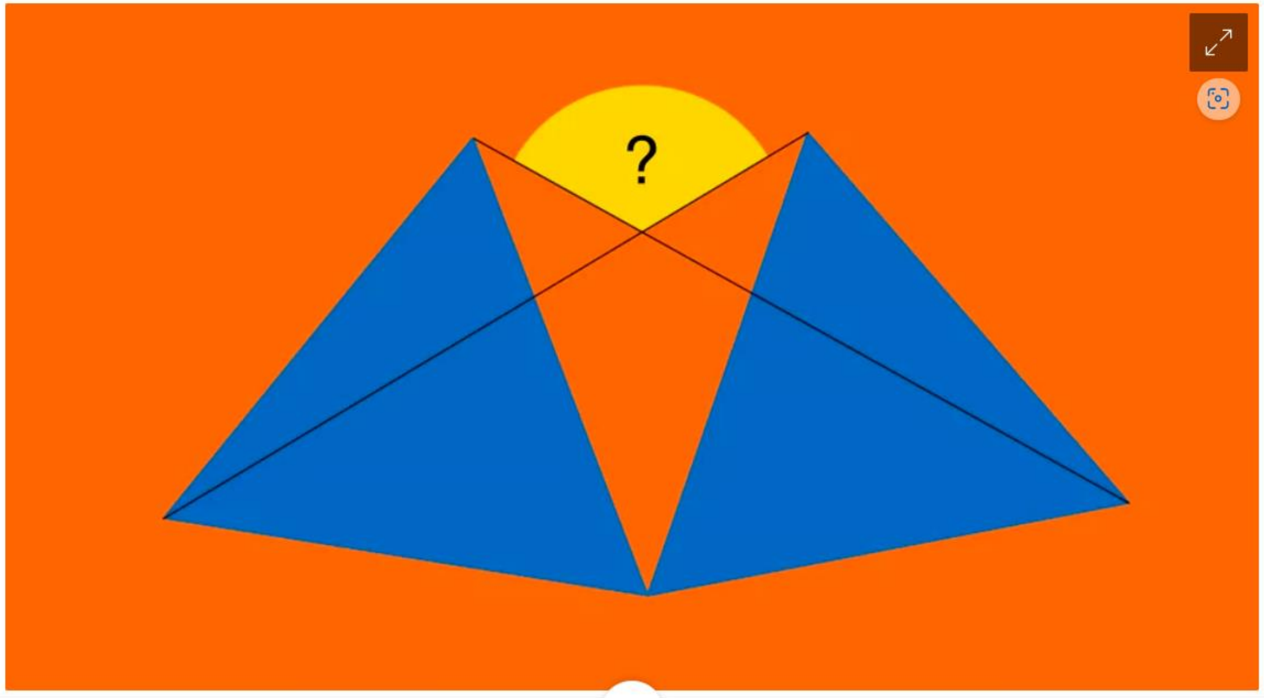
Limes $\rightarrow$ $\ldots a$ $\leftarrow$ Limes

$< \ldots 4\tan(a/4) < 2\tan(a/2) < \tan a$

[Wie groß ist der Winkel? - Rätsel der Woche - DER SPIEGEL]()

Gegeben sind zwei gleich große, gleichseitige Dreiecke. Sie berühren sich an ihren unteren Eckpunkten – siehe Zeichnung oben. Zwei schwarze Linien verbinden die äußeren Eckpunkte mit dem oberen Eckpunkt des jeweils anderen Dreiecks.

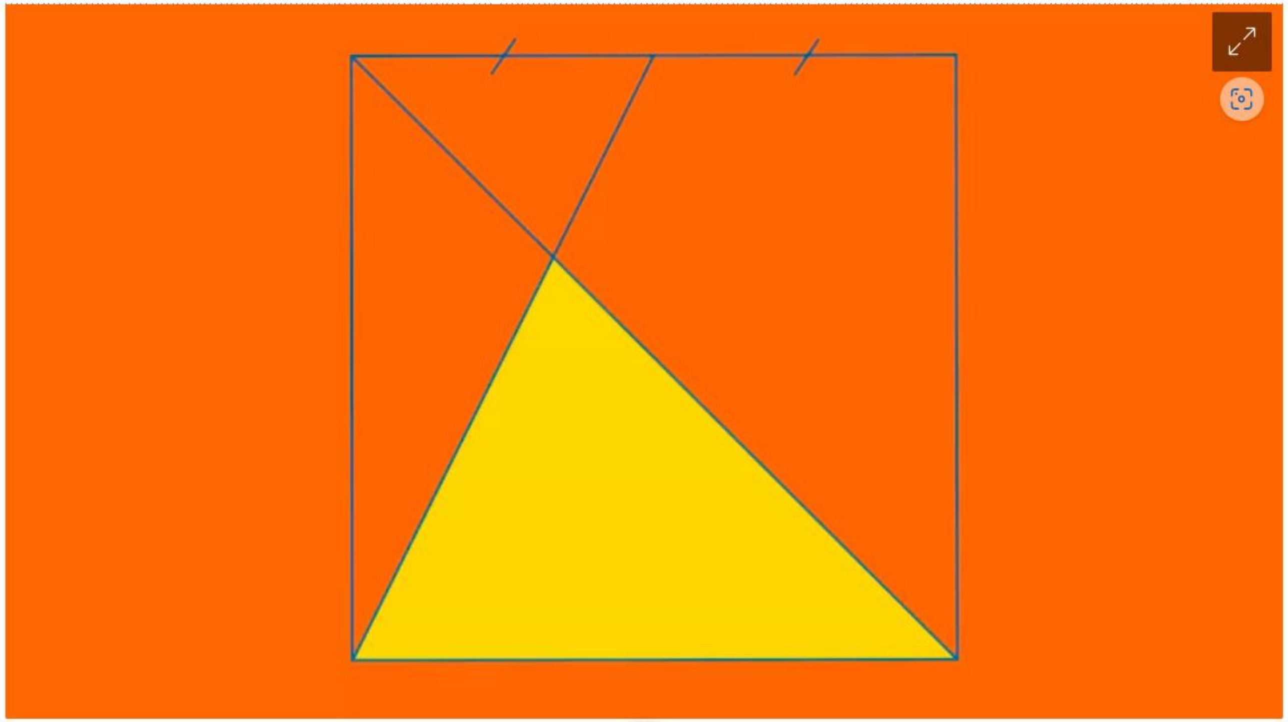
- Zeigen Sie, dass der gelb hervorgehobene Winkel, in dem sich beide Linien schneiden, immer gleich groß ist, egal wie die beiden Dreiecke zueinander gekippt sind!
- Wie groß ist dieser Winkel?



Sehr einfach, wenn man den „Hilfskreis“ sieht

Wie groß ist das gelbe Dreieck? - Rätsel der Woche - DER SPIEGEL

- In ein Quadrat sind zwei Strecken eingezeichnet. Die eine verbindet einen Eckpunkt mit dem Mittelpunkt einer anderen Seite, bei der anderen handelt es sich um eine gewöhnliche Diagonale – siehe Skizze
- Beide Strecken und die untere Seite des Quadrats umschließen ein Dreieck, das in der Zeichnung gelb hervorgehoben ist.
- Wie groß ist die Fläche dieses Dreiecks im Verhältnis zur Fläche des Quadrats?



- Strahlensatz!

Wie schnell sind die beiden Züge - Rätsel der Woche - DER SPIEGEL

Zwei Züge starten zum selben Zeitpunkt in A und B und fahren in entgegengesetzter Richtung nach B beziehungsweise A. Beide Züge fahren mit unterschiedlicher, aber konstanter Geschwindigkeit.

Nachdem sich beide Züge begegnet sind, braucht der schnelle ICE noch genau eine Stunde bis zum Ziel. Der langsamere Regionalzug benötigt hingegen noch vier Stunden.

Wie ist das Verhältnis der

Geschwindigkeiten der beiden Züge?

Ist das Geometrie?

Na klar: Zeichne Diagramm

- x-Achse Ort der Züge, A links, B rechts
- Y-Achse Zeit (also anders als üblich)
- 2x Strahlensatz und 1 Wurzel…

Inversion am Kreis ist konforme Abbildung

- Konform heißt: Winkel werden infinitesimal – bis auf das Vorzeichen! - in dieselben Winkel abgebildet
- Das Vorzeichen kehrt sich, die Abbildung z -> 1/conj(z) ist antiholomorph in der komplexen Zahlenebene.
- Kreise werden auf Kreise abgebildet – warum?
- 1. Führe "Kreis" in rechte Winkel über: Satz des Thales
- 2. Zeige, dass die 3 Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck "im Thales-Halbkreis" in die Gleichen Winkel transformiert werden.
- 3. Umkehrung des Satzes des Thales: der geometrische Ort aller Punkt mit einem rechten Winkel über einer Strecke in beiden Richtungen (links und rechts von der Strecke) ist ein Kreis

Die Geometrieaufgabe vom 21.01.

- Aufgabe 2: (7 Punkte)
- Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Die Tangente des Umkreises in A schneide die Gerade BC in einem
- Punkt P. Wir bezeichnen die Lotfuspunkte von P auf die Geraden AB und AC mit Q und
- R. Man beweise, dass $BC \perp QR$

Satz des Napoleon

[200 Jahre französische Revolution. Problem und Satz von Napoleon mit Variationen. (uni-muenchen.de)](#)

- 2 Drehstreckungen
- Drehung um 30 Grad
- Streckung um Wurzel(3)

20 DdM 1, 1990 (15–29)

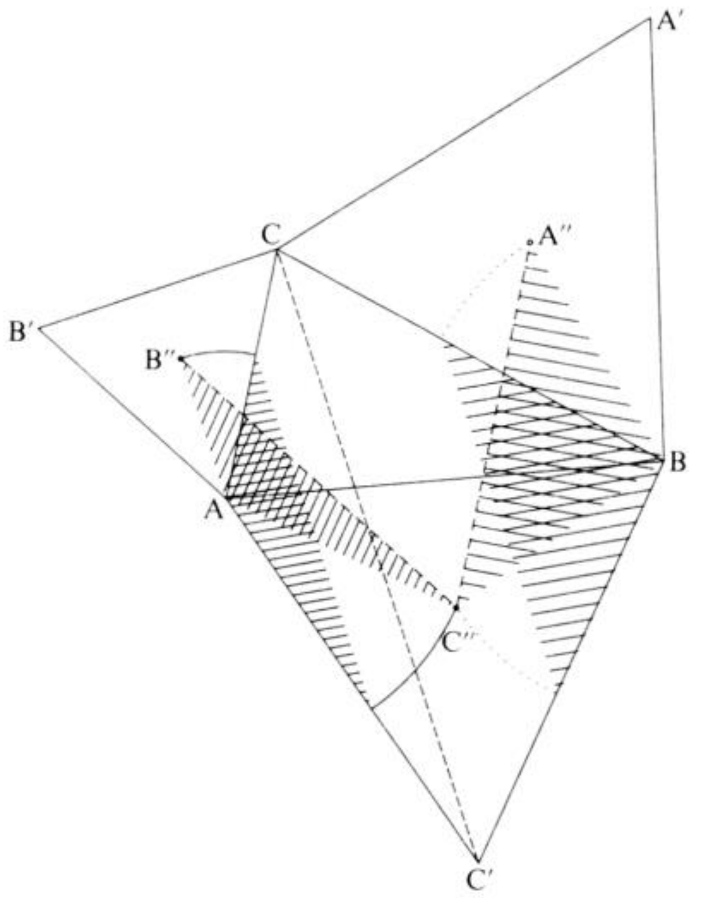


Fig. 3

Schöne Geometrie-Literatur

- Das gesamte Internet (Suche nicht nur über Google)

- [elementare_geometrie.pdf (uni-bielefeld.de)]

- [geometrie.dvi (uni-augsburg.de)]