Korrespondenzzirkel Mathematik Klasse 6, 2000/2001
1.Serie

Aufgabe 1: Ein Paar (p, q) von Primzahlen heißt „Primzahlzwilling“, wenn $q - p = 2$ gilt. So ist z. B. $(11, 13)$ ein Primzahlzwilling.
a) Gib drei weitere Primzahlzwillinge an!
b) Warum muss die Summe $p + q$ der einzelnen Primzahlen bei allen Primzahlzwillingen immer durch 4 teilbar sein?
c) Beweise, dass die Summe $p + q$ sogar immer durch 12 teilbar ist, wenn p und q größer als 3 sind!
d) Drei Primzahlen p, q und r heißen „Primzahldrilling“, wenn $r - q = q - p = 2$ gilt. Zeige, dass $(3, 5, 7)$ der einzige Primzahldrilling ist!

Aufgabe 2: Eine altrömische Aufgabe aus dem 2. Jahrhundert lautet:
Ein Sterbender spricht: „Wenn meine Frau einen Sohn gebiert, so soll ihm $2/3$ des Erbes gehören und ihr $1/3$. Wenn aber eine Tochter geboren wird, so sei $1/3$ des Erbes ihr und $2/3$ meiner Frau.“
Es wurden Zwillinge geboren, ein Sohn und eine Tochter. Welche Aufteilung des Erbes wird dem Vermächtnis des Verstorbenen am besten gerecht?

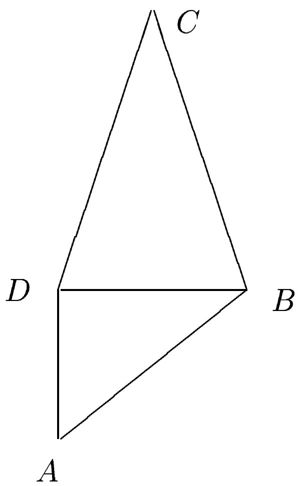
Aufgabe 3: Von einem Viereck $ABCD$ sei folgendes bekannt:

(1) Die Seite $\overline{AB}$ ist $8\,\mathrm{cm}$ lang.

(2) Es gilt $\overline{AD} = \overline{BD}$.

(3) Es gilt $\overline{BC} = \overline{CD}$.

(4) Der Winkel $\angle ADB$ hat die Größe $90°$.



a) Welche Länge hat der Umfang des Dreiecks BCD, wenn der Umfang des Vierecks $ABCD$ $20\,\mathrm{cm}$ beträgt?
b) Welchen Flächeninhalt besitzt das Viereck $ABCD$, wenn der Winkel $\angle BCD$ ein rechter ist?
c) Zeichne in das Viereck die Diagonale $\overline{AC}$ ein. Kannst Du nun die entstandene Figur ohne abzusetzen in einem Zuge zeichnen (ohne eine Strecke doppelt zu durchlaufen)? Begründe!

Aufgabe 4: Beim Schachspiel dürfen die Türme auf den 64 Feldern des Schachbretts nur senkrecht oder waagerecht bewegt (gezogen) werden. Stehen zwei Türme in derselben Reihe, so kann der eine den anderen schlagen.
a) Nummeriere die 64 Felder des Schachbretts fortlaufend von 1 bis 64 durch, das heißt, die erste Waagerechte von 1 bis 8, die zweite Waagerechte von 9 bis 16 usw. Stelle anschließend 8 Türme so auf das Spielfeld, dass sie einander nicht schlagen können. Berechne nun die Summe aller Zahlen, die auf den von den Türmen besetzten Feldern stehen! Wie groß ist diese Summe?
b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, auf dem Schachbrett 8 Türme so aufzustellen, dass sie einander nicht schlagen können?
c) Beweise, dass bei allen diesen Möglichkeiten, die in Aufgabe a) ermittelte Summe stets dieselbe ist!

Korrespondenzzirkel Mathematik Klasse 6, 2000/2001
Lösungen der 1.Serie

Lösung zu 1. (12 Punkte) a) (1 Punkt) Möglich wären z. B. $(17, 19)$, $(29, 31)$, $(41, 43)$ und $(107, 109)$.
b) (4 Punkte) Die Zahl 2 gehört zu keinem Primzahlzwilling. Die beiden Zahlen eines Primzahlzwillings sind also immer ungerade. Die Summe der beiden Zahlen eines Primzahlzwillings ist so groß, wie das Doppelte der zwischen den beiden Primzahlen liegenden *geraden* Zahl. Das Doppelte einer geraden Zahl ist aber immer durch 4 teilbar.
c) (4 Punkte) Von drei beliebigen aufeinanderfolgenden Zahlen ist stets genau eine durch 3 teilbar, genau eine lässt den Rest 1 bei der Division durch 3 und genau eine lässt den Rest 2 bei der Division durch 3. Da nun p und q Primzahlen sind, die nicht durch 3 teibar sind, muss die Zwischenzahl $m = p + 1 = q - 1$ durch 3 teilbar sein. Also ist auch die Summe $p + q = 2m$ durch 3 teilbar. Wegen b) ist sie auch durch 4 teilbar, also muss sie insgesamt durch 12 teilbar sein.
d) (3 Punkte) Von drei beliebigen *ungeraden* aufeinanderfolgenden Zahlen ist stets genau eine durch 3 teilbar: Ist die ungerade Zahl u selbst nicht durch 3 teilbar, so lässt sie den Rest 1 oder 2. Dann ist aber die folgende ungerade Zahl $u + 2$ bzw. die übernächste ungerade Zahl $u + 4$ durch 3 teilbar. Da 2 schon zu keinem Primzahlzwilling gehört, sind die Zahlen eines Primzahldrillings drei aufeinanderfolgende ungerade Zahlen. Von ihnen ist eine durch 3 teilbar. Die einzige durch 3 teilbare Primzahl ist aber die 3 selbst. Somit ist $(3, 5, 7)$ der einzige Primzahldrilling.

Lösung zu 2. (6 Punkte) Bezeichnet man die Erbteile von Frau, Sohn und Tochter mit F, S bzw. mit T, so lautet das Vermächtnis:

$$S : F = 2 : 1 \quad \text{und} \quad F : T = 2.$$

Stellt man dies um, so ergibt sich $S = 2F$ und $F = 2T$. Das ganze Erbe – wir setzen es gleich 1 – wird unter Frau, Sohn und Tochter also wie folgt aufgeteilt:

$$1 = S + F + T = 2F + F + T = 3F + T = 6T + T = 7T.$$

Hieraus ergibt sich $T = \frac{1}{7}$ und mit den obigen beiden Gleichungen $F = \frac{2}{7}$ und $S = \frac{4}{7}$. Also bekommt die Tochter ein Siebtel, die Mutter zwei Siebtel und der Sohn vier Siebtel des Erbes.

Lösung zu 3. (8 Punkte) a) (4 Punkte) (nach Dominique Alfermann, ohne Pythagoras lösbar!) Wegen $\overline{AD} = \overline{BD}$ ist die Länge des Streckenzuges $ADCB$ gleich dem Umfang des Dreicks BDC. Nun ist aber diese Länge $\overline{AD} + \overline{DC} + \overline{CB} = \mathrm{Umfang}(ADCB) - \overline{AB} = 20\mathrm{cm} - 8\mathrm{cm} = 12\mathrm{cm}$.
(Bemerkung: Die Zahl $18\mathrm{cm}$ – jetzt durch $20\,\mathrm{cm}$ ersetzt – ist in der Aufgabenstellung falsch gewählt, da das Dreieck BCD dann nicht konstruierbar ist – die Dreiecksungleichung $2\overline{BC} > \overline{BD}$ ist nicht erfüllt. Das hat Thomas Backhaus richtig erkannt. Der Umfang des Vierecks sollte mindestens $19{,}32\mathrm{cm}$, genauer $8(\sqrt{2} + 1)$, sein. Dann ist die obige Überlegung genauso anwendbar.)

b) (3 Punkte) Dieser Aufgabenteil ist *unabhängig* von a), die Voraussetzung über den Umfang von $ABCD$ ist aufgehoben, dafür kommt eine andere Voraussetzung 'rein.
Zeichnet man im Dreieck ABD die Höhe von DH auf $\overline{AB}$ ein, so entstehen 3 kongruente Teildreiecke, DAH, DBH und DBC, da der Winkel $\angle BCD$ ein rechter ist. Die Seite $\overline{AB}$ wird dabei in zwei $4\mathrm{cm}$ lange Teilstreccken $\overline{AH} = \overline{HB} = 4\mathrm{cm}$ zerlegt. Zwei Teildreiecke bilden ein Quadrat mit dem Flächeninhalt $16\mathrm{cm}^2$. Die 3 Teildreiecke haben also den Flächeninhalt $\frac{3}{2} \cdot 16\mathrm{cm}^2 = 24\mathrm{cm}^2$.

c) (1 Punkt) Den meisten war der folgende Satz bekannt:

> Eine Figur lässt sich genau dann in einem Zuge durchlaufen, wenn die Anzahl der Knotenpunkte, von denen eine ungerade Kantenzahl ausgeht 0 oder 2 ist.

Wir beweisen diese Aussage. Die (beliebig gegebene) Figur möge sich in einem Zuge zeichnen lassen (ohne abzusetzen und ohne eine Kante doppelt zu durchlaufen). Jeder solche Weg hat genau einen Anfangsknoten, sagen wir A, einen Endknoten B und Zwischenknoten. Natürlich kann auch $A = E$ gelten. Jeder Zwischenknoten hat aber eine *gerade* Anzahl von Kanten, da zu jeder zum Knoten hinführenden Kante auch eine wegführende Kante gehören muss (Zwischenknoten). Es darf also höchstens 2 Knoten geben, von denen eine ungerade Anzahl von Kanten ausgeht, nämlich A und E. Liegen genau zwei ungerade Knoten vor, so ist der eine Anfangs- und der andere Endpunkt des Weges. Die Situation, dass genau ein ungerader Knoten auftritt, kann nicht eintreten. Liegt gar kein ungerader Knoten vor, so kann jeder Punkt Ausgangspunkt sein, er ist dann auch Endpunkt.
Da die in der Aufgabe c) gegebene Figur vier ungerade Kanten hat, lässt sie sich nach dem obigen Satz nicht in einem Zuge zeichnen.

Lösung zu 4. (10 Punkte) (nach Dominique Alfermann) a) (1 Punkt) Die Summe beträgt 260, wie man sich an einem Beispiel überlegt.
b) (4 Punkte) Wir wollen annehmen, dass alle Türme *dieselbe* Farbe haben und nicht voneinander unterscheidbar sind. Weil in jeder Spalte genau ein Turm stehen muss, kann man links beginnen und hat in der ersten Spalte 8 Möglichkeiten, den Turm zu setzen. In der zweiten Spalte ist dann bereits ein Feld gesperrt, es bleiben nur noch 7 Möglichkeiten, in der dritten Spalte nur noch 6 usw. bis schließlich in der letzten Spalte nur noch eine Möglichkeit übrig ist, einen Turm zu setzen. Damit hat man insgesamt

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 40320$$

Möglichkeiten, 8 Türme auf dem Schachbrett so zu platzieren, dass sie einander nicht schlagen können.
c) (5 Punkte) (erste Lösung) Den Spalten des Schachbretts werden die Nummern 1 bis 8 und den Zeilen die Nummern 0 bis 7 zugeordnet. Dann ist die Nummerierung der 64 Felder in Form von Summen möglich, wie es in der Zeichnung angegeben ist.

$1+0\cdot 8$	$2+0\cdot 8$	$3+0\cdot 8$	$4+0\cdot 8$	$5+0\cdot 8$	$6+0\cdot 8$	$7+0\cdot 8$	$8+0\cdot 8$
$1+1\cdot 8$	$2+1\cdot 8$	$3+1\cdot 8$	$4+1\cdot 8$	$5+1\cdot 8$	$6+1\cdot 8$	$7+1\cdot 8$	$8+1\cdot 8$
$1+2\cdot 8$	$2+2\cdot 8$	$3+2\cdot 8$	$4+2\cdot 8$	$5+2\cdot 8$	$6+2\cdot 8$	$7+2\cdot 8$	$8+2\cdot 8$
$1+7\cdot 8$	$2+7\cdot 8$	$3+7\cdot 8$	$4+7\cdot 8$	$5+7\cdot 8$	$6+7\cdot 8$	$7+7\cdot 8$	$8+7\cdot 8$

Weil in jeder Spalte und in jeder Zeile genau ein Turm steht, kann einerseits jeder Summand $1, 2, \ldots, 8$ und $0\cdot 8, 1\cdot 8, \ldots, 7\cdot 8$ nur genau einmal durch einen Turm besetzt werden. Andererseits muss tatsächlich jeder Summand auch genau einmal besetzt werden. Die Summe der besetzten Felder ist somit gleich immer die gleiche Summe

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 8 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 8 + \cdots + 7 \cdot 8 = 260.$$

Zweite Lösung zu c) mit Hilfe des Invarianzprinzips: I) Man überzeugt sich leicht davon, dass man jede der 40320 zulässigen Turmstellungen aus einer Anfangsturmstellung erhält, etwa alle Türme auf einer Diagonalen, durch mehrmaliges Anwenden der folgenden Vertauschung. Man wähle zwei beliebige Türme aus, die sich in gegenüberliegenden Eckpunkten eines gedachten Rechtecks befinden. Nun werden die Türme gerade auf die beiden Endpunkte der *anderen* Diagonalen dieses Rechtecks gesetzt. Durch diese Operation wird offensichtlich wieder eine zulässige Turmstellung erzeugt, da die beiden Türme dieselben Spalten und Zeilen abdecken wie vorher; sie bedrohen sich nach wie vor nicht gegenseitig. Schrittweise lassen sich alle zulässigen Turmstellungen damit erzeugen.

II) Die beiden Summen der Zahlen auf gegenüberliegenden Eckfeldern eines beliebig gewählten Rechtecks stimmen stets überein. Angenommen, die Türme stehen in den Punkten A und

C eines Rechtecks. Wandert nun der C-Turm in der oberen Zeile zurück auf die Position D, dann verringert sich die Zahl seines Feldes gerade um die Weglänge. Diese Weglänge wandert der A-Turm innerhalb seiner Zeile vorwärts; seine Zahl vergrössert sich genau um diese Weglänge. Also stimmen die beiden Summen überein.

Aus I) und II) und a) folgt, dass die Summe stets 260 ist.

Korrespondenzzirkel Mathematik Klasse 6, 2000/2001
2.Serie

Aufgabe 5: Ein Mann hat 7 Freunde. Der erste besucht ihn jeden Abend, der zweite jeden zweiten Abend, der dritte jeden dritten Abend usw. bis zum siebenten Freund, der jeden siebenten Abend erscheint. An einem Abend trafen sich alle 7 Freunde bei dem Mann.
(a) Wie viele Tage vergehen, bis sich wieder alle Freunde am gleichen Abend bei dem Mann versammeln?
(b) An diesen Abenden bewirtet sie der Gastgeber mit Wein. Alle stoßen paarweise miteinander an. Wie oft erklingen die Gläser?

Aufgabe 6: Ein Kraftfahrer startet sein Fahrzeug beim Kilometerstand $15951\mathrm{km}$. Er bemerkt, dass diese Zahl symmetrisch ist. Nach 2 Stunden zeigt der Kilometerzähler wieder eine Zahl an, die sich von beiden Seiten gleich liest. Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit fuhr das Fahrzeug während der zwei Stunden?
Ist das Ergebnis eindeutig?

Aufgabe 7: In einem Haus wohnen fünf Männer, drei davon verheiratet, zwei ledig. Interessant ist, dass keiner der fünf die gleiche Haarfarbe wie ein anderer hat, dagegen jedes Ehepaar gleichfarbiges Haar trägt. Es ist weiter bekannt:
(a) Herr Apel hat Naturlocken, die nicht schwarz sind, wogegen Frau Edel nicht rothaarig ist.
(b) Frau Tiedel versucht beim Ehekrach in der Familie mit den schwarzen Haaren zu vemitteln.
(c) Die dunkelblonde Frau unterhält sich gern und lange mit Frau Edel, wogegen der blonde Mann lieber mit Herrn Knobel Schach spielt.
(d) Herr Knobel und Herr Zabel sind befreundet, einer von ihnen ist ledig, einer von beiden ist blond.
Nun kannst Du sicher die folgenden Fragen beantworten:
Wer hat die Glatze? Wer hat die roten Haare?
(Hinweis: Wir wollen voraussetzen, dass Frauen keine Glatze haben!)

Aufgabe 8: Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB} = 8\,\mathrm{cm}$ und $\overline{CD} = 3,8\,\mathrm{cm}$ sowie den Schenkeln $\overline{AD} = 3,8\,\mathrm{cm}$ und $\overline{BC} = 4,8\,\mathrm{cm}$. Gib eine Konstruktionsbeschreibung an und zeige, dass das danach konstruierte Trapez tatsächlich die oben gestellten Bedingungen erfüllt!

Korrespondenzzirkel Mathematik Klasse 6, 2000/2001
Lösungen der 2.Serie

Lösung zu 5. (8 Punkte) a) (4 Punkte) Die kleinste Zahl, die angibt wie viele Tage vergehen müssen, bis sich wieder alle 7 Freunde gemeinsam versammeln muss durch $1, 2, 3, 4, 5, 6$ und 7 teilbar sein. Sie ist also das kleinste gemeinsame Vielfache dieser 7 Zahlen. Die Freunde treffen sich alle nach $\mathrm{kgV}(2, 3, 4, 5, 6, 7) = 3{\cdot}4{\cdot}5{\cdot}7 = 21{\cdot}20 = 420$ Tagen wieder.
b) (4 Punkte) Jede der 8 Personen kann mit 7 Freunden anstoßen. Dabei wird das Anstoßen des Freundes A mit dem Freund B doppelt gezählt, nämlich einmal von A aus und einmal von B aus. Deshalb erklingen die Gläser $\frac{1}{2}{\cdot}8{\cdot}7 = 28$ Mal.

Lösung zu 6. (6 Punkte) Die nächsten symmetrischen Kilometerstände und die entsprechenden Durchschnittsgeschwindigkeiten sind in der nachstehenden Tabelle verzeichnet. Dabei benutzten wir die Formel für die Durchschnittsgeschwindigkeit: $v = \frac{s}{t}$, wobei s die gefahrene Wegstrecke und t die vergangene Zeit bezeichnen (bei uns ist stets $t = 2\,\mathrm{h}$).

Kilometerstand	gefahrene Strecke in km	Geschwindigkeit in $\mathrm{km/h}$
16061	110	55
16161	210	105
16261	310	155
16361	410	205

Das Ergebnis ist also nicht eindeutig. Größere Kilometerstände entfallen aber, da sie nicht sinnvoll sind.

Bemerkungen: Oft wurden unrealistische Geschwindigkeiten als Lösungen angegeben.

Lösung zu 7. (8 Punkte) Am besten lassen sich diese Aufgaben mit einer Tabelle lösen. Allerdings wird das dann für den Korrektor etwas unübersichtlich, die einzelnen Schlüsse zu verfolgen. Für den Löser ist es die beste Methode. Um dem Korrektor die Aufgabe zu erleichtern sollte man im Feld kennzeichnen, warum dies zutrifft bzw. ausgeschlossen ist. Dies wurde von Stefanie Höhne sehr gut gemacht.

(z) In einem Haus wohnen 5 Männer, drei davon verheiratet, zwei ledig.

	Apel	Edel	Tiedel	Zabel	Knobel	verheiratet
schwarz	– (a)	× 5	– (b)	– 1	– 3	× (b)
rot	× 9	– (a)	– 8	– 1	– 3	
dunkelblond	– 8	– (c)	× 7	– 1	– 3	× (c)
blond	– 1	– 1	– 1	× (c), (d)	– (c)	
Glatze	– (a)	– (a)	– (b)	– 1	× 2	
verheiratet	– 6, (z)	× (a)	× (b)	× 4, (d)	– 3	

Die Hinweise (a), (b), (c), (d) und (z) beziehen sich auf die Aussagen in der Aufgabe. Das – Zeichen schließt das Feld aus, wogegen das ×-Zeichen, das Zutreffen kennzeichnet. Ist in einer Zeile oder Spalte ein ×, so können in den anderen Feldern überall – Zeichen eingetragen werden (das gilt natürlich nicht für die Zeile/Spalte „verheiratet“). Die Zahlen, die in den Feldern stehen, zeigen die Reihenfolge des Schließens an, wobei mit (a), (b), (c), (d) begonnen wurde und dann weiter von 1 bis 8 geschlossen wurde.

Fazit: Herr Knobel hat eine Glatze und Herr Apel ist rothaarig.

Bemerkung: Oft wurde aus (d) geschlossen, dass der Ledige nicht blond ist oder umgekehrt der blonde verheiratet. Theoretisch möglich war auch, dass einer von beiden blond und ledig ist (was dann aber nicht zutraf).

Lösung zu 8. (8 Punkte) Zunächst ein paar prinzipielle Bemerkungen zu Konstruktionsaufgaben. Bei einer *geometrischen Konstruktion* (im mathematischen Sinne) hat man nur ein Lineal (ohne Zentimetereinteilung) und einen Zirkel zur Verfügung. Die Konstruktion besteht in einer Hintereinanderausführung von folgenden Schritten in beliebiger Reihenfolge:

- das Verbinden zweier Punkte zu einer Geraden,
- das Zeichnen eines Kreises zu einem vorgegebenen Mittelpunkt und einem Punkt auf seiner Peripherie (Kreislinie),
- das Bestimmen der Schnittpunkte zweier Geraden, zweier Kreise bzw. einer Geraden und eines Kreises.

Nur diese drei Operationen sind erlaubt! Selbst das Zeichendreieck ist entbehrlich. Versucht doch einmal zu einer gegebenen Gerade eine Parallele durch einen gegebenen Punkt zu konstruieren — nur mit Zirkel und Lineal! Erst wenn Ihr Euch davon überzeugt habt, dass es klappt, dürft Ihr das Dreieck zur Abkürzung dieser Parallelenkonstruktion wieder zu Hilfe nehmen.

Die Schritte, die im Grunde bei jeder Konstruktionsaufgabe durchzuführen sind lauten:

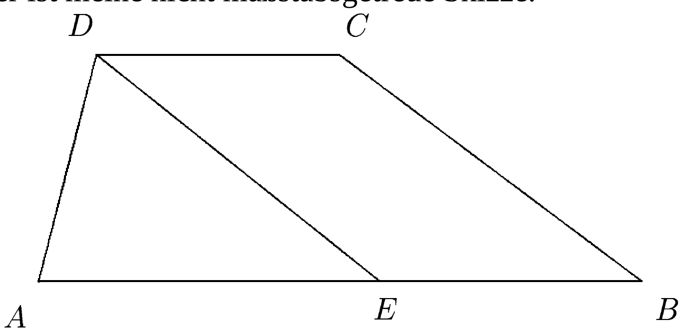
1. Skizze
2. Analyse

3. Konstruktion
4. Konstruktionsbeschreibung (nicht auf der Rückseite des Blattes!)
5. Beweis
6. Determination

Die Nützlichkeit einer *Skizze* sieht wohl jeder ein. Sie sollte stets genügend groß und allgemein sein (ein allgemeines Dreieck sollte also nicht gleichschenklig oder rechtwinklig skizziert werden). Die *Analyse* ist der wichtigste Schritt einer Konstruktion. Hier werden wichtige Hilfslinien in die Skizze aufgenommen, wesentliche Beziehungen zwischen den einzelnen gegebenen Stücken werden abgeleitet und notiert. Konstruierbare Teilfiguren werden erkannt. Alle gedanklich notwendigen Schritte zur Konstruktion muss die Analyse liefern.
Was in der *Konstruktion* geschieht ist allen klar. Die *Konstruktionsbeschreibung* soll alle in der Konstruktion durchgeführten Schritte in ihrer zeitlichen Reihenfolge beschreiben. Wichtig ist die Bezeichnung aller Hilfspunkte. Es sollten nur Grundkonstruktionen vorkommen (Schnittpunkte von Kreisen und Geraden bestimmen, Senkrechte in A auf g errichten, das Lot von A auf g fällen, die Parallele zu g durch A zeichnen, den Mittelpunkt einer Strecke bestimmen).
Im *Beweis* sollte man kurz begründen, warum die so konstruierte Figur tatsächlich den Anforderungen der Aufgabe genügt. Der Beweis stellt praktisch die Umkehrung der Analyse dar. Bei der Analyse muss man von der schon konstruierten Figur ausgehen und Fakten ableiten, beim Beweis soll man sich an die eigene Konstruktion halten und zeigen, dass diese korrekt ist.
In der *Determination*, auch Diskussion genannt, soll untersucht werden, ob die Konstruktion stets ausführbar ist und ob die konstruierte Figur bis auf Bewegungen eindeutig ist.

Genau genommen hätte ich die Aufgabe so formulieren müssen: Gegeben seien in der Zeichenebene eine Strecke $\overline{XY}$ der Länge $3,8\,\mathrm{cm}$, eine Strecke $\overline{ZU}$ der Länge $4,8\,\mathrm{cm}$ und eine Strecke $\overline{VW}$ von $8,0\,\mathrm{cm}$. Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB} = 8\,\mathrm{cm}$ und $\overline{CD} = 3,8\,\mathrm{cm}$ sowie den Schenkeln $\overline{AD} = 3,8\,\mathrm{cm}$ und $\overline{BC} = 4,8\,\mathrm{cm}$! Denn jetzt braucht Ihr tatsächlich keine Zentimetereinteilung auf dem Lineal mehr zu benutzen.

Hier ist meine nicht maßstäbsgetreue Skizze.



Analyse: Angenommen, $ABCD$ ist ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften. Dann sei E der Schnittpunkt der Parallelen zu BC durch D mit der Geraden AB. Offensichtlich ist dann $EBCD$ ein Parallelogramm und insbesondere ist $\overline{ED} = \overline{BC}$ und $\overline{EB} = \overline{CD}$. Damit sind vom Dreieck AED die Längen aller drei Seiten bekannt: $\overline{AE} = \overline{AB} - \overline{EB} = 8\,\text{cm} - 3,8\,\text{cm} = 4,2\,\text{cm}$, $\overline{ED} = \overline{BC} = 4,8\,\text{cm}$ und $\overline{AD} = 3,8\,\text{cm}$.

Die Konstruktion lasse ich aus drucktechnischen Gründen weg.

Konstruktionsbeschreibung: Wir konstruieren zunächst das Dreieck AED nach dem Kongruenzsatz SSS (Seite-Seite-Seite). Das heißt, wir zeichnen die Strecke $\overline{AE}$ der Länge $4,2\,\text{cm}$. Um A beschreiben wir einen Kreis mit dem Radius $3,8\,\text{cm}$, um E zeichnen wir einen Kreis mit dem Radius $4,8\,\text{cm}$. Einer der beiden Schnittpunkte dieser Kreise sei D. Die Verlängerung von $\overline{AE}$ über E hinaus um $3,8\,\text{cm}$ liefert den Punkt B. Dann verschieben wir ED parallel durch B und AB parallel durch D. Der Schnittpunkt der beiden Parallelen sei C. Dann ist $ABCD$ das gesuchte Trapez.

Beweis: Wegen $\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB} = 4,2\,\text{cm} + 3,8\,\text{cm} = 8\,\text{cm}$ hat $\overline{AB}$ die gewünschte Länge. Nach Konstruktion ist auch $\overline{DA} = 3,8\,\text{cm}$ gesichert. Wegen der beiden letzten Parallelverschiebungen ist $EBCD$ ein Parallelogramm. Also gilt $\overline{BC} = \overline{ED} = 4,8\,\text{cm}$ und $\overline{CD} = \overline{EB} = 3,8\,\text{cm}$, wie es die Aufgabenstellung fordert. Außerdem ist nach Konstruktion $AB \parallel CD$. Somit ist $ABCD$ ein Trapez mit den gewünschten Eigenschaften.

Determination: Wegen $3,8 + 4,2 > 4,8$ (eine Dreiecksungleichung für das Dreieck AED) ist das Dreieck AED konstruierbar. Nach dem Kongruenzsatz SSS ist es bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt. Der Punkt B ist eindeutig und die Parallelen zu AE durch D und zu ED durch B schneiden sich, da sich die Ausgangsgeraden schneiden. Somit ist $ABCD$ durch die gegebenen Stücke eindeutig bestimmt.

Bemerkung: Viele haben versucht, die Strecke $\overline{CD}$ „in die Kreise um A bzw. um B einzupassen". Das ist aber keine Grundkonstruktion!

Lösung zu 9. Beim Treffen hatte ich die folgende Aufgabe gestellt: Welche 5-stelligen Zahlen $1ab23$ sind durch 99 teilbar. Maria Fuchs hat alle 100 Zahlen durchprobiert und ist auf die *einzige* Lösung 17523 gekommen. Hier ist eine Lösung ohne Probieren.
Wegen der Teilbarkeitsregel mit der 9 muss die Quersumme $1+a+b+2+3 = a+b+6$ eine durch 9 teilbare Zahl sein, die aber, da a und b Ziffern sind kleiner gleich $9+9+6 = 24$ sein muss. Damit kommen also nur 9 und 18 in Frage also ist $a+b = 3$ oder $a+b = 12$. Wegen der Teilbarkeitsregel mit der 11 ist die alternierende Quersumme $3 - 2 + b - a + 1 = b - a + 2$ durch 11 teilbar, also $b - a = 9$ oder $a - b = 2$. Nun sind aber Summe und Differenz zweier Zahlen stets beide gerade oder beide ungerade. Damit gibt es nur die Kombinationen $a+b = 3$, $b-a = 9$ und $a+b = 12$, $a-b = 2$. Die erste Möglichkeit entfällt, da die Summe nicht kleiner als die Differenz sein kann. Somit verbleibt die zweite Möglichkeit. Bildet man die Summe der beiden Gleichungen, so hat man $2{\cdot}a = 14$ bzw. $a = 7$ und somit $b = 5$. Also ist 17523 die einzige Lösung.

Korrespondenzzirkel Mathematik Klasse 6, 2000/2001
3.Serie

Aufgabe 9: Ein Quader besitzt eine Oberfläche von $286\,\mathrm{cm}^2$. Zwei seiner Seitenflächen haben eine Fläche von $63\,\mathrm{cm}^2$ bzw. $35\,\mathrm{cm}^2$. Welches Volumen hat der Quader? Wie lang sind seine Kanten?

Aufgabe 10: Auf dem Jahrmarkt bietet ein Würfelbudenbesitzer folgendes Spiel an:

> Nach dem Einsatz von $1\,\mathrm{DM}$ sollst Du eine beliebige Zahl von 1 bis 6 zu Deiner „Glückszahl“ bestimmen. Anschließend darfst Du mit zwei normalen Spielwürfeln einmal würfeln. Erscheint Deine Glückszahl einmal, so bekommst Du das Doppelte Deines Einsatzes zurück, erscheint sie genau zweimal, so bekommst Du $5\,\mathrm{DM}$.

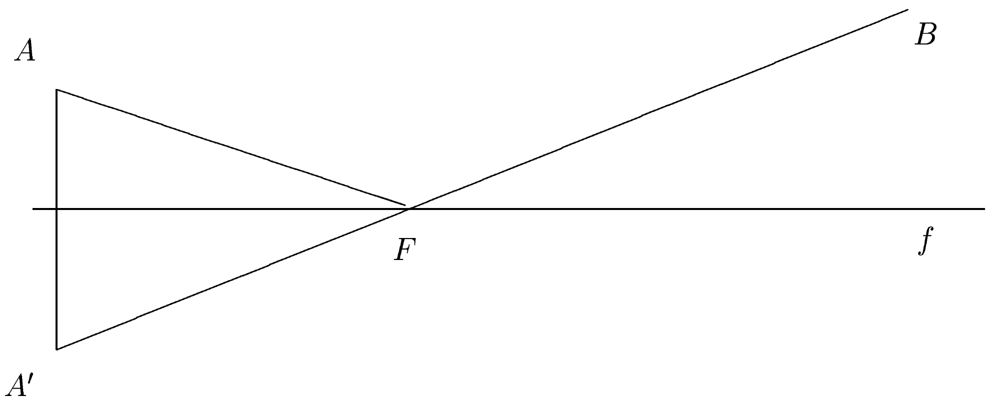
a) Untersuche die Chancenverteilung bei diesem Spiel!
b) Auf welches Ergebnis (Höhe des Gewinnns oder Verlustes) kann sich der Würdelbudenbesitzer am Ende einer Geschäftswoche einstellen, wenn er $\mathrm{DM}\,1000$ Einsatz kassiert?

Aufgabe 11: In einem fernen Land gab es vor langer Zeit ein berühmtes Orakel, aus dessen Mund man nicht eine Gottheit sondern sogar drei Gottheiten vernahm: den Gott der Wahrheit, der immer die Wahrheit sprach, den Gott der Lüge, der immer log und den Gott der Diplomatie, der manchmal log und manchmal die Wahrheit sprach. Sie antworteten gern auf die Fragen der Ratsuchenden. Allerdings waren sie äußerlich nicht zu unterscheiden, so dass keiner wusste, ob er mit dem Gott der Wahrheit, der Lüge oder der Diplomatie sprach.
Einmal fand sich jedoch ein Neugieriger, der sich vorgenommen hatte, das zu lösen, was die großen Weisen nicht vollbracht hatten. Er beschloß, jeden der Götter zu erkennen. Der Kühne betrat den Tempel und fragte den ganz links stehenden Gott: „Wer steht neben Dir?“. Die Antwort lautete: „Der Gott der Wahrheit.“ Da fragte der Mann den Gott in der Mitte, wer er sei. Dieser gab als Antwort: „Der Gott der Diplomatie.“ Schließlich fragte er den ganz rechts stehenden Gott, welcher Gott neben ihm stehe. „Der Gott der Lüge“, war dessen Antwort. „Jetzt ist alles klar!“, rief der Mann. Wie konnte er das aus den Antworten der drei Götter herausfinden?

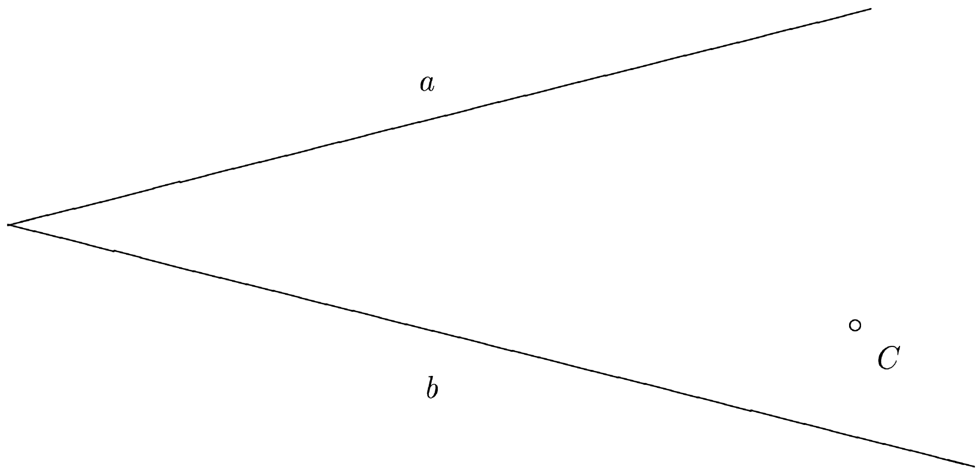
Aufgabe 12: Ein Reiter, der von Punkt A nach Punkt B will, muss an einem Fluss f sein durstiges Pferd tränken. Um den entstehenden Zeitverlust so gering wie möglich zu halten, suchte er einen solchen Punkt am Fluss, der den geringsten Umweg bedeutet. Der Reiter findet ihn durch folgende Überlegung: Auf einer Landkarte spiegelt er den Ort A am Fluss f und erhält dort den Punkt A'. Nun verbindet er den Punkt A' mit dem Punkt B und erhält den Punkt F am Fluss. Zu diesem Punkt lenkt er sein Pferd.
a) Begründe, dass dieser Punkt wirklich den kürzesten Weg liefert!
b) Nutze Deine Überlegungen zum Lösen der folgenden Aufgabe:

Jörg und Sven wollen ihre Kräfte messen. Sie befinden sich zwischen zwei Hauswänden a und b, die miteinander einen spitzen Winkel bilden. Vom Startpunkt C aus wollen sie zuerst zur Mauer a laufen und diese in einem Punkt A berühren. Von dort wollen sie zur Mauer b laufen und diese in einem Punkt B berühren und anschließend wieder zurück zum Startpunkt C laufen. Sicher hat derjenige einen Vorteil, der den kürzesten Weg findet.
Übernimm die Skizze auf Dein Lösungsblatt und begründe, für welche Punkte A und B dieser Weg am kürzesten ist!

a)



b)



Korrespondenzzirkel Mathematik Klasse 6, 2000/2001
Lösungen der 3.Serie

Lösung zu 10. (8 Punkte) Die Seitenlängen des Quaders seien mit a, b und c bezeichnet, wobei ich die Einheit cm bei Längen-, cm^2 bzw. cm^3 bei Flächen- bzw. Volumenangaben weglasse. Wir benutzen die Formel für die Oberfläche A und für das Volumen V eines Quaders. Die Formel für die Oberfläche kann man sich leicht überlegen: Der Quader hat 6 Seitenflächen, alles Rechtecke, von denen gegenüberliegende gleich groß sind.

$$A = 2(ab + bc + ca), \qquad V = abc. \tag{1}$$

Gegeben waren $A = 286$ und

$$ab = 63, \qquad bc = 35. \tag{2}$$

Die Bezeichnung der Kanten kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf diese Art einrichten. Setzt man dies in (1) ein, so hat man

$$286 = 2(63 + 35 + ca) = 196 + 2ca$$

und somit $2ca = 90$ bzw.

$$ca = 45. \tag{3}$$

Viele haben die richtige Lösung nun durch Probieren und Raten gefunden. Es gibt aber auch mehrere Rechenwege, die zum Ziel führen.
1.Weg: Wir multiplizieren die obigen Gleichungen (2) und (3) miteinander und ziehen dann die Quadratwurzel:

$$\begin{aligned} ab{\cdot}bc{\cdot}ca &= 63{\cdot}35{\cdot}45 \\ a^2b^2c^2 &= 9{\cdot}7{\cdot}5{\cdot}7{\cdot}5{\cdot}9 \\ V = abc &= 9{\cdot}5{\cdot}7 = 315. \end{aligned}$$

Das Volumen des Quader beträgt $315\,\mathrm{cm}^3$.

2.Weg (nach D. Alfermann) Wir stellen die Gleichungen (2) nach a bzw. nach c um und setzen die Ergebnisse $a = \frac{63}{b}$, $c = \frac{35}{b}$ in (3) ein: $\frac{35}{\cdot}63b^2 = 45$. Multipliziert man die letzte Gleichung mit b^2, dividiert durch 45 und zieht dann die Wurzel, so hat man $b^2 = 7^2$ bzw. $b = 7$. Setzt man dies in (2) ein, so erhält man $a = 9$ und $c = 5$. Das Volumen des Quaders beträgt also $V = 9{\cdot}5{\cdot}7\,\mathrm{cm}^3 = 315\,\mathrm{cm}^3$.

Lösung zu 11. (10 Punkte) Diese Aufgabe (und die Geometrieaufgabe) waren nur von wenigen Schülern richtig gelöst worden. Der erste Denkfehler bestand darin, dass die Zahl der möglichen Würfe mit 21 und nicht mit 36 angegeben wurde. Das Ergebnis $\{1, 2\}$ taucht aber in der Regel doppelt so häufig auf, wie das Ergebnis $\{1, 1\}$, da ja zwei mögliche Paare $(1, 2)$ und $(2, 1)$ dem einzelnen Paar $(1, 1)$ gegenüberstehen.
Da jeder Würfel 6 verschiedene Augenzahlen anzeigen kann und beide Würfel unabhängig voneinander fallen, gibt es also $6{\cdot}6 = 36$ mögliche Ergebnisse des Würfelns. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei 1 die Glückszahl.
a) Bei den 10 Ereignissen $(1, 2), (1, 3), \cdots, (1, 6)$ und $(2, 1), \cdots, (6, 1)$ muss der Würfelbudenbesitzer jeweils $2\,\mathrm{DM}$ bezahlen. Beim Ereignis $(1, 1)$ muss er $5\,\mathrm{DM}$ bezahlen. Da alle 36 Ereignisse gleichwahrscheinlich sind, erwartet der Budenbesitzer in 36 Spielen einen Einsatz von $36\,\mathrm{DM}$ und Ausgaben von $10{\cdot}2\,\mathrm{DM} + 1{\cdot}5\,\mathrm{DM} = 25\,\mathrm{DM}$. Bei 36 Spielen erwartet er also einen Gewinn von $36\,\mathrm{DM} - 25\,\mathrm{DM} = 11\,\mathrm{DM}$.
b) Mit der in a) ermittelten Quote kann sich der Würfelbudenbesitzer bei 1000 Spielen auf einen Gewinn von

$$1000{\cdot}\frac{11\,\mathrm{DM}}{36} \approx 305,55\,\mathrm{DM}$$

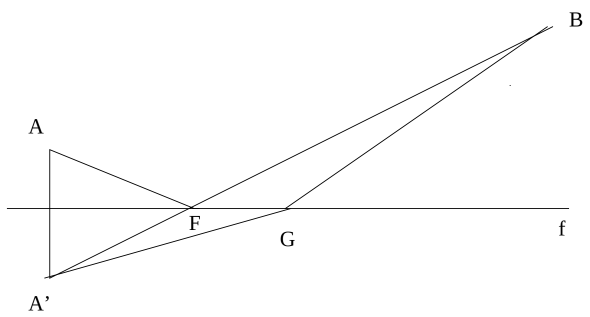
einstellen.

Lösung zu 12. (6 Punkte) Hier gab es viele verschiedene richtige Lösungen. Die Aussagen waren

Links: Neben mir steht der Gott der Wahrheit. (1)
Mitte: Ich bin der Gott der Diplomatie. (2)
Rechts: Neben mir steht der Gott der Lüge. (3)

Da es nur *einen* Gott der Wahrheit gibt, kann er wegen (1) nicht ganz links stehen. Der Gott der Wahrheit kann aber auch nicht in der Mitte stehen, weil er das dann auch in (2) sagen müsste. Also steht der Gott der Wahrheit ganz rechts und neben ihm in der Mitte also der Gott der Lüge, wegen (3). Somit bleibt für den linken Platz nur noch der Gott der Diplomatie. Tatsächlich stellt man dann fest, dass alle drei Aussagen den erwarteten Wahrheitsgehalt haben: Die Götter der Diplomatie und der Lüge lügen, der Gott der Wahrheit sagt die Wahrheit.

Lösung zu 13. (10 Punkte)



Voraussetzung: F ist der Schnittpunkt von BA' mit f, wobei A' das Bild von A bei der Spiegelung an f ist.
Behauptung: Der Weg $\overline{AF} + \overline{FB}$ ist minimal mit $F \in f$.
Beweis: Es sei G ein von F verschiedener Punkt auf f. Da A' der Bildpunkt von A bei der Spiegelung an f ist und G auf f liegt, gilt

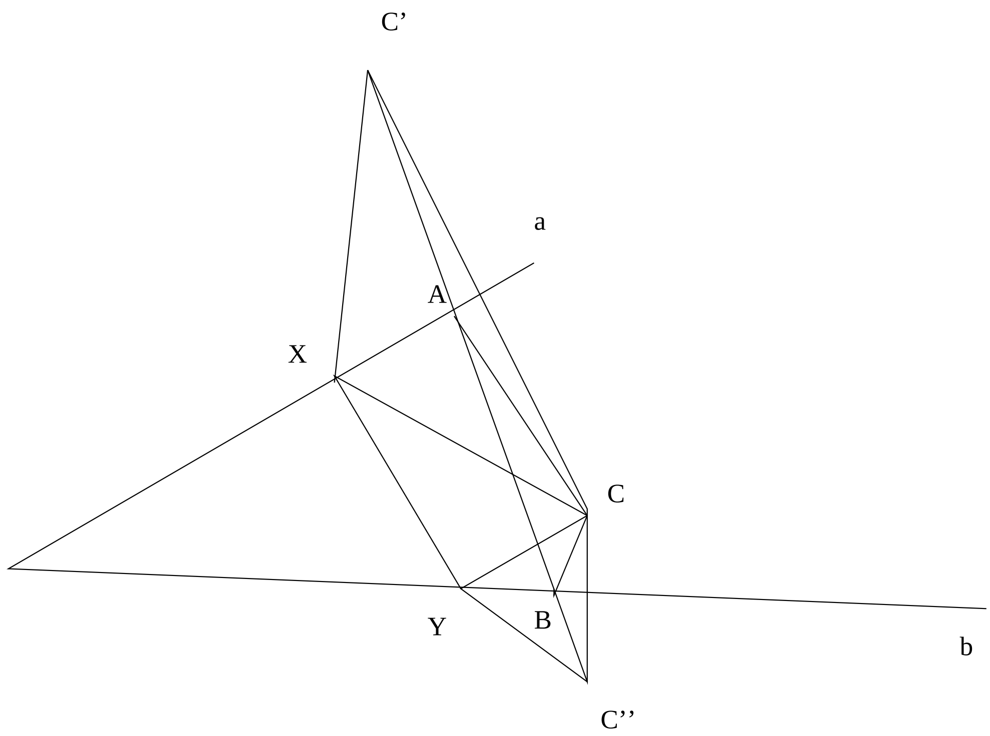
$$\overline{GA} = \overline{GA'}.$$

Wegen der Dreiecksungleichung im Dreieck $A'BG$ gilt dann weiter

$$\overline{BG} + \overline{GA} = \overline{BG} + \overline{GA'} > \overline{BA'} = \overline{BF} + \overline{FA'} = \overline{BF} + \overline{FA},$$

was zu zeigen war.

b)



Konstruktionsbeschreibung: Es seien C' bzw. C'' die Spiegelungspunkte von C an den Geraden a bzw. b. Ferner seien A und B die Schnittpunkte der Gerade $C'C''$ mit den Geraden a bzw. b. Dann hat das Dreieck ABC den minimalen Umfang unter allen Dreiecken mit $A \in a$ und $B \in b$ und vorgegebenem Punkt C (und Geraden a und b).

Beweis: Es seien $X \in a$ und $Y \in b$ beliebig gewählte Punkte auf den Geraden a bzw. b, wobei mindestens einer von A bzw. von B verschieden sein soll. Aufgrund der Spiegelungseigenschaft von C' und C'' gilt für die Umfänge der Dreiecke (wie schon in a)

$$\overline{CB} + \overline{BA} + \overline{AC} = \overline{C''B} + \overline{BA} + \overline{AC'} = \overline{C''C'},$$
$$\overline{CY} + \overline{YX} + \overline{XC} = \overline{C''Y} + \overline{YX} + \overline{XC'}.$$

Nun ist aber der kürzeste Streckenzug von C'' nach C' die Strecke selbst. Also gilt die Behauptung.

Aufgaben der 4.Serie

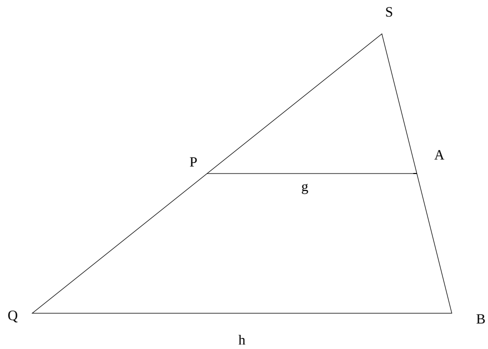
Aufgabe 13: Katrin lernt am Neujahrestag des Jahres 1975 Anne kennen. Anne sagt:„Wenn Du die Quersumme meines Geburtsjahres bildest, so erhälst Du mein Alter.“ Daraufhin Katrin:„Herzlichen Glückwunsch zum Geburtstag!“
Wie kam Katrin darauf, dass Anne Geburtstag hat und wie alt ist sie geworden?

Aufgabe 14: In der untenstehenden Figur seien zwei vom Punkt S ausgehende Strahlen durch die parallelen Geraden g und h geschnitten. Dabei gelte

$$\overline{SP} = \overline{PQ}. \tag{4}$$

Zeichne geeignete Hilfspunkte und Hilfsgeraden ein und benutze Dein Wissen über Stufenwinkel, Wechselwinkel und Eigenschaften von Parallelogrammen um zu zeigen, dass die folgenden Gleichungen (über Streckenlängen) erfüllt sind:

$$\overline{SA} = \overline{AB}, \qquad 2\overline{PA} = \overline{QB}. \tag{5}$$



Aufgabe 15: Zur Weihnachtsfeier haben alle Kinder kleine Geschenke gebastelt. Zehn besonders schön verpackte werden in einem kleinen Quiz verlost. Sie sind mit den Zahlen 1 bis 10 beschriftet. Jens möchte gern das Geschenk mit der Nummer 5 bekommen. Leider haben drei andere Schüler im Quiz gewonnen. Sie dürfen sich nacheinander jeder ein Geschenk auswählen. Welche Chance kann man Jens als Viertplaziertem geben, sein gewünschtes Geschenk zu erhalten?

Aufgabe 16: In der folgenden Multiplikationsaufgabe müssen für das Zeichen $*$ die fehlenden Ziffern so eingesetzt werden, dass eine richtig gerechnete Aufgabe entsteht. Dabei können für $*$ verschiedene Ziffern stehen. Begründe Deine Überlegungen!

$$\begin{array}{ccccccc}
2 & * & * & \cdot & 3 & * & * \\
\hline
 & & * & * & 3 & & \\
 & & & * & * & 3 & \\
 & & & & 5 & * & * \\
\hline
 & & * & * & * & 9 & * \\
\hline\hline
\end{array}$$

Korrespondenzzirkel Mathematik Klasse 6, 2000/2001
Lösungen der 4. Serie

Lösung zu 14. (nach Maria Fuchs) (10 Punkte) Die größte Quersumme einer Jahreszahl (unserer Zeitrechnung) ist $1 + 9 + 9 + 9 = 28$. Somit ist Anne also $1972 = 2000 - 28$ oder später geboren. Schreibt man die Jahreszahl des Geburtsjahres, dessen Quersumme und das entsprechende Alter am 1.1.2000 in eine Tabelle,

Jahr	Quersumme	Alter	Jahr	Quersumme	Alter
2000	2	0	1985	23	15
1999	28	1	1984	22	16
1998	27	2	1983	21	17
1997	26	3	1982	20	18
1996	25	4	1981	**19**	**19**
1995	24	5	1980	18	20
1994	23	6	1979	26	21
1993	22	7	1978	25	22
1992	21	8	1977	24	23
1991	20	9	1976	**23**	**24**
1990	19	10	1975	22	25
1989	27	11	1974	21	26
1988	26	12	1973	20	27
1987	25	13	1972	19	28
1986	24	14			

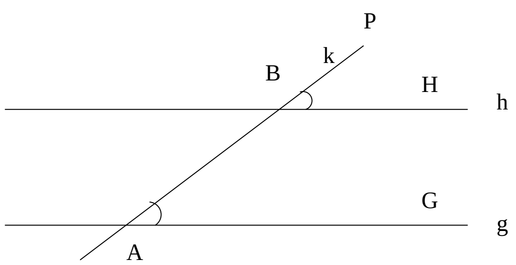
so erkennt man, dass nur im Jahre 1981 Quersumme des Geburtsjahres und Alter übereinstimmen. *Eine* mögliche Lösung ist also, dass Anne am 1.1.1981 geboren ist und 18 Jahre alt geworden ist. Das ist aber nicht die einzige Lösung! Denn hätte Anne nicht am 1.1. Geburtstag, so müsste man in der Spalte „Alter“ überall 1 abziehen, da sie ja erst später im Verlaufe des Jahres das Alter „2000 – Geburtsjahr“ erreicht. Dann erkennt man aber, dass Anne an einem beliebigen Tag, außer natürlich den 1.1., des Jahres 1976 Geburtstag haben konnte. Am 1.1.2000 wäre sie dann 23 Jahre alt, gleich der Quersumme des Geburtsjahres!
Der Fehler entstand, da ich die ursprüngliche Aufgabe abänderte, in ihr war vom Neujahrstag des Jahres 1975 die Rede, wo sich Anne und Katrin trafen. Hier eine rechnerische Lösung für die richtige Aufgabe (mit 1975): Wie oben argumentiert man, dass Anne im 20. Jahrhundert geboren sein muss, etwa im Jahr $\overline{19xy} = 1900 + 10x + y$ mit Ziffern $x, y \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Die Quersumme und damit ihr Alter beträgt $1 + 9 + x + y = 10 + x + y$.
Fall 1. Anne hat am 1.1. Geburtstag. Dann ist ihr Alter gleich $1975 - \overline{19xy} = 75 - 10x - y$. Nach ihrer Aussage gilt also

$$75 - 10x - y = 10 + x + y \quad \text{oder} \quad 65 = 11x + 2y.$$

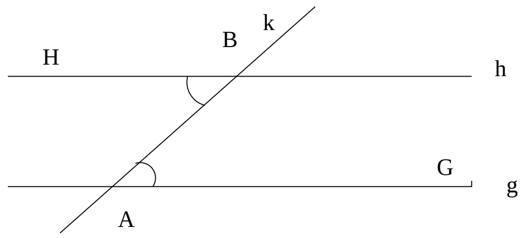
Man erkennt, dass x ungerade sein muss (Wäre x gerade, so wäre die ganze rechte Seite der obigen Gleichung gerade. Die linke Seite, 65, ist aber ungerade.) Für $x \leq 3$ wird $2y \geq 32$ bzw. $y \geq 16$. Das ist keine Ziffer mehr. Für $x \geq 7$ wird y negativ. Einzig $x = 5$ und $y = 5$ bleiben übrig. Anne ist am 1.1.1955 geboren und wurde am 1.1.1975 gerade 20 Jahre alt.

Fall 2. Anne hat nicht am 1.1. Geburtstag. Dann ist ihr Alter am 1.1.1975 gleich $1975 - \overline{19xy} - \mathbf{1}$. Wie oben erhält man die Gleichung $64 = 11x + 2y$. Man erkennt, dass diesmal x gerade sein muss. Für $x \leq 4$ erhält man $2y \geq 22$ bzw. $y \geq 11$, was keine Ziffer ist. Für $x \geq 6$ hingegen wird y negativ. Diese Gleichung hat also keine Lösung mit Ziffern x und y! Anne muss also am 1.1. Geburtstag haben.

Lösung zu 15. (10 Punkte) Wir benötigen den Wechselwinkelsatz, den Stufenwinkelsatz und den Kongruenzsatz „Winkel, Seite, Winkel (WSW)“.



Figur 1



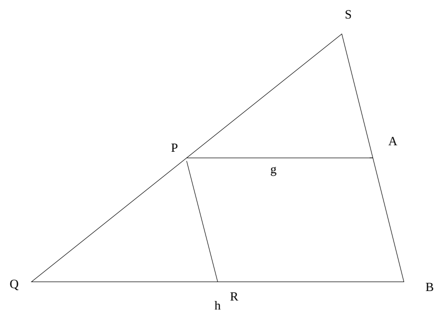
Figur 2

Satz: Werden die parallelen Geraden g und h von einer Geraden k in den Punkten A bzw. B geschnitten, so sind die folgenden Winkelpaare gleich groß. Dabei seien G, H und P beliebige Punkte auf den Geraden g, h bzw. k:

$$\angle PAG = \angle PBH \quad \text{Stufenwinkel sind gleich groß (Figur 1)}$$
$$\angle HBA = \angle GAB \quad \text{Wechselwinkel sind gleich groß (Figur 2)}$$

Kongruenzsatz WSW: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und den beiden anliegenden Innenwinkeln übereinstimmen.

Nun kommen wir zur Lösung der Aufgabe.



Die Parallele zu AB durch P schneide die Gerade QB im Punkt R. Nach Stufenwinkelsatz gilt $\angle APS = \angle RQP$ und $\angle ASP = \angle RPQ$. Außerdem sind die Strecken $\overline{SP} = \overline{PQ}$ gleich lang. Nach dem Kongruenzsatz WSW sind dann die Dreiecke SAP und PRQ kongruent. Somit gilt insbesondere

$$\overline{SA} = \overline{PR} \quad \text{und} \quad \overline{PA} = \overline{QR}.$$

Nun ist aber das Viereck $RBAP$ ein Paralleleogramm, denn die gegenüberliegenden Seiten sind jeweils parallel und somit auch gleichlang:

$$\overline{PR} = \overline{AB}, \quad \overline{PA} = \overline{RB}.$$

Hieraus folgen sofort die beiden Behauptungen.

Lösung zu 16. (8 Punkte) (nach Thomas Backhaus) Die Chance des ersten Schülers, das Geschenk 5 zu bekommen beträgt 100%, die Chance des zweiten Schülers nur noch 90%, des dritten Schülers 80% und von Jens 70%.
(nach Dominique Alfermann) Die Wahrscheinlichkeit, dass der erste das Päckchen nimmt liegt bei 1/10, dass der zweite es nimmt, vorausgesetzt, der erste hat es noch nicht genommen, bei 1/9, dass der dritte es nimmt bei 1/8. Die Wahrscheinlichkeit, dass also *keiner* das Päckchen nahm liegt bei $9/10 \cdot 8/9 \cdot 7/8 = 7/10$.
(dritte Lösung) Der erste Schüler hat 10 Möglichkeiten, ein Geschenk zu wählen, der zweite nur noch 9, der dritte 8 Möglichkeiten; insgesamt gibt es für die ersten 3 Schüler also $10 \cdot 9 \cdot 8$ Wahlmöglichkeiten. Für Jens günstig sind davon $9 \cdot 8 \cdot 7$ Möglichkeiten, nämlich gerade die, wo die 3 Erstplatzierten das Geschenk 5 verschmähen. Somit liegt die Chance bei $(9 \cdot 8 \cdot 7)/(10 \cdot 9 \cdot 8) = 7/10$.

Lösung zu 17. (8 Punkte) Diese Aufgabe haben die meisten richtig gelöst. Die Reihenfolge der Schritte zu erläutern war hier wohl das Komplizierte. Diejenigen, die mit Farben zur Markierung der Reihenfolge der ermittelten Ziffern gearbeitet haben, haben die übersichtlichste Begründung abgegeben (Maria und Stefanie).

1. Betrachtet man die Einerziffer x des ersten Faktors, den Hunderter 3 des zweiten Faktors und den Einer 3 des Produkts (2.Zeile, letzte Ziffer), so ergibt sich wegen $x \cdot 3 = 3$ sofort $x = 1$:

$$\begin{array}{ccccccc}
2 & * & \mathbf{1} & \cdot & 3 & * & * \\
\hline
 & & * & * & 3 & & \\
 & & & * & * & 3 & \\
 & & & & 5 & * & * \\
\hline
 & & * & * & * & 9 & * \\
\hline\hline
\end{array}$$

2. Betrachtet man die Einerstelle 1 des ersten Faktors, den Zehner y des 2. Faktors und den Einer 3 des Produkts (3.Zeile), so erhält man wegen $1 \cdot y = 3$ sofort $y = 3$:

$$\begin{array}{ccccccc}
2 & * & 1 & \cdot & 3 & \mathbf{3} & * \\
\hline
 & & * & * & 3 & & \\
 & & & * & * & 3 & \\
 & & & & 5 & * & * \\
\hline
 & & * & * & * & 9 & * \\
\hline\hline
\end{array}$$

3. Betrachtet man die vorletzte Spalte, so hat man, da kein Übertrag aus der vorangegangenen Summenbildung auftreten kann, $3 + z = 9$, also $z = 6$:

$$
\begin{array}{ccccccc}
2 & \ast & 1 & \cdot & 3 & 3 & \ast \\
\hline
 & & \ast & \ast & 3 & & \\
 & & & \ast & \ast & 3 & \\
 & & & & 5 & \mathbf{6} & \ast \\
\hline
 & & \ast & \ast & \ast & 9 & \ast \\
\hline\hline
\end{array}
$$

4. Betrachtet man den Hunderter 2 des ersten Faktors, den Einer u des zweiten Faktors und den Hunderter 5 des Produkts, so hat man $2 \cdot u + r = 5$. Dabei muss also ein von 0 verschiedener Übertrag r auftreten. Der Faktor $u = 1$ kann keinen Übertrag liefern und ist zu klein, $u = 3$ ist schon zu groß, also geht nur $u = 2$ und $r = 1$:

$$
\begin{array}{ccccccc}
2 & \ast & 1 & \cdot & 3 & 3 & \mathbf{2} \\
\hline
 & & \ast & \ast & 3 & & \\
 & & & \ast & \ast & 3 & \\
 & & & & 5 & 6 & \ast \\
\hline
 & & \ast & \ast & \ast & 9 & \ast \\
\hline\hline
\end{array}
$$

Wir betrachten die Zehnerstelle v im ersten Faktor, die Einerstelle 2 im zweiten Faktor und die Zehnerstelle 6 im Produkt. Da ein Übertrag von 1 erzeugt werden soll, muss also gelten $u \cdot 2 = 10 + 6$, also $u = 8$:

$$
\begin{array}{ccccccc}
2 & \mathbf{8} & 1 & \cdot & 3 & 3 & 2 \\
\hline
 & & \ast & \ast & 3 & & \\
 & & & \ast & \ast & 3 & \\
 & & & & 5 & 6 & \ast \\
\hline
 & & \ast & \ast & \ast & 9 & \ast \\
\hline\hline
\end{array}
$$

Der Rest ergibt sich durch Ausmultiplizieren:

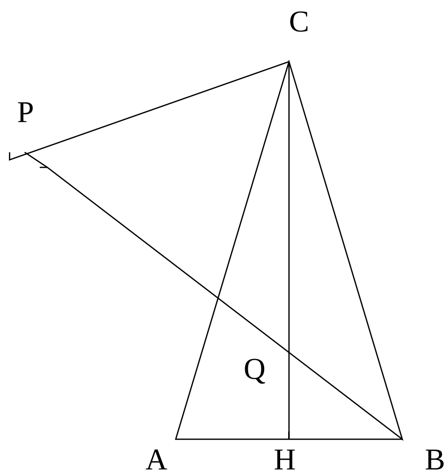
$$
\begin{array}{ccccccc}
2 & 8 & 1 & \cdot & 3 & 3 & 2 \\
\hline
 & & 8 & 4 & 3 & & \\
 & & & 8 & 4 & 3 & \\
 & & & & 5 & 6 & 2 \\
\hline
 & & 9 & 3 & 2 & 9 & 2 \\
\hline\hline
\end{array}
$$

Korrespondenzzirkel Mathematik Klasse 6, 2000/2001
Serie 5

Aufgabe 17: Viele kennen die Geschichten von Alice im Wunderland und Alice im Spiegelland. Im Wald des Vergessens trifft sie den Löwen und das Einhorn. Beide haben eine merkwürdige Eigenschaft. Der Löwe lügt montags, dienstags und mittwochs und spricht an

den anderen Tagen die Wahrheit. Das Einhorn lügt donnerstags, freitags und sonnabends und sagt an den anderen Tagen die Wahrheit. Als Alice nach dem Wochentag fragt, bekommt sie folgende Antworten:
Löwe:„Gestern war einer meiner Lügentage.“ Einhorn:„Auch bei mir war gestern ein Lügentag.“
An welchem Tag hat Alice die beiden gefragt?

Aufgabe 18: In einem Quadrat $ABCD$ der Seitenlänge $\overline{AB} = 4\,\mathrm{cm}$ seien M und N die Mittelpunkte der Seiten $\overline{BC}$ bzw. $\overline{CD}$.
a) Was lässt sich über das Dreieck AMN aussagen? Beweise Deine Vermutung!
b) Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck AMN?



Aufgabe 19: Es sei ABC ein gleichschenklig spitzwinkliges Dreieck mit der Basis $\overline{AB}$. Die Winkelhalbierende des Winkels $\angle CBA$ schneide die Senkrechte zu BC durch C im Punkt P und die Höhe $\overline{CH}$ von Dreieck ABC im Punkt Q.
Was lässt sich über die Seiten des Dreiecks PQC aussagen? Beweise Deine Vermutung!

Aufgabe 20: Uwes Schulweg führt am Rathaus und am Bahnhof vorbei. Am Rathaus hat Uwe ein Viertel des Weges geschafft; die Rathausuhr zeigt 7.30 Uhr an. Am Bahnhof hat Uwe ein Drittel des Weges hinter sich; die Bahnhofsuhr zeigt 7.32 Uhr an.
Um wieviel Uhr trifft Uwe in der Schule ein, wenn er während des gesamten Weges mit gleichbleibender Geschwindigkeit geht?

Korrespondenzzirkel Mathematik Klasse 6, 2000/2001
Lösungen der 5. Serie

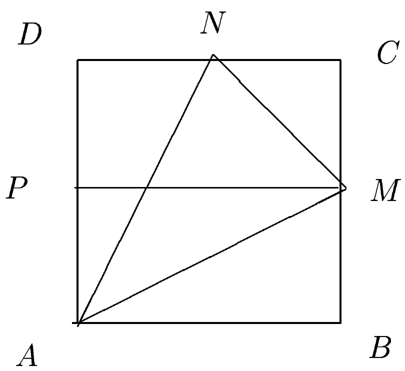
Lösung zu 18. (nach Maria Fuchs) (6 Punkte) Bei dieser Aufgabe haben fast alle Schüler das richtige Ergebnis gefunden. Dennoch haben sie einige von Euch nur unvollständig gelöst: mitunter wurde vergessen, die anderen Tage (außer Donnerstag) zu überprüfen, es wäre ja denkbar, dass die Aufgabe mehr als eine Lösung hat. Andere wiederum haben zwar alle

anderen Tage ausgeschlossen, doch vergessen den Donnerstag zu prüfen (denkbar wäre ja, dass die Aufgabe gar keine Lösung hat).
Wir fertigen eine Tabelle an, woraus hervorgeht, an welchen Tagen Löwe und Einhorn die Wahrheit sagen (W) bzw. lügen (L).

	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
Löwe	L	L	L	W	W	W	W
Einhorn	W	W	W	L	L	L	W

Montag, Dienstag und Mittwoch kommen nicht in Frage, da das Einhorn hätte sagen müssen:„Gestern war einer meiner Wahrheitstage.“ Freitag, Sonnabend und Sonntag kommen nicht in Frage, da an diesen Tagen der Löwe hätte sagen müssen:„Gestern war einer meiner Wahrheitstage.“ Somit bleibt nur der Donnerstag übrig. Tatsächlich sagt der Löwe am Donnerstag die Wahrheit, wenn er behauptet, dass gestern einer seiner Lügentage war und tatsächlich lügt das Einhorn, wenn es das selbe behauptet.
Alice hat die beiden also an einem Donnerstag getroffen.

Lösung zu 19. (nach Maria Fuchs) (5 Punkte)



a) Wir zeigen, dass das Dreieck AMN gleichschenklig ist mit den Schenkeln $\overline{AM} = \overline{AN}$.
Beweis: Es gilt, dass $\triangle ABM \cong \triangle ADN$ nach Kongruenzsatz SWS, denn $\overline{AB} = \overline{AD}$ (Quadratseiten sind gleich lang), $\angle ABM = \angle ADN = 90°$ und $\overline{BM} = \overline{ND}$, da M und N die Seitenmitten sind. Aus der Kongruenz dieser Dreiecke folgt, dass deren Hypothenusen gleich sind: $\overline{AM} = \overline{AN}$.

b) Die Fläche des Dreiecks AMN ergibt sich als Differenz aus der Quadratfläche und der Summe der Flächen der 3 Dreiecke ABM, MNC und NDA.
1. Variante (nach Maria Fuchs, Markus Schumacher und Thomas Backhaus). Mit Hilfe der Flächenformel für rechtwinklige Dreiecke (Produkt der Kathetenlängen durch 2, $F = a\cdot b/2$) ergibt sich somit

$$\begin{aligned} F_{AMN} &= F_{ABCD} - (F_{ABM} + F_{MCN} + F_{NDA}) \\ &= 4\,\mathrm{cm}\cdot 4\,\mathrm{cm} - (4\,\mathrm{cm}\cdot 2\,\mathrm{cm}/2 + 2\,\mathrm{cm}\cdot 2\,\mathrm{cm}/2 + 4\,\mathrm{cm}\cdot 2\,\mathrm{cm}/2) \\ &= 16\,\mathrm{cm}^2 - (4\,\mathrm{cm}^2 + 2\,\mathrm{cm}^2 + 4\,\mathrm{cm}^2) = 6\,\mathrm{cm}^2. \end{aligned}$$

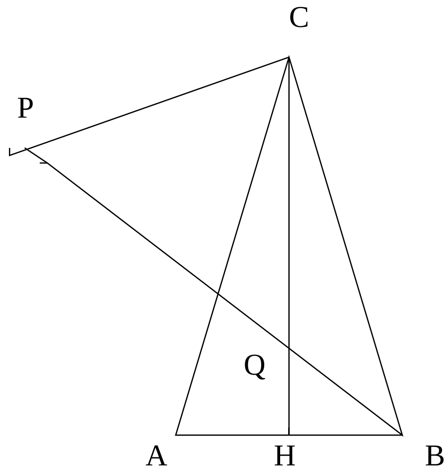
Das Dreieck AMN hat eine Fläche von $6\,\mathrm{cm}^2$.
2. Variante (ohne Flächenformel). Zeichnet man durch M die Parallele zu AB ein und bezeichnet deren Schnittpunkt mit $\overline{AD}$ mit P, so erkennt man, dass das Dreieck ABM den halben Flächeninhalt des Rechtecks $ABMP$ hat und dies wiederum den halben Flächeninhalt des Quadrats $ABCD$. Somit ist $F_{ABM} = F_{AND} = a^2/4$, wenn a die Seitenlänge des

Quadrates $ABCD$ ist. Auf ähnliche Weise erkennt man, dass die Fläche des Dreiecks MNC ein Achtel des gesamten Quadrates ausmacht, $F_{MNC} = a^2/8$. Also gilt

$$F_{AMN} = a^2 - (a^2/4 + a^2/8 + a^2/4) = 3/8a^2.$$

Setzt man $a = 4\,\mathrm{cm}$ ein, so hat man wieder $F_{AMN} = 3/8{\cdot}16\,\mathrm{cm}^2 = 6\,\mathrm{cm}^2$.

Lösung zu 20. (nach Maria Fuchs) (8 Punkte) Wir zeigen, dass das Dreieck PQC gleichschenklig ist mit den Schenkeln $\overline{CP} = \overline{CQ}$.



Beweis: Wie üblich bezeichnen wir $\angle ABC$ mit β. Da BP die Winkelhalbierende ist, gilt $\angle HBQ = \angle CBP = \beta/2$. Da die Dreiecke BHQ bzw. BCP rechtwinklig sind mit den rechten Winkeln bei H bzw. bei C, ergibt sich für den jeweils dritten Innenwinkel $\angle HQB = 90° - \beta/2$ und $\angle BPC = 90° - \beta/2$ (nach dem Innenwinkelsatz). Da die Winkel $\angle HQB = \angle CQP$ gleich sind (Scheitelwinkel), hat man schließlich $\angle CPQ = \angle CQP = 90° - \beta/2$. Damit sind die 2 Innenwinkel bei P und Q im Dreieck PQC gleich; also ist das Dreieck gleichschenklig.

Lösung zu 21. (nach Markus Schuhmacher) (7 Punkte) Diese Aufgabe hat die wenigsten Probleme bereitet. Bei einigen waren die Begründungen recht knapp.
In den 2 Minuten vom Rathaus bis zum Bahnhof schaffte Uwe ein Zwölftel des Weges, denn es gilt $1/3 - 1/4 = 1/12$. Da er um 7.30 Uhr schon $3/12$ des Weges geschafft hatte, ist er $3{\cdot}2\mathrm{min}$ früher also 7.24 Uhr zu Hause losgegangen. Wenn er für ein Zwölftel des Weges 2 Minuten braucht, so benötigt er für den ganzen Weg 24 Minuten. Er trifft daher um 7.48 Uhr in der Schule ein.

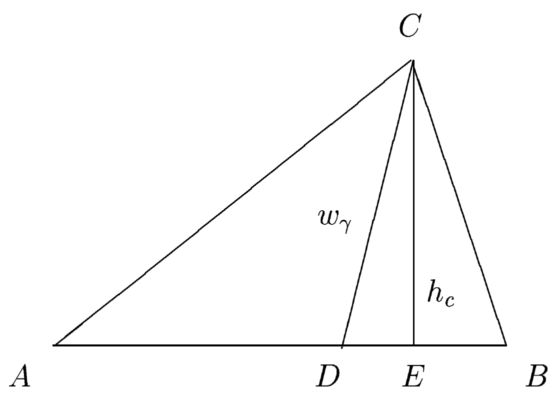
Korrespondenzzirkel Mathematik Klasse 6, 2000/2001
6.Serie

Aufgabe 21: In einer Schule mit 100 Kindern nehmen 70 an der Chemieolympiade teil, 75 an der Physikolympiade, 80 am Informatikwettbewerb und 85 an der Mathematikolympiade.

Jeder Schüler nimmt an wenigstens 3 Wettbewerben teil.
a) Wie viele Schüler nehmen an allen vier Wettbewerben teil?
b) Wie viele Schüler nehmen an der Physikolympiade, dem Informatikwettbewerb und an der Matheolympiade teil, nicht aber am Chemiewettbewerb?

Aufgabe 22: Anna hat einen Würfel mit einer Kantenlänge von $3\,\mathrm{cm}$ außen rot angestrichen. Sie denkt sich diesen Würfel zerlegt in lauter kleine Würfel der Kantenlänge $1\,\mathrm{cm}$ (durch jeweils 2 Schnitte, die parallel zu den Flächen des Würfels verlaufen).
(a) Wie viele kleine Würfel würden aus dem großen Würfel entstehen?
(b) Wie viele dieser kleinen Würfel hätten genau 3, genau 2, genau eine bzw. gar keine rot angestrichene Seitenfläche?
(c) Beantworte diese Frage auch für einen Würfel der Kantenlänge $4\,\mathrm{cm}$ und $5\,\mathrm{cm}$! Wie lautet die Antwort bei einem Würfel der Kantenlänge $n\,\mathrm{cm}$, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist?

Aufgabe 23:



In der abgebildeten Figur sei D der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden durch C mit der Seite $\overline{AB}$ und E sei der Fußpnkt der Höhe von C auf AB. Ferner sei $\alpha = 30°$, $\beta = 75°$.
a) Bestimme die Größe des Winkels δ, $\delta = \angle DCE$! Bestimme δ, falls $\alpha = 25°$ und $\beta = 70°$!
b) Welche allgemeine Beziehung herrscht zwischen den drei Winkeln α, β und δ, wenn stets $\alpha < \beta$ vorausgesetzt wird?

Aufgabe 24: Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ aus den Stücken $a = \overline{AB} = 8,1\,\mathrm{cm}$, $c = \overline{CD} = 4,1\,\mathrm{cm}$, $e = \overline{AC} = 8,2\,\mathrm{cm}$ und $f = \overline{BD} = 6,3\,\mathrm{cm}$!

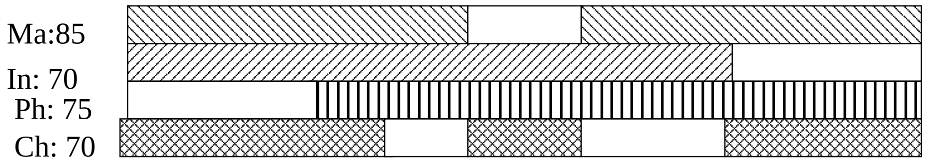
Korrespondenzzirkel Mathematik Klasse 6, 2000/2001
Lösungen der 6. Serie

Lösung zu 22. (7 Punkte) (1. Lösung nach Dominique Alfermann) a) Es nehmen 10 Schüler an allen 4 Wettbewerben teil. Begründung: Wir ermitteln zunächst, wie viele Kinder an *genau* 3 Olympiaden teilnehmen. Es steht C für die Chemieolympiade, P für die Physikolympiade sowie M und I für die Matheolympiade bzw. den Informatikwettbewerb. Da alle Schüler mindestens an 3 Wettbewerbe teilnehmen, nehmen

an P, I, M genau die Schüler teil, die nicht an C teilnehmen: $100 - 70 = 30$,
an C, I, M genau die Schüler teil, die nicht an P teilnehmen: $100 - 75 = 25$,
an P, C, M genau die Schüler teil, die nicht an I teilnehmen: $100 - 80 = 20$,
an P, I, C genau die Schüler teil, die nicht an M teilnehmen: $100 - 85 = 15$.

Keiner der hier aufgeführten $30+25+20+15 = 90$ Schüler nimmt an allen 4 Wettbewerben teil und alle, die an genau 3 Wettbewerben teilnehmen sind hier erwähnt. Also nehmen die übrigen $100 - 90 = 10$ Kinder an allen vier Wettbewerben teil.
b) Alle Schüler, die nicht an der Chemieolympiade teilnehmen, nehmen an den 3 anderen Wettbewerben teil; das sind $100 - 70 = 30$ Schüler.

(2. Lösung nach Stefanie Höhne)



Man muss die Balken, die den teilnehmenden Schülern entsprechen so anordnen, dass für jeden Schüler mindestens drei schraffierte Balken auftreten. Man kann dann nachzählen, dass für genau 10 Schüler alle 4 Balken schraffiert sind.
Man kann diese Idee auch mit einer Gleichung formulieren. Es sei n die Anzahl der Schüler, die an genau 3 Wettbewerben teilnehmen. Dann ist $100 - n$ die Zahl der Schüler, die an allen 4 Wettbewerben teilnehmen. Es gibt insgesamt 310 Wettbewerbsteinnahmen, die sich aus $85 + 80 + 75 + 70 = 310$ zusammensetzen. Das entspricht der *zeilenweise* berechneten gesamten schraffierten Fläche im obigen Diagramm. Wenn wir aber die Fläche *spaltenweise,* das heißt Schüler für Schüler berechnen, so liefert uns der obige Ansatz die Gleichung

$$n \cdot 3 + (100 - n) \cdot 4 = 310$$

Durch Umstellen hat man sofort $n = 90$. Also nehmen 10 Schüler an allen 4 Wettbewerben teil.

Lösung zu 23. (7 Punkte) (nach Dominique Alfermann)
a) Es etntstehen $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ Einheitswürfel.
Die Lösung von b) und c) ist in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

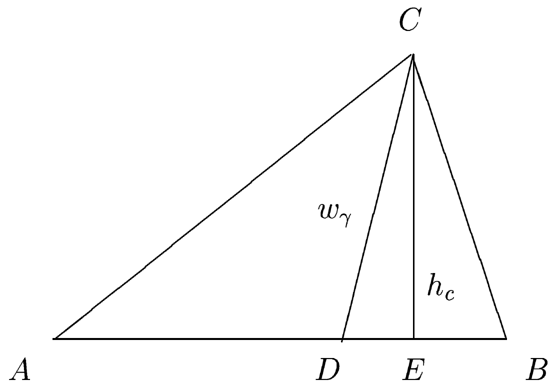
Anzahl der roten der roten Seitenflächen	Würfelart	$3 \cdot 3 \cdot 3$-Würfel	$4 \cdot 4 \cdot 4$-Würfel	$5 \cdot 5 \cdot 5$-Würfel	$n \cdot n \cdot n$-Würfel
3	Eckwürfel	8	8	8	8
2	Kantenwürfel	$12 \cdot 1 = 12$	$12 \cdot 2 = 24$	$12 \cdot 3 = 36$	$12 \cdot (n-2)$
1	Flächenwürfel	$6 \cdot 1 \cdot 1 = 6$	$6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$	$6 \cdot 3 \cdot 3 = 54$	$6 \cdot (n-2)^2$
0	Innenwürfel	1	$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$	$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$	$(n-2)^3$
	Summenprobe	27	64	125	n^3

Wir erläutern nur den allgemeinen Fall mit der Kantenlänge $n\,\mathrm{cm}$ (letzte Spalte). Jeder Würfel hat 8 Ecken. Damit ist die erste Zeile klar.
Zieht man von den n Einheitswürfeln, die jeweils eine Kante bilden, die beiden Eckwürfel ab, so verbleiben auf jeder Kante $n - 2$ reine Kantenwürfel; da der Würfel 12 Kanten hat,

erhält man insgesamt $12(n-2)$ Einheiswürfel, die auf genau 2 Seiten gefärbt sind. Ohne Eck- und Kantenwürfel hat jede Fläche $(n-2)^2$ Einheitswürfel (die genau eine rote Fläche haben). Da der Würfel 6 Flächen hat, kommt man auf die Zahl in der dritten Zeile. Entfernt man schließlich alle Würfel, die mindestens eine rote Fläche haben, so erhält man einen kleineren Würfel, dessen Kantenlänge um $2\,\mathrm{cm}$ kleiner ist als beim Ausgangswürfel; dieser hat also $(n-2)\cdot(n-2)\cdot(n-2)=(n-2)^3$ Einheitswürfel. Mit Hilfe der Summenprobe kann man testen, ob man auch keinen Einheitswürfel vergessen hat:

$$8+12(n-2)+6(n-2)^2+(n-2)^3=8+12n-24+6n^2-24n+24+n^3-6n^2+12n-8=n^3.$$

Lösung zu 24. (7 Punkte)



b) Wir zeigen, dass die allgemeine Formel $\delta=(\beta-\alpha)/2$ gilt. Der Winkel $\delta=\angle DCE$ ergibt sich aus der Differenz der Winkel $\angle DCB$ und $\angle ECB$:

$$\delta=\angle DCB-\angle ECB. \tag{6}$$

Da CD die Winkelhalbierende des Winkels γ ist, gilt natürlich

$$\angle DCB=\gamma/2. \tag{7}$$

Da das Dreieck CEB rechtwinklig ist mit $\angle CEB=90^\circ$ ($\overline{CE}$ ist die Höhe auf c), gilt nach dem Innenwinkelsatz im Dreieck ECB:

$$\angle ECB=180^\circ-\angle BEC-\angle CBE=180^\circ-90^\circ-\beta=90^\circ-\beta. \tag{8}$$

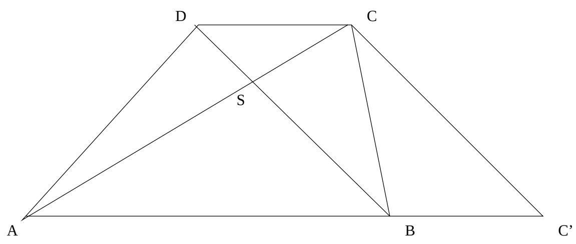
Beachtet man nun noch den Innenwinkelsatz im Dreieck ABC, so hat man $\gamma=180^\circ-\alpha-\beta$ bzw. $\gamma/2=90^\circ-\alpha/2-\beta/2$. Setzt man dies sowie (7) und (8) in (6) ein, so hat man

$$\begin{aligned}\delta&=\gamma/2-(90^\circ-\beta)=90^\circ-\alpha/2-\beta/2-(90^\circ-\beta)\\&=90^\circ-\alpha/2-\beta/2-90^\circ+\beta=(\beta-\alpha)/2.\end{aligned}$$

Bemerkung: Nur weil $\beta>\alpha$ vorausgesetzt wurde, verläuft die Winkelhalbierende w_γ links von der Höhe h_c. Im Falle $\alpha=\beta$ fallen die beiden Geraden zusammen und es ist $\delta=0^\circ$, im Falle $\alpha>\beta$ verläuft w_γ rechts von h_c und wir erahlten nun die Formel $\delta=(\alpha-\beta)/2$ (auf dem selben Wege wie oben).

a) Setzt man die gegebenen Werte $\alpha=30^\circ$ und $\beta=75^\circ$ ein, so hat man $\delta=(\beta-\alpha)/2=(70^\circ-25^\circ)/2=45^\circ/2=22,5^\circ$. Auf den selben Wert kommt man mit $\alpha=25^\circ$ und $\beta=70^\circ$.

Lösung zu 25. (10 Punkte) Skizze:



Diese Aufgabe ließ sich praktisch genauso lösen, wie Aufgabe 4, Serie 2. Schade, dass das so wenige erkannt haben! Die Grundidee war die selbe! Bitte schaut Euch noch einmal die Schritte an, die bei einer Konstruktionsaufgabe abzuarbeiten sind (in den Lösungen zur zweiten Serie ist das alles ausführlich beschrieben): Skizze, Analyse, Konstruktion, Konstruktionsbeschreibung, Beweis und Determination (Diskussion).

Analyse: Angenommen, es ist $ABCD$ ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften. Dann sei C' der Schnittpunkt der Parallelen zu BD duch C mit der Geraden AB. Offenbar ist dann $BC'CD$ ein Parallelogramm und vom Dreieck $AC'C$ sind sämtliche Seitenlängen bekannt: $\overline{AC} = e = 8,2\,\mathrm{cm}$, $\overline{CC'} = \overline{DB} = f = 6,3\,\mathrm{cm}$ und $\overline{AC'} = \overline{AB} + \overline{BC'} = a + \overline{CD} = a + c = 12,2\,\mathrm{cm}$.

Konstruktionsbeschreibung: Wir konstruieren zunächst das Dreieck $AC'C$ nach dem Kongruenzsatz SSS, das heißt, wir zeichnen eine Strecke $\overline{AC'}$ der Länge $12,2\,\mathrm{cm}$ und beschreiben um A und um C' Kreise mit den Radien $e = 8,2\,\mathrm{cm}$ bzw. $f = 6,3\,\mathrm{cm}$, die sich in C schneiden. Ferner sei B der Punkt auf $\overline{AC'}$, für den $\overline{AB} = a = 8,1\,\mathrm{cm}$ gilt. Es sei D der Schnittpunkt der Parallelen zu $C'C$ durch B mit der Parallelen zu AB durch C. Dann ist $ABCD$ das Trapez mit den gewünschten Eigenschaften.

Beweis: Klar ist nach Konstruktion, dass $\overline{AC} = e$ und $\overline{AB} = a$ die geforderte Länge haben. Da A, B, C' auf einer Geraden liegen, gilt $\overline{BC'} = \overline{AC'} - \overline{AB} = 12,2\,\mathrm{cm} - 8,1\,\mathrm{cm} = 4,1\,\mathrm{cm}$. Da $BC'CD$ ein Parallelogramm ist, gilt also $\overline{CD} = \overline{BC'} = 4,1\,\mathrm{cm}$; also hat $\overline{CD}$ die vorgegebene Länge. Schließlich ist auch das andere Paar von Gegenseiten des Parallelogramms gleich lang: $\overline{C'C} = \overline{BD} = 6,3\,\mathrm{cm}$; also hat die Diagonale $\overline{BD}$ die gewünschte Länge. Außerdem sind AB und CD parallel, so dass $ABCD$ tatsächlich ein Trapez ist, bei dem a, c, e und f die gewünschten Längen haben.

Determination (Eindeutigkeit und Existenz): Das Dreieck $AC'C$ ist konstruierbar, da die 3 Dreiecksungleichungen erfüllt sind:

$$\overline{AC} + \overline{CC'} = e + f = 8,2\,\mathrm{cm} + 6,3\,\mathrm{cm} = 14,5\,\mathrm{cm} > \overline{AC'} = a + c = 8,1\,\mathrm{cm} + 4,1\,\mathrm{cm} = 12,2\,\mathrm{cm}.$$

Da in unserem Beispiel $\overline{AC'}$ die längste Seite ist, reicht es, diese Ungleichung zu prüfen. Im allgemeinen Fall muss gelten:

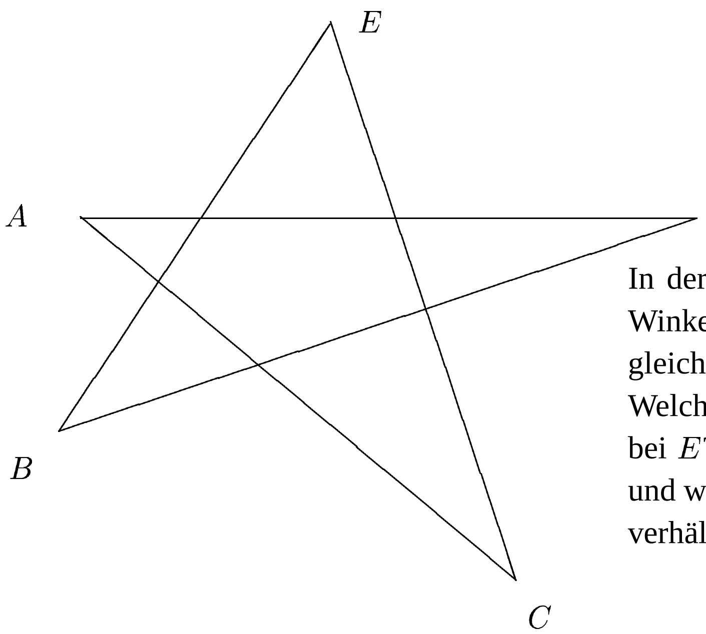
$$e + f > a + c, \quad a + c + e > f, \quad a + c + f > e.$$

Bis auf Spiegelung an der Geraden AC' ist die Konstruktion von C eindeutig. Der zweite Schnittpunkt der Kreise liefert ein kongruentes (an AC' gespiegeltes) Trapez. Ferner ist auch der Schnittpunkt D der Parallelen eindeutig; er existiert immer, da AC' und CC' nicht parallel sind.

Korrespondenzzirkel Mathematik Klasse 6, 2000/2001
7. Serie

Aufgabe 25: Ein Bauer hat Kühe, Schafe und Schweine. Der zehnte Teil seiner Futtervorräte würde für seine Kühe allein noch 4 Tage reichen. Seine Schweine könnten sich davon allein noch 6 Tage ernähren und seine Schafe allein noch 12 Tage.
Wie lange reicht der Vorrat für alle Tiere zusammen?

Aufgabe 26:



In der abgebildeten Figur seien die spitzen Winkel bei den Eckpunkten A, B, C und D gleich $40°$, $45°$, $30°$ bzw. gleich $20°$.
Welchen Wert hat dann der spitze Winkel bei E? Hinweis: Die Skizze ist nicht genau und widerspiegelt nicht die exakten Größenverhältnisse!

Aufgabe 27: Rita experimentiert mit einer Balkenwaage. Sie hat Würfel, Kugeln und eine Pyramide. Sie stellt fest
(1) Alle Kugeln haben das gleiche Gewicht.
(2) Alle Würfel haben das gleiche Gewicht.
(3) Die Pyramide und 5 Würfel wiegen zusammen so viel wie 14 Kugeln.
(4) Ein Würfel und 8 Kugeln wiegen zusammen so viel wie die Pyramide.
Weise nach, dass sich aus diesen Angaben eindeutig ermitteln lässt, wie viele Kugeln zusammen so viel wie die Pyramide wiegen und gib diese Anzahl an!

Aufgabe 28: Gegeben sei ein regelmäßiges $2n$-Eck $P_1P_2\cdots P_{2n}$ mit $n \geq 3$. Welchen Teil der Gesamtfläche nimmt das Rechteck $P_1P_2P_{n+1}P_{n+2}$ ein? Hinweis: Beginne mit den Fällen $n = 3$ und $n = 4$ und versuche, das Rechteck und das regelmäßige $2n$-Eck in Teildreiecke zu zerlegen, deren Flächen Du vergleichen kannst!

Aufgabe 29: (Zusatzaufgabe) In fünf Schalen liegen jeweils drei Kugeln. Marie und Anna ziehen abwechselnd. Bei jedem Zug müssen aus einer Schale eine, zwei oder drei Kugeln genommen werden.

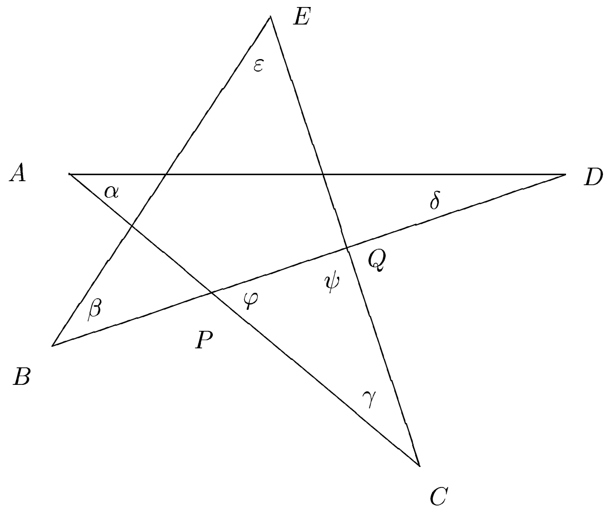
Wer die letzte Kugel nimmt, gewinnt. Wenn Marie anfängt, gewinnt sie immer. Wie erklärst Du das?

Korrespondenzzirkel Mathematik Klasse 6, 2000/2001
Lösungen der 7. Serie

Lösung zu 26. (6 Punkte) (nach Kasimir Wansing) Die Kühe fressen $\frac{1}{40}$ des Gesamtvorrats pro Tag, die Schweine $\frac{1}{60}$ und die Schafe $\frac{1}{120}$. Denn bei den Kühen reicht $\frac{1}{10}$ der Vorräte für 4 Tage, also genügt $1/40$ der Vorräte für einen Tag und genauso bei den Schweinen und Schafen. Alle Tiere zusammen fressen also täglich

$$\frac{1}{40}+\frac{1}{60}+\frac{1}{120}=\frac{3+2+1}{120}=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$$

des Gesamtvorrats. Daher reicht der Vorrat genau für 20 Tage.



Lösung zu 27. (8 Punkte) Die Innenwinkel des Sterns seien wie in der Skizze mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ bezeichnet. Der Schnittpunkt der Geraden AC und BD sei P und der Schnittpunkt der Geraden CE und BD sei Q. Es sei $\varphi := \angle CPQ$ und $\psi := \angle CQP$.

Nach dem Außenwinkelsatz in den Dreiecken BEQ und ADP gilt:

$$\beta+\varepsilon=\psi \quad \text{und} \quad \alpha+\delta=\varphi. \qquad (9)$$

Nach dem Innenwinkelsatz im Dreieck PCQ gilt $\varphi+\psi+\gamma=180°$. Setzt man für φ und ψ die obigen Werte ein, so hat man:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=180°.$$

Folglich gilt:

$$\varepsilon=180°-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=180°-(40°+45°+30°+20°)=180°-135°=45°.$$

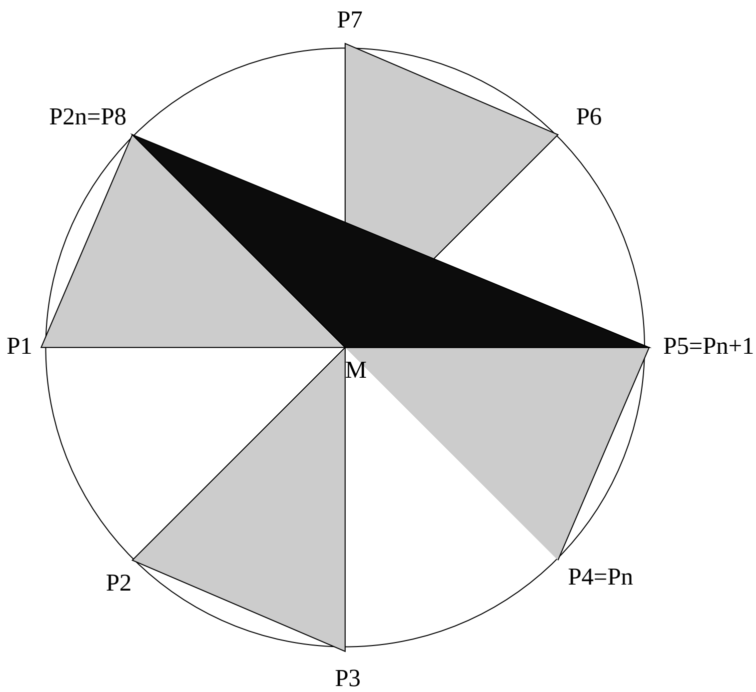
Lösung zu 28. (7 Punkte) (nach Thomas Backhaus) Es sei P das Gewicht der Pyramide, W das Gewicht eines Würfels und K das Gewicht einer Kugel. Nach Aussage (3) und (4) gilt dann

$$P+5W=14K,$$
$$W+8K=P, \quad \text{also} \quad W=P-8K.$$

Setzt man die zweite Gleichung in die erste ein, so hat man

$$P + 5(P - 8K) = 6P - 40K = 14K.$$

Addiert man auf beiden Seiten der Gleichung $40K$, so hat man $6P = 54K$. Division durch 6 liefert $P = 9K$.
9 Kugeln wiegen so viel wie die Pyramide.



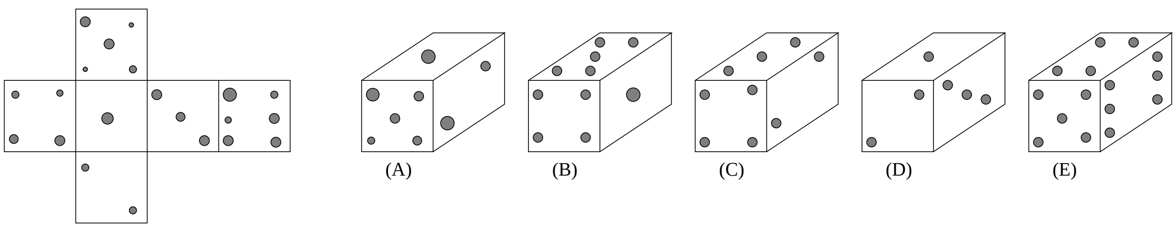
Lösung zu 29. (10 Punkte) Es sei F die Fläche des regulären $2n$-Ecks. Wir zeigen, dass dann die Fläche R des Rechtecks $P_1P_2P_{n+1}P_{n+2}$ den Betrag $R = \frac{2}{n}A$ hat.
In der obigen Skizze haben wir den Fall $n = 4$ illustriert. Anstelle des genannten Rechtecks kann ich auch das Rechteck $P_{2n}P_1P_nP_{n+1}$ betrachten. Zunächst setzt sich das $2n$-Eck aus $2n$ kongruenten gleichschenkligen Dreiecken $P_1MP_2, P_2MP_3, \ldots, P_{2n}MP_1$ zusammen, die alle den Mittelpunkt M als Spitze haben. Die Fläche jedes dieser „Basisdreiecke" sei D. Also gilt $F = 2nD$. Das Rechteck enthält offensichtlich zwei Basisdreiecke, nämlich P_1MP_{2n} und P_nMP_{n+1}. Wir zeigen, dass die anderen beiden (kongruenten) Dreiecke P_1MP_n und $P_{n+1}MP_{2n}$ auch die Fläche D haben: Dazu betrachten wir das Dreieck $P_1P_{n+1}P_{2n}$. Da M der Mittelpunkt von $\overline{P_1P_{n+1}}$ ist, haben die beiden Teildreiecke P_1MP_{2n} und $MP_{n+1}P_{2n}$ die selbe Grundseitenlänge. Sie haben aber auch die selbe Höhe, da das Lot von P_{2n} auf den Durchmesser P_1P_{n+1} die Höhe für beide Dreiecke ist. Also hat auch das Dreieck $P_{n+1}MP_{2n}$ die Fläche D.
Insgesamt hat somit das Rechteck die Fläche $R = 4D$. Als Verhältniszahl ergibt sich: $R : F = 4D : (2nD) = 2/n$. Das Rechteck nimmt den $(2/n)$-ten Teil der Fläche des regulären $2n$-Ecks ein. Insbesondere ist sein Anteil am regulären Sechseck gleich $2/3$ und sein Anteil am regulären Achteck $1/2$.

Lösung zu 30. (10 Punkte) (nach Landeswettbewerb Mathematik Bayern) Marie gewinnt mit der folgenden „symmetrischen Strategie“. Die 5 Schalen seien nebeneinander in einer Reihe aufgestellt und durch nummeriert mit den Buchstaben A, B, M, B', A'. Dabei sei M die mittlere Schale, die Marie in ihrem ersten Zug leert (sie nimmt die 3 Kugeln). Nun steht Anna vor einer symmetrischen Anordnung von Schalen und Kugeln: Schale A mit 3 Kugeln entspricht Schale A' mit 3 Kugeln, Schale B mit 3 Kugeln entspricht Schale B' mit 3 Kugeln. Bei jedem Zug ist Anna gezwungen, die Symmetrie bezüglich der leeren Schale M zu zerstören. Die Strategie von Marie besteht gerade darin, den „Spiegelzug“ von Anna durchzuführen und die Symmetrie wieder herzustellen.
Nach jedem Zug von Anna liegt eine unsymmetrische Verteilung von Kugeln vor. Die Situation, dass gar keine Kugel da ist, ist aber eine symmetrische. Also kann Anna gegen Maries Strategie nicht gewinnen. Marie nimmt die letzte Kugel und gewinnt.

Korrespondenzzirkel Mathematik Klasse 6, 2000/2001
8. Serie

Aufgabe 30: Petras kleine Schwester Katrin hat mit 5 Würfeln einen Turm gebaut. Der größte Würfel hat eine Kantenlänge von $48\,\mathrm{cm}$, jeder nachfolgende jeweils die halbe Kantenlänge des vorangegangenen.
a) Wie hoch ist Katrins Turm?
b) Wie groß ist das Gesamtvolumen des Turms?
c) Wie groß ist die sichtbare Oberfläche des Turms?

Aufgabe 31: Unten seht Ihr das Netz eines Würfels. Welche der daneben abgebildeten Würfel können aus dem Netz gefaltet werden? Begründe, warum die restlichen Würfel nicht gefaltet werden können!
(Hinweis: Die Punkte auf den Würfelflächen sollen alle gleich groß sein.)



Aufgabe 32: Ein Dreieck hat die Innenwinkelsumme $180°$ und ein Viereck hat die Innenwinkelsumme $360°$. Durch Einzeichnen einer Diagonale im Fünfeck und einer (geeigneten) Diagonale im Sechseck löse die folgende Aufgabe (a):
(a) Welche Innenwinkelsumme hat ein Fünfeck, welche ein Sechseck?
(b) Welche Innenwinkelsumme hat ein n-Eck?

(c) Ein *reguläres* n-Eck ist ein n-Eck, bei dem alle Seiten gleich lang und alle Innenwinkel gleich groß sind. So sind z. B. das gleichseitige Dreieck und das Quadrat regulär, wogegen ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck und ein allgemeines Rhombus nicht regulär sind. Wie groß ist ein Innenwinkel eines regulären Fünfecks? Wie groß ist ein Innenwinkel eines regulären Sechsecks?
(d) Wie verändert sich die Größe des Innenwinkels eines regulären n-Ecks, wenn n immer größer wird?
(e) Gibt es reguläre n-Ecke, deren Innenwinkel größer als $170°$ und kleiner als $171°$ sind? Wenn ja für welche natürlichen Zahlen n ist das der Fall?

Aufgabe 33: (a) Es ist 6 Uhr morgens. Wie oft im Verlaufe der nächsten 12 Stunden stehen der große und der kleine Zeiger der Uhr genau übereinander?
(b) Welche Zeit vergeht von einem Übereinanderstehen bis zum nächsten? Runde Dein Ergebnis (in Minuten und Sekunden) auf volle Sekunden!
(c) Es ist 12 Uhr, Mittag. Um wie viel Uhr bilden die beiden Zeiger das nächste Mal einen rechten Winkel? Runde Dein Ergebnis auf volle Sekunden!

Korrespondenzzirkel Mathematik Klasse 6, 2000/2001
Lösungen der 8. Serie

Lösung zu 31. (1+2+3= 6 Punkte) Diese Aufgabe machte die wenigsten Probleme, obwohl die Teilaufgabe c) nicht ganz einfach war. Natürlich durfte man sich auch nicht verrechnen!
a) Katrins Turm ist 93cm hoch, denn der erste Würfel hat eine Kantenlänge von 48cm, der zweite die halbe Kantenlänge usw. bis zum fünften Würfel. Es ist also $\mathrm{Gesamth\ddot{o}he} = 48\,\mathrm{cm} + 24\,\mathrm{cm} + 12\,\mathrm{cm} + 6\,\mathrm{cm} + 3\,\mathrm{cm} = 93\,\mathrm{cm}$.
b) Das Gesamtvolumen des Turms beträgt $126387\,\mathrm{cm}^3$, denn das Volumen eines einzelnen Würfels der Kantenlänge a berechnet sich gemäß der Formel $V = a^3$. Somit beträgt die Summe der Volumina der einzelnen Würfel (in cm^3):

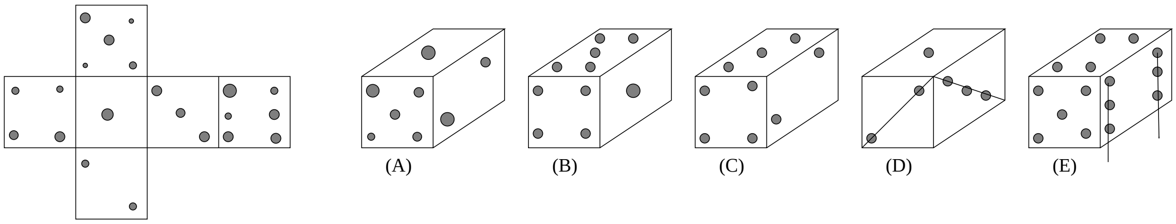
$$48^3 + 24^3 + 12^3 + 6^3 + 3^3 = 110592 + 13824 + 1728 + 216 + 27 = 126387.$$

c) Die sichtbare Oberfläche beträgt $14580\,\mathrm{cm}^2$. Die Oberfläche einer Würfelseite ist ein Quadrat. Von den 6 Seitenflächen sind 4 voll sichtbar. Die fünfte Fläche ist nur beim kleinsten Würfel sichtbar. Bei den anderen 4 Würfeln muss man die Seitenfläche des darauf liegenden Würfels abziehen. Somit ergibt sich für die einzelnen 5 Würfel eine sichtbare Fläche von (gemessen in cm^2):

$$\begin{aligned} 5 \cdot 48^2 - 24^2, \\ 5 \cdot 24^2 - 12^2, \\ 5 \cdot 12^2 - 6^2, \\ 5 \cdot 6^2 - 3^2, \\ 5 \cdot 3^2. \end{aligned}$$

Als Summe hat man dann

$$A = 5 \cdot 48^2 + 4 \cdot 24^2 + 4 \cdot 12^2 + 4 \cdot 6^2 + 4 \cdot 3^2 = 14580.$$



Lösung zu 32. (1+1+1+2+2=7 Punkte) Der einzige Würfel, der gefaltet werden kann ist (B). Im Netz (N) sind 2 und 5 gegenüberliegend, bei (A) jedoch benachbart, daher lässt sich (A) nicht falten. In (N) sind auch 3 und 4 gegenüberliegend, was bei (C) nicht stimmt. Bei (D) treffen sich die beiden eingezeichneten Geraden, die durch 2 und 3 bestimmt sind bei der 1, faltet man das Netz (N), so treffen sich diese Geraden aber bei der 6. Bei (E) zeigen die beiden parallelen Geraden der 6 in Richtung der 4, faltet man das Netz (N) zusammen, so zeigen die beiden Geraden jedoch zur 5. Daher gehen (D) und (E) auch nicht. Einzig (B) lässt sich aus dem Netz falten (hier sind alle Symmetrieforderungen erfüllt).

Lösung zu 33. (1+2+1+2+2=8 Punkte) a) Durch Einzeichnen einer Diagonalen in ein Fünfeck entsteht ein Dreieck und ein Viereck. Wenn man die Innenwinkelsummen beider Figuren addiert, so erhält man $180° + 360° = 540°$ als Innenwinkelsumme des Fünfecks. Ein Sechseck kann man in zwei Vierecke teilen, und man erhält die Innenwinkelsumme $720°$.
b) Ein n-Eck lässt sich immer in Dreiecke aufteilen: ein Viereck besteht aus 2 Dreiecken, ein Fünfeck aus 3 Dreiecken, ein Sechseck aus 4 Dreiecken usw.. Die Differenz aus der Eckenzahl und der Anzahl der Dreiecke ist also stets gleich 2. Weil ein Dreieck die Innenwinkelsumme von $180°$ hat, lautet die Formel für die Innenwinkelsumme s_n des n-Ecks:

$$s_n = (n-2)180°.$$

c) Weil alle Innenwinkel eines regulären Fünfecks gleich groß sind, muss ein Innewinkel $108° = 540°/5$ betragen. Die Innenwinkel eines regulären Sechsecks betragen dementsprechend $120° = 720°/6$.
d) Hier wollte ich eigentlich nur eine qualitative Aussage über die Veränderung der Innenwinkelgröße haben: Die Innenwinkel werden immer grösser und nähern sich einem gestreckten Winkel an. Sie bleiben stets kleiner als $180°$. Einige haben die Winkeländerung beim Übergang von n auf $n+1$ ganz ehrlich ausgerechnet.
Die allgemeine Formel für einen Innewinkel w_n eines regulären n-Ecks lautet also, da alle n Winkel gleich groß sind:

$$w_n = \frac{n-2}{n} 180°.$$

Also gilt für den Zuwachs:

$$w_{n+1} - w_n = \left(\frac{n-1}{n+1} - \frac{n-2}{n}\right) 180^\circ = \frac{2}{n(n+1)} 180^\circ.$$

Für $n = 3$ ist etwa der Zuwachs gleich $2/12 \cdot 180^\circ = 30^\circ$, was man schon weiß, da die Innenwinkeldifferenz von Quadrat und gleichseitigem Dreieck gleich $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ist.
e) Wir stellen die obige Gleichung für w_n nach n um:

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{n-2}{n} 180^\circ = \left(1 - \frac{2}{n}\right) 180^\circ \\ \frac{w_n}{180^\circ} &= 1 - \frac{2}{n} \\ \frac{2}{n} &= 1 - \frac{w_n}{180^\circ} \\ n &= \frac{2}{1 - \frac{w_n}{180^\circ}} \end{aligned}$$

Für $w_n = 170^\circ$ erhält man daher $n = 2/(1 - 17/18) = 36$ und für $w_n = 171^\circ$ hat man $n = 2/(1 - 171/180) = 2/(1 - 19/20) = 40$. Daher haben die regulären n-Ecke mit $n = 37$ oder $n = 38$ oder $n = 39$ einen Innenwinkel, der zwischen 170° und 171° liegt.

Lösung zu 34. (1+3+3=7 Punkte) a) Die Zeiger stehen innerhalb von 12 Stunden genau 11 Mal übereinander. Das kann man sich leicht anhand einer Uhr mit Zeigern überlegen.
b) Denkt man sich eine Uhr ganz ohne Anzeige, nur mit den beiden Zeigern, so wird klar, dass die Zeit, die von einem Übereinanderstehen der beiden Zeiger bis zum nächsten vergeht, immer *dieselbe* ist. (Sie hängt also nicht von der konkreten Uhrzeit ab). Da diese Differenz immer dieselbe ist und die Zeiger innerhalb von 12 Stunden genau 11 Mal übereinanderstehen, vergehen also

$$\frac{12\text{h}}{11} = 3927,\overline{27}\,\text{s} = 1\text{h} \;\; 5\text{min} \;\; 27\text{s}$$

von einem Übereinanderstehen bis zum nächsten.
b) Genau ein Viertel dieser Zeit vergeht dann vom Übereinanderstehen bis zum Senkrechtstehen. Das sind

$$\frac{3\text{h}}{11} = 981,818\,\text{s} = 16\text{min} \; 22\text{s}.$$

Um 12 Uhr 16 Minuten und 22 Sekunden stehen die beiden Zeiger zum ersten Mal (nach 12 Uhr) senkrecht aufeinander.