

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Axel Schüler

Mathecamp Ilmenau, 20. Juli 2014

Überblick

- 1 Was ist eine Konstruktion?
- 2 Konstruierbare Streckenlängen
- 3 Dreiteilung eines Winkels
- 4 Quadratur des Kreises und Verdopplung des Würfels
- 5 Konstruktion regulärer n -Ecke

Was ist eine Konstruktion?

- Verbinden zweier Punkte zu einer Geraden
- Zeichnen eines Kreises mit Mittelpunkt A durch einen Punkt B .
- Schnittpunkt zweier Geraden
- Schnittpunkte von Gerade und Kreis
- Schnittpunkte zweier Kreise

Grundkonstruktionen

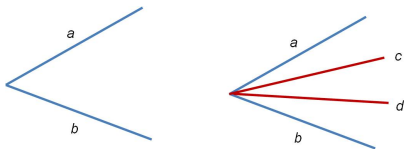
- Mittelsenkrechte
- Winkelhalbierende
- Lot von einem Punkt auf eine Gerade fallen
- Senkrechte in einem Punkt auf einer Geraden errichten
- Parallele zeichnen zu einer Geraden durch einen Punkt

Konstruierbare Zahlen

- Summe und Differenz
- Produkt und Quotient
- Quadratwurzeln
- Rekursive, schrittweise Konstruktion

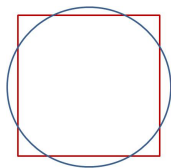
Dreiteilung eines Winkels

Problem: Gegeben sei ein beliebiger Winkel α aus den Schenkeln a und b . Man konstruiere c und d , die α dritteln.



- Winkeldreiteilung von 90° , 75° , 72° , 45° , 36° , 27° , 18° , 9° gehen
- Winkeldreiteilung von 60° geht nicht, algebraischer Ansatz
- Tomahawk und Origami helfen
Pierre Wantzel (1837)
Vorarbeiten: Carl Friedrich Gauß (1777-1855) und Evariste Galois (1811-1832)

Quadratur des Kreises

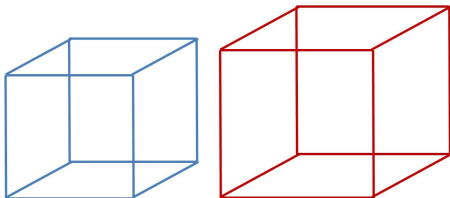


- Gegeben: Kreis mit Radius r
- Gesucht: Quadrat mit gleichem Flächeninhalt, Seitenlänge x

$$F = \pi r^2 = x^2 \implies x = r\sqrt{\pi}.$$

Carl von Lindemann (1882): π ist transzendent.

Verdopplung des Würfels (Delisches Problem)

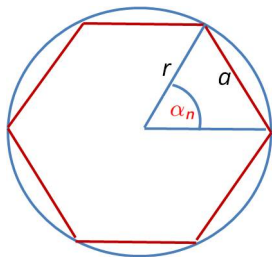


Gegeben sei ein Würfel der Kantenlänge a . Man konstruiere die Kantenlänge x eines Würfels mit doppeltem Volumen.

Algebraische Lösung:

$$2a^3 = x^3 \quad \implies \quad x = a\sqrt[3]{2}.$$

Reguläres n -Eck



Ein n -Eck heißt *regulär* (oder *regelmäßig*), wenn

- alle Seiten gleichlang
- alle Innenwinkel gleichgroß

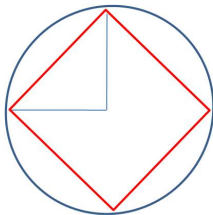
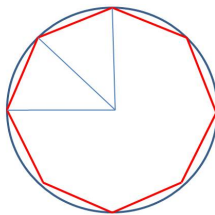
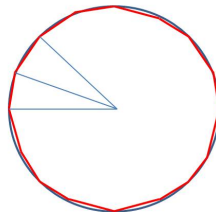
sind.

Reguläre n -Ecke haben einen Umkreis und demnach einen

Zentriwinkel: $\alpha_n = \frac{360^\circ}{n}$

n	3	4	5	6	7	8	9	10
α_n	120°	90°	72°	60°	$51,43^\circ$	45°	40°	36°

Verdopplung der Eckenzahl

Abbildung : $n = 4$  $n = 8$  $n = 16$

Durch **Halbierung des Zentriwinkels** erhält man aus einem regulären n -Eck ein reguläres $2n$ -Eck.

Der Primzahlfall $p = 3, 5, 17$

3, 5, 17, 257, 65537 sind FERMAT-Primzahlen, also von der Form $p = 2^{2^q} + 1$. Daher sind Dreieck, Fünfeck und Siebzehneck konstruierbar.

$$\cos \frac{360^\circ}{3} = -\frac{1}{2},$$

$$\cos \frac{360^\circ}{5} = \frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1),$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{360^\circ}{17} = & -\frac{1}{16} + \frac{1}{16} \sqrt{17} + \frac{1}{16} \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \\ & + \frac{1}{8} \sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}. \end{aligned}$$

Der allgemeine Fall

Das reguläre n -Eck ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn n die Form

$$n = 2^k p_1 p_2 \cdots p_r$$

hat, wobei k und r natürliche Zahlen sind und die p_i , $i = 1, \dots, r$ sind paarweise voneinander verschiedene Primzahlen der Form

$$p = 2^{2^q} + 1.$$

Die Folge der konstruierbaren n -Ecke lautet demnach

$(3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, \dots, 257, \dots)$.

Geschichtliches zum regulären n -Eck

Im Juni 1796 konnte man in dem in Jena erscheinenden „Intelligenzblatt der allgemeinen Literaturzeitung“ unter der Rubrik „Neue Entdeckungen“ lesen:

Es ist jedem Anfänger der Geometrie bekannt, dass verschiedene ordentliche Vielecke, namentlich das Dreieck, Fünfeck, Fünfzehneck, und die, welche durch wiederholte Verdopplung der Seitenzahl eines derselben entstehen, sich geometrisch konstruieren lassen. So weit war man schon zu Euklids Zeit und es scheint, man habe sich seitdem allgemein überredet, dass das Gebiet der Elementargeometrie sich nicht weiter erstrecke: wenigstens kenne ich keinen geglückten Versuch, ihre Grenzen auf dieser Seite zu erweitern.

Geschichtliches zum regulären n -Eck

Desto mehr, dünkt mich, verdient die Entdeckung Aufmerksamkeit, dass außer jenen ordentlichen Vielecken noch eine Menge anderer, z. B. das Siebzehneck, einer geometrischen Konstruktion fähig ist. Diese Entdeckung ist eigentlich nur ein Corollarium einer noch nicht ganz vollendeten Theorie von größerem Umfange, und sie soll, sobald diese ihre Vollendung erhalten hat, dem Publikum vorgelegt werden.

C. F. Gauß aus Braunschweig. Stud. der Mathematik zu Göttingen.
Es verdient angemerkt zu werden, dass Herr Gauß jetzt in seinem 18ten Jahre steht, und sich hier in Braunschweig mit ebenso glücklichem Erfolge der Philosophie und der klassischen Literatur als der höheren Mathematik gewidmet hat.

Literatur



Richard Courant und Herbert Robbins.

Was ist Mathematik?

Springer, Berlin. Heidelberg. New York, Springer.

5. Unveränderte Auflage, 2000.

ISBN-13: 978-3540637776