Zu einigen Aufgaben der Bundesrunde der 63. MO

Hans-Gert Gräbe, Leipzig

12. Juni 2024

Aufgaben und Lösungen sind den Materialien der Bundesrunde entnommen.

> **Aufgabe 631043:** Berta beschriftet die Seitenflächen eines Würfels mit den sechs Zahlen von Eins bis Sechs, wobei jede genau einmal vorkommt. Ihre Freundin Gerda beschriftet die Ecken dieses Würfels mit ganzen Zahlen so, dass 1 die kleinste an den Ecken vorkommende Zahl ist.
>
> Als beide fertig sind, stellt sich heraus, dass für jede der Kanten des Würfels gilt: Der Unterschied der Zahlen auf den beiden zur Kante gehörenden Seitenflächen ist gleich dem Unterschied der Zahlen auf den von der Kante verbundenen Ecken.
>
> Kann man aus diesen Informationen ermitteln, welche Zahlen Gerda bei ihrer Beschriftung verwendet hat und wie oft jede dieser Zahlen dabei vorkommt?

Lösung: Für die folgenden Überlegungen gehen wir von einer Beschriftung der Seitenflächen (Berta) und Ecken (Gerda) des Würfels aus, die sämtlichen Bedingungen der Aufgabenstellung genügt. Wir werden später sehen, dass eine solche Beschriftung auch tatsächlich möglich ist.

Läuft man, startend in einer Ecke, entlang der vier eine Seitenfläche des Würfels begrenzenden Kanten einmal um diese Seitenfläche, so addieren sich die für die Kanten berechneten Differenzen der Eckbeschriftungen, ausgestattet mit dem passenden Vorzeichen, zu null. Es addieren sich damit aber auch die für diese Kanten berechneten Differenzen der Seitenbeschriftungen, ausgestattet mit je einem passenden Vorzeichen, zu null.

Für Bertas Seitenbeschriftungen gilt somit: Da es nur je drei gerade und je drei ungerade Seitenbeschriftungen gibt, haben diese vier Differenzen nicht alle die gleiche Parität. Somit sind also genau zwei dieser Differenzen gerade. Insbesondere ist damit jede ungerade Seite des Würfels zu allen anderen ungeraden Seiten benachbart. Dies ist nur möglich, wenn alle drei ungeraden Seiten eine Ecke gemeinsam haben.

Es ist aber nur nötig, Beschriftungen zu unterscheiden, die nicht durch Kongruenzabbildungen des Würfels ineinander überführbar sind, da Kongruenzabbildungen die Lage von Ecken, Kanten und Seiten des Würfels zueinander nicht beeinflussen. Daher kann man den Würfel immer so drehen, dass die Seite mit der Eins oben und die Seite mit der Fünf vorne ist. Nun ist die Seite mit der Drei entweder schon rechts oder links. Im letzteren Fall, kann man aber den Würfel so spiegeln, dass die Seite mit der Drei rechts landet. Damit ist der Würfel fixiert.

Für die restlichen drei Seiten hat Berta sechs Möglichkeiten der Beschriftung. In den folgenden Skizzen sind diese Beschriftungsmöglichkeiten abgearbeitet, wobei wir jeweils versuchen, Gerdas Eckbeschriftungen zu rekonstruieren. Dabei schauen wir von oben in den Würfel hinein, sehen also fünf Seiten von innen. Die sechste (obere) Seite fehlt; sie wird stets von der Eins geziert.

An den Kanten sind die Unterschiede zwischen den Zahlen auf den an sie grenzenden Seitenflächen vermerkt. Zur Rekonstruktion von Gerdas Eckbeschriftungen ist auf jeder Kante auch eine Pfeilrichtung vermerkt, und zwar von der Ecke mit der kleineren Zahl zur Ecke mit der größeren. Für entsprechende Pfeilrichtungen gilt also, dass bei einem Umlauf um eine Würfelseite Gerdas Zahlen an in Pfeilrichtung aufeinanderfolgenden Ecken steigen und an entgegen der Pfeilrichtung aufeinanderfolgenden Ecken sinken.

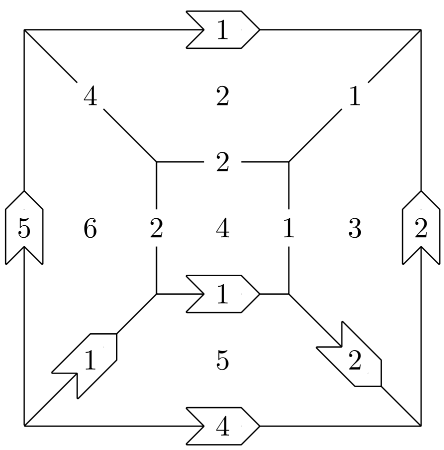
> *Daher muss die Summe der Zahlen an den Kanten, bei denen Umlaufrichtung und Pfeilrichtung übereinstimmen, gleich der Summe der Zahlen an den übrigen Kanten der umlaufenen Seitenfläche sein. (1)*

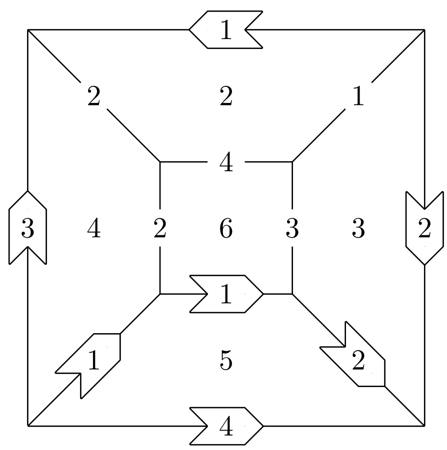
Wir verwenden diese Eigenschaft zur Rekonstruktion der Pfeilrichtungen. Da sie erfüllt bleibt, wenn alle Pfeilrichtungen umgedreht werden, können wir zunächst für eine Kante (vorne oben) die Pfeilrichtung frei wählen (von links nach rechts). Es sind dann ggf. am Ende alle Pfeilrichtungen umzudrehen, um Gerdas Eckbeschriftungen zu rekonstruieren.

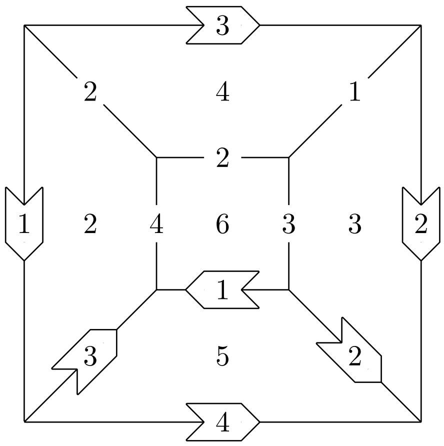
Man beachte hierbei: Mit einem Pfeil an einer Seitenfläche stehen bereits alle anderen Pfeilrichtungen auf den Kanten dieser Seitenfläche eindeutig fest, sofern 2die größte der vier Zahlen auf den Kanten dieser Seitenfläche gleich der Hälfte der Summe S dieser vier Zahlen ist, oder nur durch eine einzige der anderen vier Zahlen zur Hälfte der Summe S ergänzt werden kann.

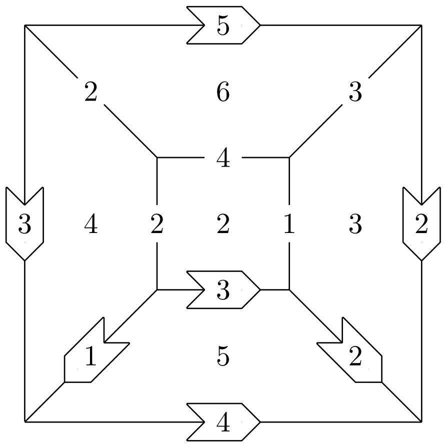
In der Tat sind damit in jedem der sechs Fälle die Pfeilrichtungen der Vorderseite und der Oberseite des Würfels wie in den Skizzen zu sehen eindeutig festgelegt.

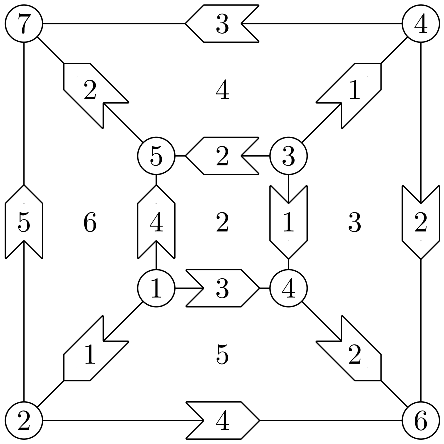
Auf der rechten Seitenfläche des Würfels ergibt sich aber in den ersten vier Fällen keine Möglichkeit mehr, die zwei fehlenden Pfeile entsprechend unserer Bedingung (1) festzulegen, da wir entweder zwei gleichgerichtete Zweien und auf den restlichen Kanten zwei Einsen oder zwei entgegengesetzt gerichtete Zweien und auf den restlichen Kanten eine Eins und eine Drei vorfinden.

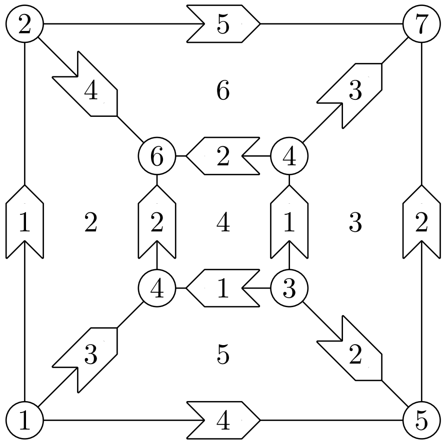












In den verbleibenden zwei Fällen lässt sich die Pfeilrichtung auf der Rückseite und dann auf der Unterseite des Würfels mit Bedingung (1) eindeutig bestimmen, wodurch alle Pfeile festgelegt sind.

In diesen zwei Fällen ist in der Tat eine zulässige Beschriftung für Gerda wie in der jeweiligen Skizze angegeben möglich. Ändert man dabei die Eckbeschriftung 1 in $1 + x$ ab, so ändert sich jede Eckbeschriftung z zu $z + x$, weswegen die Bedingung, dass 1 die kleinste von Gerdas Zahlen sei, nur durch die angegebenen zwei Beschriftungen erfüllt wird.

Kehrt man nun alle Pfeilrichtungen um, so ergeben sich zwei weitere zulässige Beschriftungen für Gerda, wenn man jede von Gerdas Zahlen in den letzten zwei Skizzen durch ihren Unterschied zur Acht ersetzt.

In jedem dieser vier Fälle hat Gerda offenbar die Zahlen $1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 7$ beim Beschriften der Ecken verwendet. Man kann also aus den in der Aufgabenstellung gegebenen Informationen eindeutig ermitteln, welche Zahlen Gerda bei ihrer Beschriftung verwendet hat und wie oft jede dieser Zahlen dabei vorkommt.

Aufgabe 631045: Beweisen Sie: Ist n eine positive ganze Zahl, so ist $\dfrac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ ganzzahlig.

Erste Lösung: Die Zahl $\dfrac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, n^2 Personen in n (nicht geordnete) Mannschaften zu je n Personen aufzuteilen, wenn es auch nicht auf die Reihenfolge der Mannschaften ankommt: Zum Aufteilen in Mannschaften kann man die n^2 Personen zu einem Quadrat mit n Spalten und Zeilen aufstellen und dann jeweils die n Personen einer Zeile eine Mannschaft bilden lassen. Es gibt $\left(n^2\right)!$ Aufstellungen und die Aufteilung in Mannschaften ändert sich nicht, wenn man innerhalb einer der n Zeilen die Reihenfolge ändert, und auch nicht, wenn man die Reihenfolge der Zeilen ändert. Insgesamt ergeben also jeweils $(n!)^{n+1}$ Aufstellungen die gleiche Aufteilung. Die Ganzzahligkeit folgt unmittelbar.

Zweite Lösung: Zum Beweis zeigen wir, dass jede Primzahl p in der Primfaktorzerlegung des Zählers mindestens so häufig vorkommt wie in der Primfaktorzerlegung des Nenners. Es bezeichne dazu im Folgenden $a_p(m)$ für eine Primzahl p die Anzahl der Faktoren p in der Primfaktorzerlegung der positiven ganzen Zahl m. Es gilt damit insbesondere $a_p(m) = 0$, falls p die Zahl m nicht teilt, und

$$m = p_1^{a_{p_1}(m)} \cdot p_2^{a_{p_2}(m)} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_{p_k}(m)} ,$$

falls p_1, p_2,..., p_k die verschiedenen Primteiler der Zahl m sind. Zu zeigen ist dann

$$a_p\left(\left(n^2\right)!\right) \geq (n+1)\ a_p(n!)$$

für alle Primzahlen p. Für jede positive ganze Zahl m gilt dabei

$$a_p(m!) = \left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{p^3} \right\rfloor + \ldots ,$$

wobei die Summe auf der rechten Seite nur endlich viele Terme ungleich null hat und deswegen sinnvoll ist. Diese Identität gilt, weil im Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (m-1) \cdot m$ genau $\left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor$ Faktoren mindestens einen Primfaktor p haben, genau $\left\lfloor \frac{m}{p^2} \right\rfloor$ Faktoren mindestens einen zweiten Primfaktor p haben, genau $\left\lfloor \frac{m}{p^3} \right\rfloor$ Faktoren mindestens einen dritten Primfaktor p haben, usw.

Sei nun $k \geq 0$ die natürliche Zahl, für die $p^k \leq n < p^{k+1}$ gilt.

Dann ist $\frac{n^2}{p^{k+j}} \geq \frac{n}{p^j}$ für jede natürliche Zahl $j \geq 0$, und wegen $\left\lfloor \frac{n^2}{p^j} \right\rfloor \geq n \cdot \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor$ und $\left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor = 0$ gilt

$$\begin{aligned}
a_p\left(\left(n^2\right)!\right) &\geq \left\lfloor \frac{n^2}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n^2}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n^2}{p^3} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n^2}{p^{2k}} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \frac{n^2}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n^2}{p^2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n^2}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n^2}{p^{k+1}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n^2}{p^{k+2}} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n^2}{p^{k+k}} \right\rfloor \\
&\geq n \cdot \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + n \cdot \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \ldots + n \cdot \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \\
&= (n+1)\left(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor\right) = (n+1)\ a_p(n!) .
\end{aligned}$$

Aufgabe 631046: Seien A_1B_1C und A_2B_2C zwei verschiedene, nicht entartete Dreiecke mit

$$|A_1C| + |B_1C| = |A_2C| + |B_2C| \;, \tag{1}$$

wobei die Punkte A_1, A_2, C und B_1, B_2, C jeweils auf einer gemeinsamen Geraden liegen sollen. Weiterhin sei P_1 der Punkt im Inneren der Strecke $\overline{A_1B_1}$ mit

$$\frac{|A_1P_1|}{|B_1P_1|} = \frac{|B_1C|}{|A_1C|} \,. \tag{2}$$

Beweisen Sie, dass P_1 außerhalb des Dreiecks A_2B_2C liegt.

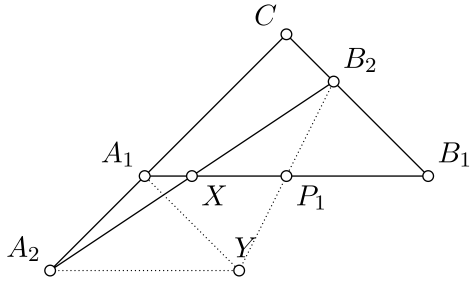
Hinweis: Ein Dreieck ist entartet, wenn seine drei Eckpunkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Lösung: Wenn A_1 und A_2 auf verschiedenen Seiten von C liegen oder B_1 und B_2 auf verschiedenen Seiten von C liegen, dann liegt das komplette Innere der Strecke $\overline{A_1B_1}$ außerhalb des Dreiecks A_2B_2C, denn die beiden Geraden A_1A_2 und B_1B_2 teilen dann die Ebene in vier Teile auf, und das Innere der Strecke $\overline{A_1B_1}$ liegt in einem anderen Teil als das Innere des Dreiecks A_2B_2C.

O. B. d. A. können wir nun annehmen, dass A_2, A_1, C und B_1, B_2, C in dieser Reihenfolge jeweils auf einer Geraden liegen (ansonsten vertauschen wir die Bezeichnungen von A_1 und A_2 mit jenen von B_1 und B_2). Es ergibt sich $|A_1C| < |A_2C|$ und $|B_1C| > |B_2C|$. B_1 liegt also außerhalb des Dreiecks A_2B_2C und die Strecken $\overline{A_1B_1}$ und $\overline{A_2B_2}$ schneiden sich in einem Punkt X. Insbesondere gilt mit (1):

$$|B_1B_2| = |A_1A_2| \tag{3}$$

Wir wollen nun die gegebene Verhältnisgleichung (2) in unsere Betrachtungen einarbeiten und konstruieren uns dazu eine Strahlensatzfigur:



Sei Y der Schnittpunkt der Parallelen zu B_1B_2 durch A_1 mit der Geraden B_2P_1. Es folgt nach Strahlensatz und mit (2) und (3):

$$\frac{|A_1Y|}{|A_1A_2|} = \frac{|A_1Y|}{|B_1B_2|} = \frac{|A_1P_1|}{|B_1P_1|} = \frac{|B_1C|}{|A_1C|}.$$

Da außerdem nach Stufenwinkelsatz $|\sphericalangle\, A_1CB_1| = |\sphericalangle\, A_2A_1Y|$ gilt, sind die Dreiecke A_1B_1C und A_2YA_1 zueinander ähnlich, und zwar mit $|\sphericalangle\, YA_2A_1| = |\sphericalangle\, B_1A_1C|$.

Nach Außenwinkelsatz im Dreieck A_2XA_1 gilt somit:

$$|\sphericalangle YA_2C| = |\sphericalangle YA_2A_1| = |\sphericalangle B_1A_1C| = |\sphericalangle B_2A_2C| + |\sphericalangle A_1XA_2| > |\sphericalangle B_2A_2C| \ .$$

Folglich liegen die Punkte C und Y auf verschiedenen Seiten der Geraden A_2B_2, womit Strecke $\overline{B_2Y}$ und Dreieck A_2B_2C lediglich den Punkt B_2 gemeinsam haben.
Da P_1 nach Konstruktion von Y auf $\overline{B_2Y}$ liegt, aber gewiss nicht mit B_2 zusammenfällt, liegt P_1 außerhalb des Dreiecks A_2B_2C, was zu zeigen war.
Lösungsvariante: Wie oben nehmen wir an, dass A_2, A_1, C und B_1, B_2, C in dieser Reihenfolge jeweils auf einer Geraden liegen. X sei wieder der Schnittpunkt der Geraden A_1B_1 und A_2B_2.
Nach dem Satz des Menelaos, angewendet auf das Dreieck A_1B_1C und die Gerade A_2B_2, ergibt sich

$$\frac{|A_1A_2|}{|A_2C|} \cdot \frac{|CB_2|}{|B_2B_1|} \cdot \frac{|B_1X|}{|XA_1|} = 1$$

und wegen $|A_1B_1| = |B_1B_2|$ weiter

$$\frac{|A_1X|}{|B_1X|} = \frac{|B_2C|}{|A_2C|} \, .$$

Wegen $|A_1C| < |A_2C|$ und $|B_1C| > |B_2C|$ ist dann

$$\frac{|A_1X|}{|B_1X|} = \frac{|B_2C|}{|A_2C|} < \frac{|B_1C|}{|A_1C|} = \frac{|A_1P_1|}{|B_1P_1|} \, .$$

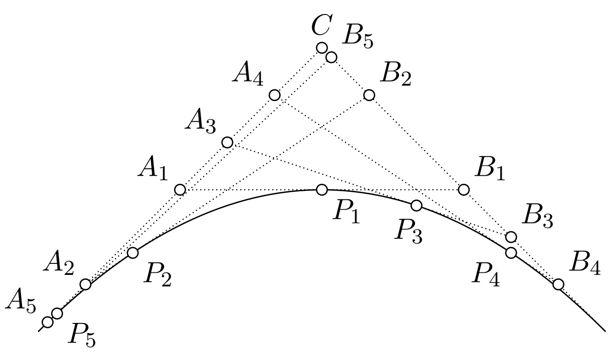
Somit liegt X zwischen A_1 und P_1 und folglich P_1 nicht im Dreieck A_2B_2C.
Anmerkung: Betrachtet man weitere Punkte $A_3, A_4, \ldots, A_n$ auf der Halbgeraden $\overrightarrow{CA_1}$ sowie Punkte $B_3, B_4, \ldots, B_n$ auf der Halbgeraden $\overrightarrow{CB_1}$ mit

$$|A_kC| + |B_kC| = |A_1C| + |B_1C| \ ,$$

und Punkte P_k auf $\overline{A_kB_k}$ mit

$$\frac{|A_kP_k|}{|B_kP_k|} = \frac{|B_kC|}{|A_kC|} \, ,$$

so liegen die Punkte P_k auf einer Parabel und sind die Berührpunkte der Tangenten A_kB_k an diese Parabel.

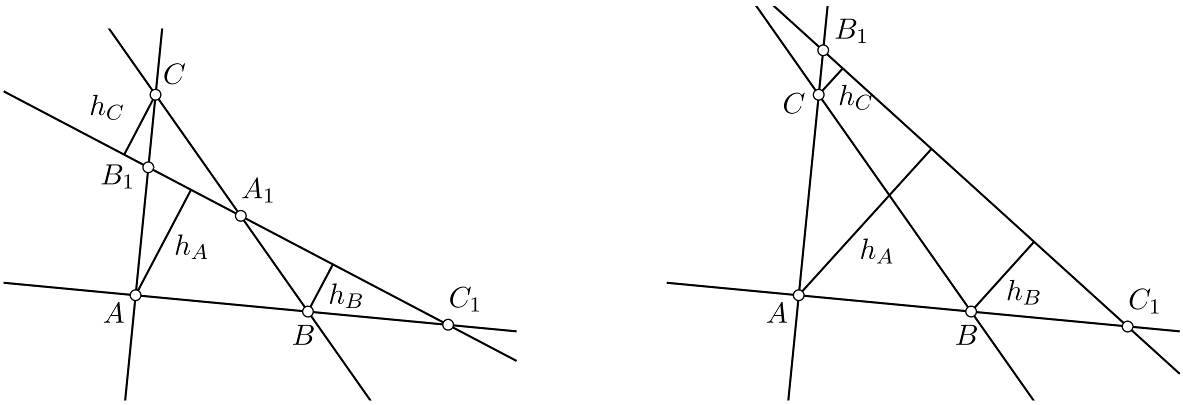


Im Beweis wurde der Satz des Menelaos verwendet.

Satz 1 (Satz des Menelaos) *Drei Punkte A_1, B_1 und C_1 auf den Trägergeraden BC, AC und AB der Seiten eines Dreiecks ABC liegen genau dann auf einer Geraden g, die nicht durch einen der Eckpunkte des Dreiecks verläuft, wenn für die Teilverhältnisse*

$$TV(AB, C_1) \cdot TV(BC, A_1) \cdot TV(CA, B_1) = 1, \quad \textit{also} \quad \frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1$$

gilt.



Beweis: Liegen A_1, B_1 und C_1 auf einer Geraden g und sind h_A, h_B und h_C die Lote aus den Eckpunkten des Dreiecks auf diese Gerade, so gilt

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{h_A}{h_B}, \ \frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{h_B}{h_C} \text{ und } \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{h_C}{h_A},$$

wobei im Fall, dass g zwei Dreiecksseiten im Inneren schneidet (linkes Bild), zwei Teilungen innere sind und damit das Teilverhältnis negativ, während im Fall, dass g komplett außerhalb des Dreiecks verläuft (rechtes Bild), alle drei Teilverhältnisse positiv sind. In jedem der beiden Fälle ist das Produkt der Quotienten wie behauptet gleich Eins.

Ist umgekehrt das Produkt der Quotienten gleich Eins, g die Gerade durch A_1 und B_1 und C_1' der Schnittpunkt von g und AB, so gilt einerseits

$$TV(AB, C_1) \cdot TV(BC, A_1) \cdot TV(CA, B_1) = 1$$

nach Voraussetzung und andererseits

$$TV(AB, C_1') \cdot TV(BC, A_1) \cdot TV(CA, B_1) = 1$$

nach dem bereits bewiesenen Teil des Satzes. Es folgt $TV(AB, C_1') = TV(AB, C_1)$ und damit $C_1 = C_1' \in g$. $\square$