Lösen von Gleichungssystemen

Christoph Schulze, Brandis

7. April 2013

Grundlegende Lösungsmethoden

Elimination von Variablen Bei der Elimination von Variablen werden die Gleichungen so kombiniert, dass neue Gleichungen mit weniger Variablen entstehen. Bleibt am Ende nur noch eine Gleichung mit einer Variable übrig, welche man lösen kann, dann kann man die Lösung in das Ausgangsgleichungssystem einsetzen und hat eine Unbekannte weniger. Die Verfahren Einsetzen, Gleichsetzen und Addition/Subtraktion sind aus der Schule bekannt. Lineare Gleichungssysteme können dadurch vollständig gelöst werden (Gaußsches Eliminationsverfahren). Bei nicht-linearen Gleichungen kann man durch Faktorisierung oder Binomische Formeln (oder Binomischen Lehrsatz) neue Informationen gewinnen.

Polynomielle Gleichungen Quadratische Gleichungen können durch die bekannte Lösungsformel gelöst werden. Auch für Gleichungen dritten und vierten Grades gibt es allgemeine Verfahren, welche jedoch schwieriger sind. Bei polynomiellen Gleichungen $p(x) = 0$ bietet es sich an eine Lösung x_0 zu raten und durch Polynomdivision $p(x) : (x - x_0)$ erhält man ein neues Polynom, welches einen Grad kleiner ist. Das Verfahren kann man nun fortsetzen, bis man ein quadratisches Polynom erhält. Gleichungen mit Wurzeln können durch Quadrieren in polynomielle Gleichungen überführt werden.

Substitutionen Substitutionen sind häufig notwendig um die Gleichungssysteme in Systeme mit bekannten Lösungsverfahren zu überführen. Man kann nicht immer direkt an der Gleichung erkennen, welche Substitutionen geeignet sind.

Symmetrien Symmetrien ermöglichen es ohne Beschränkung der Allgemeinheit eine Ordnung der Zahlen anzunehmen. Symmetrische Polynome können durch elementarsymmetrische Polynome dargestellt werden, welche man als Koeffizienten von einem Polynom einer Variablen auffassen kann.

Weitere Verfahren Zusätzlich zu den oberen Verfahren tritt es auf, dass Gleichungen geometrisch interpretiert werden können, die Gleichungen gerade Grenzfälle von Ungleichungen sind (insbesondere, wenn mehr Variablen als Gleichungen vorhanden sind) oder eine trigonometrische Substitution zum Ziel führt.

Aufgabe 1 Bestimme alle reellen Lösungen der Gleichung $3^{2x} - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 = 0$.

Aufgabe 2 Bestimme alle reellen Lösungen der Gleichungen

$$\begin{aligned} &(a)\ \sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 4 \\ &(b)\ |x^2 - 4| + |2x - 6| = m \end{aligned}$$

wobei m ein reeller Parameter sei.

Aufgabe 3 (MO 461014)
Bestimme alle reellen Lösungen der Gleichung

$$x^6 + 2x^5 - x^4 - 4x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Aufgabe 4 (MO 371331)
Man bestimme alle Paare (x, y) reeller Zahlen, welche das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} xy(x+y) &= 30 \\ x^3 + y^3 &= 35 \end{aligned}$$

erfüllen.

Aufgabe 5 (IMO Longlist 1970)
Löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + xy &= a^2 + ab \\ y^2 + xy &= a^2 - ab \end{aligned}$$

mit gegebenen reellen Zahlen $a, b,\ a \neq 0$.

Aufgabe 6 Löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a + bcd &= 2 \\ b + cda &= 2 \\ c + dab &= 2 \\ d + abc &= 2. \end{aligned}$$

Aufgabe 7 Löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + 2yz &= 3 \\ y^2 + 2zx &= 3 \\ z^2 + 2xy &= 3. \end{aligned}$$

Lösen mittels elementarsymmetrischen Polynomen

Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass jedes nicht-konstanten Polynom eine komplexe Nullstelle besitzt. Eine direkte Folge aus diesem Satz und der Eindeutigkeit der Polynomdivision ist der Satz: Jedes normierte (komplexe) Polynom $n-ten$ Grades $p(x)$ lässt sich eindeutig bis auf Vertauschen der Faktoren in der Form $(x-\alpha_1)\cdot\dots\cdot(x-\alpha_n)$ schreiben, wobei die α_i $(i=1,\dots,n)$ komplexe Zahlen sind. Insbesondere hat $p(x)$ in ihrer Vielfachheit genau n Nullstellen.
Wie hängt nun die übliche Darstellung $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ mit der obigen Darstellung zusammen? Dazu führen wir zunächst die elementarsymmetrischen Polynome ein:

$$\begin{aligned}
\sigma_1(x_1,...,x_n) &:= x_1+x_2+x_3+\dots+x_n\\
\sigma_2(x_1,...,x_n) &:= x_1x_2+x_1x_3+\dots+x_1x_n+x_2x_3+\dots+x_{n-1}x_n\\
\sigma_3(x_1,...,x_n) &:= x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\dots+x_1x_2x_n+x_1x_3x_4+\dots+x_{n-2}x_{n-1}x_n\\
&\dots\\
\sigma_n(x_1,...,x_n) &:= x_1x_2x_3\dots x_n
\end{aligned}$$

σ_i ist also die Summe aller möglichen Produkte mit i verschiedenen Faktoren aus $\{x_1,\dots,x_n\}$.
Die Antwort bildet nun der VIETAsche Wurzelsatz, welcher durch mehrfaches Anwenden des Distributivgesetzes bewiesen werden kann:
Es gilt $p(x)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\sigma_2x^{n-2}\mp\dots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}x+(-1)^n\sigma_n$, wobei die elementarsymmetrischen Polynome über die Nullstellen $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ gebildet werden.
Dies bedeutet, dass $(x_1,\dots,x_n)$ genau dann eine Lösung des Gleichungssystems

$$\sigma_1(x_1,...,x_n)=-a_{n-1},\ \sigma_2(x_1,...,x_n)=a_{n-2},\ \sigma_3(x_1,...,x_n)=-a_{n-3},\dots,\ \sigma_n(x_1,...,x_n)=(-1)^na_0$$

ist, wenn $x_1,\dots,x_n$ eine Permutation der Nullstellen $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ ist.

Beispiel 1

$$\begin{aligned}
x+y+z&=1\\
xy+yz+xz&=-3\\
xyz&=-2
\end{aligned}$$

Lösung: x, y und z sind also die Nullstellen des Polynoms t^3-t^2-3t+2. Dieses Polynom hat 2 als Nullstelle. Polynomdivision durch $t-2$ ergibt t^2+t-1. Dieses Polynom hat die Nullstellen $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Es ergeben sich die Lösungen $(2,\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2}),(2,\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$, $(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},2,\frac{-1-\sqrt{5}}{2}),(\frac{-1-\sqrt{5}}{2},2,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}),(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2},2),(\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2},2)$.

Der Hauptsatz über symmetrische Polynome (siehe [1]) liefert uns nun einen Ansatz um allgemeinere symmetrische Gleichungssysteme zu lösen. Er besagt: Jedes symmetrische Polynom in $x_1,\dots,x_n$ lässt sich als Polynom in $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ schreiben. Ist also ein polynomielles, symmetrisches Gleichungssystem gegeben, so kann man es in ein Gleichungssystem in $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ überführen, das neue System lösen und daraus die Werte $x_1,x_2,\dots,x_n$ bestimmen.
Das folgende Beispiel zeigt, dass man auch Nenner zulassen kann:

Beispiel 2

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3 &= 20 \\ x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y &= 8 \\ \frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx} &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Lösung: Es gilt $x^3+y^3+z^3 = \sigma_1^3 - 3(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y) - 6\sigma_3$. Andererseits ist $x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y = \sigma_2\sigma_1 - 3\sigma_3$. Mit $\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}$ ergibt sich ein Gleichungssystem in σ_1, σ_2 und σ_3:

$$\sigma_1^3 - 24 - 6\sigma_3 = 20,\ \ \sigma_2\sigma_1 - 3\sigma_3 = 8,\ \ \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = -\frac{1}{3}$$

Setzt man die letzte Gleichung in die erste Gleichung ein, so erhält man $\sigma_1^3 + 18\sigma_1 - 44 = 0$ und als einzige reelle Lösung $\sigma_1 = 2$. Es folgt $\sigma_3 = -6$ und $\sigma_2 = -5$ und man erhält x,y und z als Nullstellen von $t^3 - 2t^2 - 5t + 6$. Man erhält $(3, 1, -2)$ und alle Permutationen davon als Lösungen.

Zu weiteren interessanten Eigenschaften über symmetrische und antisymmetrische Polynome sei auf [1] verwiesen. Unter [9] findet man eine Übersicht allgemein zu Polynomen. Dort sind beispielsweise auch die NEWTONschen Identitäten aufgeführt, welche den Zusammenhang zwischen Potenzsummen und elementarsymmetrischen Polynomen herstellen.

Aufgabe 8 (IMO 1961)
Löse zu gegebenen reellen Zahlen a, b das Gleichungssystem

$$x + y + z = a,\ \ x^2 + y^2 + z^2 = b^2,\ \ xy = z^2.$$

Welche Bedingungen müssen a, b erfüllen, damit die Lösungen positiv und verschieden sind?

Aufgabe 9 (IMO Longlist 1978)
Die Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ habe drei (nicht notwendigerweise verschiedene) reelle Lösungen t, u, v. Wie muss man a, b und c wählen, damit t^3, u^3 und v^3 die Nullstellen von $x^3 + a^3x^2 + b^3x + c^3 = 0$ sind?

Aufgabe 10 Seien x_1, x_2 und x_3 die Nullstellen von $x^3 + 3x^2 - 3x - 4$.
Man berechne $\frac{1}{x_1+x_2} + \frac{1}{x_2+x_3} + \frac{1}{x_3+x_1}$ und $\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \frac{1}{x_3+1}$.

Aufgabe 11 Bestimme alle Tripel reeller Zahlen (x, y, z) die das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4\sqrt{2}xyz \\ xy + xz + yz &= -\frac{1}{2}(z - 2\sqrt{2})^2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= z \end{aligned}$$

erfüllen.
Hinweis: Das System ist symmetrisch in x und y.

Lösen mittels Extremalprinzip

Wie bereits oben erläutert, ist es bei symmetrischen Gleichungssystemen möglich sich eine Ordnung vorzugeben, bzw. bei zyklischen Gleichungssystemen ein extremales Element zu wählen. Extremal kann dabei größtes oder kleinstes Element bedeuten, aber es kann auch eine andere Eigenschaft, wie der Betrag, sein, die maximiert wird.

Beispiel 3 (IMO 1965,2)
Betrachte das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

dessen Koeffizienten folgenden Bedingungen genügen:
(a) a_{11}, a_{22}, a_{33} sind positive reelle Zahlen
(b) alle anderen Koeffizienten sind negativ
(c) die Summe aller Koeffizienten einer Gleichung ist positiv
Man weise nach, dass $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ die einzige Lösung des Systems ist.
Lösung: Sei o.B.d.A. $|x_1| \geq |x_2| \geq |x_3|$. Nun gilt $|a_{11}x_1| \geq |-(a_{12}+a_{13})x_1| = |a_{12}x_1| + |a_{13}x_1| \geq |-a_{12}x_2| + |-a_{13}x_3| \geq |-a_{12}x_2 - a_{13}x_3|$. Nach der ersten Gleichung muss hier Gleichheit gelten, aber diese tritt nur auf, wenn in der Ungleichungskette jedes Relationszeichen scharf ist. Insbesondere folgt bei $|a_{11}x_1| = |-(a_{12}+a_{13})x_1|$ sofort $x_1 = 0$ und damit $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Beispiel 4 (IMO Longlist 1972, 2)
Finde alle reellen Werte des Parameters a, sodass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^4 &= yz - x^2 + a \\ y^4 &= zx - y^2 + a \\ z^4 &= xy - z^2 + a \end{aligned}$$

höchstens eine reelle Lösung besitzt.
Lösung: Wir können uns auf den Fall $a \leq 0$ beschränken, da sonst $x = y = z = \pm\sqrt[4]{a}$ Lösungen des Systems sind. Ist nun o.B.d.A. x die Betragsgrößte der drei Zahlen, so folgt $x^4 \geq 0 \geq yz - x^2$. Also kann Gleichheit bei $x^4 \geq yz - x^2 + a$ nur dann gelten, wenn $a = 0$, $x = 0$ und $yz = x^2$. Da x den größten Betrag besitzt, folgt $x = y = z = 0$. Der gesuchte Bereich ist demnach $a \leq 0$.

Aufgabe 12 (MO 361344)
Man bestimme alle Tripel reeller Zahlen (x, y, z), welche das Gleichungssystem

$$x^3 = 2y - 1,\ y^3 = 2z - 1,\ z^3 = 2x - 1$$

erfüllen.

Aufgabe 13 Finde alle positiven Lösungen des Gleichungssystems

$$x_1 + x_2 = x_3^2,\ x_2 + x_3 = x_4^2,\ x_3 + x_4 = x_5^2,\ x_4 + x_5 = x_1^2,\ x_5 + x_1 = x_2^2.$$

Aufgabe 14 Finde alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\frac{4x^2}{4x^2+1} = y,\ \frac{4y^2}{4y^2+1} = z,\ \frac{4z^2}{4z^2+1} = x.$$

Aufgabe 15 Löse die Gleichung

$$\sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x-5}}}} = 5.$$

Hinweis: Wandle die Gleichung in ein Gleichungssystem um.

Aufgabe 16 (IMO Shortlist 1993)
Löse das folgende Gleichungssystem, in dem a eine gegebene Zahl mit $|a| > 1$ ist:

$$x_1^2 = ax_2 + 1,\ x_2^2 = ax_3 + 1,\ \ldots,\ x_{999}^2 = ax_{1000} + 1,\ x_{1000}^2 = ax_1 + 1.$$

Hinweis: Unterscheide, ob es positive x_i gibt oder nicht.

Literatur

[1] Gleichungssysteme und symmetrische Polynome, Jens Wirth, 2006 (KoSemNet)

[2] Ungewöhnliche Gleichungssysteme bei der Mathematik-Olympiade, Eric Müller (`http://www.mathematikinformation.info/`)

[3] The IMO Compendium, Springer, 2006

[4] `http://www.mathematik-olympiaden.de`

[5] Problem Solving Strategies, Arthur Engel, Springer, 1998

[6] $\sqrt{\text{WURZEL}}$, `http://www.wurzel.org`

[7] `http://www.math4u.de`

[8] Mathematical Olympiad Challenges, Titu Andreescu, Razvan Gelca, Birkhäuser, 2004

[9] Polynome, Axel Schüler, 2000 (KoSemNet)