

Das Doppelte Abzählen

Oskar Nenoff und Axel Schüler

1.10.2025

1 Graphen und Polyeder

Aufgabe 1: Ein konvexes Polyeder sei nur von Dreiecken begrenzt. Zeige, dass für die Anzahl seiner Ecken e und Flächen f gilt $k = 3f/2$.

Lösung zu 1. An dieser Aufgabe kann man die erste Grundvariante des doppelten Abzählens gut erklären. Gegeben sei eine Matrix aus z Zeilen und s Spalten, die nur die Einträge 0 oder 1 hat. Dann kann man die Anzahl der Einsen einmal über die Zeilen zählen und einmal über die Spalten. Das Ergebnis ist in beiden Fällen die Gesamtzahl der Einsen in der Matrix.

Im obigen Beispiel könnten die Zeilen die f Dreiecksflächen sein und die Spalten können die k Kanten sein. In der Matrix steht bei (i, j) eine 1, wenn die Fläche F_i die Kante K_j enthält. Da jede Fläche ein Dreieck ist, enthält sie genau drei Kanten, somit hat die Matrix $3f$ Einträge. Da jede Kante zu genau zwei Flächen gehört, hat die Matrix genau $2k$ Einträge. Somit gilt $3f = 2k$, woraus die Behauptung folgt.

Aufgabe 2: Wir betrachten einen Freundesnetzwerk. Zwei Personen x und y sind dabei entweder befreundet oder kennen sich nicht. Diese Relation ist symmetrisch (d.h. es kann nicht sein, dass x y kennt aber umgekehrt nicht). Führe folgende Notation ein: $x \sim y$ heißt x ist befreundet mit y ; $x \not\sim y$ heißt x ist nicht befreundet mit y .

Für unsere Gruppe gelte folgende Eigenschaft:

- Es gibt insgesamt n Leute
- Jeder hat genau k Freunde
- x und y mit $x \sim y$ haben genau l gemeinsame Freunde
- x und y mit $x \not\sim y$ haben genau m gemeinsame Freunde

Zu zeigen:

$$m(n - k) - k(k - l) + k - m = 0$$

Lösung zu 2.

Einige Worte zur Situation

Wir haben uns überlegt, dass es solche Netzwerke tatsächlich gibt, nämlich z.B. vollständige Graphen, den Drei-Ring, den Vier-Ring und den Torus der Seitenlänge drei, d.h. $G = (V, E)$ mit den Knoten (entspricht Leuten) $V = \{(x_1, x_2) : x_i \in \{0, 1, 2\}\}$ und den Kanten (entspricht Freundschaften) folgendermaßen

$$x \sim y \Leftrightarrow x \text{ und } y \text{ unterscheiden sich in genau einer Koordinate}$$

Beweis

Zuerst überlegen wir uns, dass es sinnvoll ist, die Gleichung zu etwas umzuformen, was man als Anzahl interpretieren kann, sodass wir dann doppelt abzählen können:

$$m(n - k - 1) = k(k - l - 1).$$

Was sind Interpretationen für die einzelnen Terme?

- $n - k - 1$: Fixiere ein beliebiges x . Wie viele Leute gibt es, die x nicht kennen? Wenn man das als Formel aufschreiben will $n - k - 1 = |\{y : x \not\sim y\}|$.
- $k - l - 1$: Fixiere $x \sim y$. Wie viele Leute gibt es, die zwar mit x , nicht aber mit y befreundet sind? Als Formel: $k - l - 1 = |\{z : x \sim z, y \not\sim z\}|$. (Begründung: x hat insgesamt k Freunde, davon sind aber l auch mit y befreundet, diese müssen wir also abziehen. Die 1 ziehen wir ab, weil $x \neq z$ ist.)

Was wollen wir doppelt abzählen? Fixiere ein x . Wie viele Tupel der Form (x, y, z) mit $x \sim y, x \not\sim z, y \sim z$ gibt es?

- LHS: Wir gehen über z : zu jedem Nicht-Freund von x gibt es genau m gemeinsame Freunde von x und z (diese sind dann die y im Tupel)
- RHS: Wir gehen über y : Zu jedem Freund von x gibt es genau $k - l - 1$ Leute z , die zwar x kennen, aber nicht y .

2 Summen von Binomialkoeffizienten

In diesem Abschnitt definieren wir $\binom{n}{k}$ als die Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge, $k, n \in \mathbb{N}$. Viele wichtige Eigenschaften der Binomialkoeffizienten lassen sich unmittelbar aus dieser Definition ableiten, etwa $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ und die „Pascal“-Eigenschaft $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.

Aufgabe 3:

- a) $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$,
- b) $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$,
- c) $\sum_{i=1}^n i^2 \binom{n}{i} = n(n+1)2^{n-2}$.

Lösung zu 3. a) Gegeben sei die Menge $N = \{1, \dots, n\}$. Die Menge aller Teilmengen von N kann durch die n -stelligen Dualzahlen $10111 \dots 010$ eindeutig kodiert werden: Ist die k -te Stelle der Dualzahl eine 1, dann gehört das Element k zur Teilmenge und ist die Stelle gleich 0, dann nicht. Dies ist eine eineindeutige Abbildung zwischen der Potenzmenge $\mathcal{P}(N)$ aller Teilmengen von N und der Menge der Dualzahlen von 0 bis $2^n - 1 = 11 \dots 1$. Die Anzahl der Elemente ist 2^n . Dies ist die rechte Seite. Auf der linken Seite ordnen wir die Teilmengen von N nach ihrer Anzahl i von Elementen, $0 \leq i \leq n$. Die Anzahl der i -elementigen Teilmengen von N ist $\binom{n}{i}$.

b) Aus n Katzen und n Hunden sollen insgesamt n Tiere ausgewählt werden; dafür gibt es $\binom{2n}{n}$ Möglichkeiten. Man kann aber auch erst $i \leq n$ Katzen und dann $n - i$ Hunde auswählen was jeweils $\binom{n}{i}$ ist. Hieraus folgt b).

c) folgt aus der folgenden Aufgabe, wenn man dort $k = 2$ setzt.

Aufgabe 4: Beweisen Sie die Identität

$$2^{n-k} \binom{n}{k} = \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} \binom{n}{i}.$$

Hinweis: Man betrachte die Relation der k -elementigen Teilmengen, die Teilmenge einer mindestens k -elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ sind.

Lösung zu 4. Die Zeilen seien jeweils k -elementige Teilmengen von N , $|Z| = \binom{n}{k}$. Die Spalten sind die mindesten k -elementigen Teilmengen, also $|S| = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j}$. Jede k -elementige Teilmenge Z_j kann durch eine beliebige Teilmenge von $N \setminus Z_j$ ergänzt werden und man erhält dadurch ein Spaltenelement, das mit Z_j in Relation steht. Also gibt es Potenzmenge-von- $N \setminus Z_j$ -viele Spalten, die mit der festen Zeile Z_j in Relation

stehen, also $s_{proz} = 2^{n-k}$. Umgekehrt stehen genau die k -elementigen Teilmengen einer ausgewählten Spalte S_j , $j \geq k$, mit ihr in Relation. Das sind $\binom{j}{k}$ Mengen:

$$z_{proS_j} = \binom{j}{k}, \quad j = k, \dots, n.$$

Das doppelte Abzählen liefert dann

$$\begin{aligned} |Z| \cdot s_{proZeile} &= \sum_{j=k}^n |S_j| \cdot z_{proS_j} \\ \binom{n}{k} 2^{n-k} &= \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} \cdot \binom{j}{k}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} = \sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k}^2.$$

Lösung zu 5. Zuerst machen wir ein paar triviale Umformungen:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n+k}{n} = \sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$$

Jetzt überlegen wir uns eine kombinatorische Interpretation: Ein Tierheim mit n Hunden und n Katzen. Es gelte dabei Folgendes: Katzen sind immer niedlich, Hunde sind manchmal niedlich. Nun entscheidet sich das Tierheim, an einem Niedlichkeitswettbewerb teilzunehmen und stellt dafür ein Team aus n niedlichen Tieren auf. Außerdem sollen alle nicht-niedlichen Hunde zum Hundefrisör geschickt werden.

Wie viele Möglichkeiten würde es prinzipiell geben für eine solche Auswahl dieser zwei Gruppen (dh. der Wettbewerbsgruppe und der Frisörgruppe)?

Wichtig zum Verständnis der Situation: Wir wissen à priori nicht, welcher Hund niedlich ist und welcher nicht. So eine Situation könnte zum Beispiel auftreten, wenn die Leitung des Tierheims gerade erst gestern die n Hunde gekauft hat und heute zum ersten Mal in Augenschein nimmt und nach dem Anschauen aller Hunde sich auf das Wettbewerbsteam einigt und die Formalien für den Hundefrisör vorbereitet.

Jetzt überlegen wir uns, wie viele Möglichkeiten es gibt.

LHS (Left Hand Side = Linke Seite der Gleichung)

Hier ist k die Anzahl der der niedlichen Hunde. Da gibt es $\binom{n}{k}$. Wenn diese feststehen, muss nur noch aus der Gruppe der $n+k$ niedlichen Tiere das Team ausgewählt werden, dafür gibt es $\binom{n+k}{n}$ Möglichkeiten.

RHS (Right Hand Side = Rechte Seite der Gleichung)

Hier ist k die Anzahl der ausgewählten Katzen. Insbesondere werden in diesem Falle $n - k$ Hunde ausgewählt und es gibt also k Hunde, die nicht im Team sind. Es gibt insgesamt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, die Katzen auszuwählen, es gibt $\binom{n}{n-k}$ Möglichkeiten, die Hunde auszuwählen und bei den k nicht ausgewählten Hunden gibt es 2^k Möglichkeiten, wer am Ende zum Frisör geschickt wird (denn jeder nicht ausgewählte Hund kann niedlich sein oder nicht niedlich).

Zweite Lösung

Wir betrachten erneut eine Menge von n Hunden und n Katzen, bei denen genau n Tiere zu einem Schönheitswettbewerb ausgewählt werden sollen. Dabei werden in der ersten Runde k Hunde ausgewählt und in der zweiten Runde aus diesen k Hunden $j \leq k$ Hunde ausgewählt und dann $n - j$ Katzen. Wir wollen also die folgende Relation doppelt abzählen:

$$\{h_1, \dots, h_k\} \supseteq \{h_{i_1}, \dots, h_{i_j}\}, \{k_1, \dots, k_{n-j}\}.$$

Die linke Seite der Gleichung ergibt sich wie oben: Es werden zunächst k Hunde ausgewählt, wofür es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten gibt und dann mit den n Katzen zu $n + k$ Tieren vereinigt. Bei der Endauswahl der n Tiere werden zunächst $j \leq k$ Hunde ausgewählt und dann $n - j$ Katzen und das für alle $j = 0, \dots, k$. Diese beiden Schritte können zusammengefasst werden zu

$$\binom{n+k}{n} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \binom{n}{n-j}.$$

(Diese Identität wird aber eigentlich gar nicht benötigt.)

Die rechte Seite bzw. zweite Art des Abzählens: Wir starten mit den final ausgewählten j Hunden und ergänzen sie durch eine beliebig große Menge an Hunden zur Menge der $k \geq j$ erstausgewählten Hunden, $k = j, \dots, n$.

$$\binom{n}{j} 2^{n-j}.$$

Hinzu kommen nun die ausgewählten $n - j$ Katzen, $\binom{n}{n-j}$

$$RHS = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 2^{n-j} \binom{n}{n-j} = \sum_{j=0}^n 2^{n-j} \binom{n}{n-j}^2 = \sum_{j=0}^n 2^j \binom{n}{j}^2.$$

3 Partitionen von Zahlen und Mengen

Die Partitionen einer Zahl n sind die Zerlegungen von n in Summanden ohne Beachtung der Reihenfolge. So sind $5 = 5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ die sieben verschiedenen Partitionen der Zahl 5.

Aufgabe 6: Man beweise: Die Anzahl der Partitionen von n in Summanden kleiner oder gleich r ist gleich der Anzahl der Partitionen von n in höchstens r Summanden.

Aufgabe 7: Es sei $p(n)$ die Anzahl der Partitionen von n , das heißt, die Anzahl der ungeordneten Zerlegungen von n in die Summe von positiven Summanden. Es gilt $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$, $p(4) = 5$, $p(5) = 7$. Als Verschiedenheit einer Partition bezeichne man die Anzahl der verschiedenen Summanden. Es sei $q(n)$ die Summe der Verschiedenheiten aller Permutationen von n .

Man beweise dass für alle $n \geq 1$ gilt

(a) $q(n + 1) = 1 + p(1) + p(2) + \dots + p(n)$.

(b) $q(n) \leq p(n)\sqrt{2n}$.

Aufgabe 8: Eine Partition heißt *gerade*, wenn die Anzahl der größten Summanden gerade ist und ungerade im umgekehrten Fall.

Man zeige, dass 1979 genauso viele gerade wie ungerade Partitionen besitzt.

Aufgabe 9: (IMO 88) Es sei n eine natürliche Zahl und A_1, \dots, A_{2n+1} seien Teilmengen einer Menge B und es gelte:

(a) Jede Menge A_i hat genau $2n$ Elemente.

(b) Für alle Indizes $i \neq j$ besteht $A_i \cap A_j$ aus genau einem Element.

(c) Jedes Element von B gehört zu mindestens zwei der Mengen A_i .

Für welche Werte n kann man für eine gegebene Menge B und ihre Teilmengen mit den Eigenschaften (a), (b) und (c) jedem Element von B eine der Zahlen 0 oder 1 so zuordnen, dass genau n Elementen jeder Menge A_i die Zahl 0 zugeordnet wird.

Aufgabe 10: Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $N = \{1, \dots, n\}$. Ferner sei \mathcal{M} eine Familie von r -elementigen Teilmengen von N , so dass beliebige $r + 1$ Teilmengen von \mathcal{M} einen nichtleeren Durchschnitt haben.

Man beweise, dass die Familie \mathcal{M} einen nichtleeren Durchschnitt hat.

Die *Partition einer Menge M* ist die Zerlegung der Menge in disjunkte (elementfremde) nichtleere Teilmengen von M , deren Vereinigung M ist.

Aufgabe 11: Es sei $S(n, k)$ die Anzahl der Partitionen einer n -Menge in k Teilmengen (Stirling-Zahlen zweiter Art).

Man beweise, dass es genau $k!S(n, k)$ surjektive Abbildungen einer n -Menge auf eine k -Menge gibt.

Aufgabe 12: Beweise:

$$S(n + 1, k) = kS(n, k) + S(n, k - 1), \quad \forall k \geq 1.$$

Aufgabe 13: Es sei $P(n)$ die Anzahl der Partitionen einer n -Menge. Beweise:

$$P(n+1) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} P(i).$$

Aufgabe 14: Ein $n \times n$ -Feld ist rot, grün und blau gefärbt, wobei jedes rote einen grünen, jedes grüne einen blauen und jedes blaue einen roten Nachbarn hat (Nachbarschaft über Kanten).

Man zeige, dass für die Anzahl r der roten Felder gilt

$$(a) \ r \leq \frac{2}{3}n^2 \quad (b) \ r \geq \frac{1}{11}n^2.$$