Diophantische Gleichungen

Theorie	Beispiel
$ax + my = b$; $\mathrm{ggT}(a, m) = d$	$36x + 51y = 15$
(1) Prüfen auf Lösbarkeit: lösbar gdw. $d \mid b$	(1) Prüfen auf Lösbarkeit: $\mathrm{ggT}(36, 51) = 3$; $3 \mid 15$, also lösbar
(2) Division durch d: $a'x + m'y = b'$ mit $a' = a/d; b' = b/d; m' = m/d$ und $\mathrm{ggT}(a', m') = 1$	(2) Division durch 3: $12x + 17y = 5$ mit $\mathrm{ggT}(12, 17) = 1$
(3) Darstellung des ggT (a', m') als Linearkombination mittels des EUKLIDischen Algorithmus: $a'z_1 + m'z_2 = 1$	(3) Darstellung des ggT (12, 17) als Linearkombination: $12\cdot(-7) + 17\cdot 5 = 1$
(4) Multiplikation mit b' liefert: $a'(b'z_1) + m'(b'z_2) = b'$ und folglich eine spezielle Lösung $(x_0, y_0) = (b'z_1, b'z_2)$ der diophantischen Gleichung aus (2) und damit aus (1)	(4) Multiplikation mit 5 liefert: $12\cdot(-35) + 17\cdot 25 = 5$ und damit als spezielle Lösung der diophantischen Gleichung $(-35, 25)$
(5) Mit $L = \left\{(x_0 + k\frac{m}{d}; y_0 - k\frac{a}{d}) \mid k \text{ ganz}\right\}$ erhält man die Lösungsmenge der diophantischen Gleichung	(5) $L = \left\{(-35 + k\frac{51}{3}; 25 - k\frac{36}{3}) \mid k \text{ ganz}\right\} = \left\{(-35 + 17k; 25 - 12k) \mid k \text{ ganz}\right\}$ $= \left\{(-1 + 17k'; 1 - 12k') \mid k' \text{ ganz}\right\}$
(6) Probe durch Einsetzen	(6) $36(-1 + 17k') + 51(1 - 12k') = -36 + 612 + 51 - 612 = 15$

Eulersche Reduktionsmethode

Schrittfolge	Beispiel: $11x + 27y + 15z = 277$
(1) Auflösen nach der Unbekannten mit dem betragskleinsten Koeffizienten; Zerlegen in ganzen und »echt-gebrochenen« Anteil	$x = \frac{277 - 27y - 15z}{11} = 25 - 2y - z + \frac{2 - 5y - 4z}{11}$
(2) Einführen einer Hilfsvariablen für den »echt-gebrochenen« Anteil	$v_1 = \frac{2 - 5y - 4z}{11} \Rightarrow 11v_1 + 5y + 4z = 2$
(3) Wiederholen der Schrittfolge (1); (2). Da die Koeffizienten dem Betrag nach abnehmen, entsteht nach endlich vielen Schritten eine Gleichung, in der der betragskleinste Koeffizient 1 ist.	$z = \frac{2 - 11v_1 - 5y}{4} = -3v_1 - y + \frac{2 + v_1 - y}{4}$ $v_2 = \frac{2 + v_1 - y}{4} \Rightarrow 4v_2 - v_1 + y = 2 \Rightarrow y = 2 + v_1 - 4v_2$
(4) Ist eine der Unbekannten durch die Hilfsvariablen ausgedrückt, kann man durch Einsetzen sukzessive auch die anderen Unbekannten durch die Hilfsvariablen darstellen	Aus $11v_1 + 5y + 4z = 2$ erhält man $4z = 2 - 11v_1 - 5(2 + v_1 - 4v_2) = -8 - 16v_1 + 20v_2$ $z = -2 - 4v_1 + 5v_2$ Aus $11x + 27y + 15z = 277$ erhält man $11x = 277 - 27(2 + v_1 - 4v_2) - 15(-2 - 4v_1 + 5v_2)$ $= 253 + 33v_1 + 33v_2$ $x = 23 + 3v_1 + 3v_2$
(5) Resultat und Probe	Die Lösungsmenge ist mithin $L = \left\{ \begin{pmatrix} 23 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + v_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \;\middle|\; v_1, v_2 \text{ ganz} \right\}$