Bezirkskomitee Chemnitz

zur Förderung math.-nat. begabter und interessierter Schüler www.bezirkskomitee.de

Außerunterrichtliche Arbeit

HELMUT KÖNIG

Arbeitsgemeinschaften Klasse 10 - eine Anleitung für AG- Leiter

Bezirkskomitee Chemnitz zur Förderung math.-nat. begabter und interessierter Schüler www.bezirkskomitee.de

HELMUT KÖNIG

Arbeitsgemeinschaften Klasse 10 - eine Anleitung für AG-Leiter

l n	halt	Seite
Einle	eitung	2
1.	Zu Ziel und Inhalt der Arbeitsgemeinschaften in Klasse 10	5
1.1.	Heuristische Vorgehensweisen	6
1.2.	Logische Grundlagen	18
1.3.	Sachkenntnisse und Fertigkeiten	19
2.	Zu einigen organisatorischen und didaktischen Fragen	20
3.	Vorschläge zur Gestaltung der Zirkel	23
3.1.	Gleichungen, Ungleichungen und Funktionen	23
3.2.	Weitere Themen aus der Arithmetik	55
3.2.	1. Vektoren	57
3.2.2	2. Komplexe Zahlen	66
3.2.3	3. Trigonometrie	76
3.3.	Zahlentheorie	94
3.4.	Logik und Kombinatorik	102
3.5.	Geometrie	107
4.	Lösungen der Bestimmungsaufgaben aus der "Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften - Klasse 10"	136
5.	Überblick über vermittelbare Verfahrens- und Sachkenntnisse in AGn der Klassen 5 bis 10	144
Liter	aturverzeichnis	149

Einleitung

Vorliegende Anleitung gehört zu der "Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften - Klasse 10" /1/. Damit wird die Reihe der Aufgabensammlungen /2/, /4/, /6/, /8/, /10/ und die Reihe der Anleitungen /3/, /5/, /7/, /9/, /11/ abgeschlossen. Wir bieten dieses Material den Gymnasien des Freistaats Sachsen zur Unterstützung der Förderung mathematisch interessierter Schüler an, und es haben auch andere Bundesländer (vor allem Nordrhein-Westfalen, Thüringen, Sachsen-Anhalt und Bayern) dieses Angebot erfreulich stark genutzt.

Die Aufgabensammlung /1/ ist eine überarbeitete und stark erweiterte Fassung der Aufgabensammlung /12/, an deren Ausarbeitung und Erprobung die Herren Rieger und Sachse mit ihrer Diplomarbeit /13/ maßgeblich beteiligt waren.

Die Aufgabensammlung /12/ wurde für "Kreisarbeitsgemeinschaften" ausgearbeitet, in denen interessierte Schüler aus mehreren Schulen zusammengefasst waren. Erprobt wurde dieses Material im Mathematikzentrum des Hauses der Kinder und Jugend "spektrum" in Chemnitz, wo Mathematiklehrerstudenten des 2. bis 5. Studienjahres unter Anleitung von Mitarbeitern der TU Chemnitz für Schüler der Klassenstufen 5 bis 10 mathematische Zirkel durchführten. Die Diplomarbeit /13/ enthielt Vorbereitungen für 36 derartige Zirkel in Klasse 10, in denen die Lehrerstudenten (die ja zu diesem Zeitpunkt in der Regel noch keine Unterrichtsversuche gehalten hatten) konkrete Hinweise über Ziel, Inhalt und didaktische Gestaltung eines jeden solchen Zirkels erhielten.

Vorliegende Anleitung soll einen ganz anderen Zweck erfüllen. Sie wendet sich an erfahrene Lehrer, die - in Abhängigkeit von der Leistungsfähigkeit und von den Interessen der zu fördernden Schüler - für die Festlegung der Ziele, die Auswahl der Inhalte und die didaktische Gestaltung der Förderung selbst verantwortlich sind.

In der Regel dürfte es unmöglich sein, im Laufe eines Jahres die in /1/ angegebenen 162 Aufgaben mit insgesamt 501 Teilaufgaben sämtlich zu behandeln. Der Umfang und die sehr unterschiedlichen Schwierigkeitsgrade der Aufgaben gestatten es, diese Aufgabensammlung für verschiedenartige Zwecke einzusetzen.

Es sei ausdrücklich auch auf folgende Variante der Nutzung unseres Materials hingewiesen: Man kann sich ein ganzes Schuljahr lang nur mit einem der Gebiete Arithmetik, Geometrie oder Zahlentheorie beschäftigen und dabei die Aufgabensammlungen aus mehreren Klassenstufen verwenden. In den zugehörigen Anleitungen findet man dazu entsprechende aufeinander abgestimmte Vorschläge.

Nach wie vor empfehlen wir, begabte Schüler aus mehreren Gymnasien in sogenannten "Kreisarbeitsgemeinschaften" zusammenzufassen, weil dadurch eine effektive Begabtenförderung sehr erleichtert wird.

Eine weit umfangreichere Nutzung dürfte dieses Material jedoch in Schularbeitsgemeinschaften finden, zu deren Teilnehmern vor allem interessierte Schüler gehören.

Wir wenden uns aber auch an Lehrer, die im Rahmen der inneren Differenzierung in ihrem Unterricht einzelne besonders interessierte und befähigte Schüler fördern möchten. Die Aufgabensammlung /1/ enthält viele Aufgaben, die sich für einen derartigen Zweck gut eignen. Wir würden uns freuen, wenn Lehrer aus dieser Anleitung auch Anregungen für ihren Unterricht erhalten würden.

Um dem Lehrer bei der Festlegung der Ziele und der Auswahl der Inhalte zu helfen, haben wir - wie bereits in den Anleitungen /7/, /9/ und /11/ - ein "Minimalprogramm" und ein "Maximalprogramm" vorgeschlagen, denen der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben sowie die mit den einzelnen Aufgaben erreichbaren Ziele zu entnehmen sind.

Wenn man vor allem eine *Vertiefung des Unterrichtsstoffs* erreichen will, dann sollte man aus Abschnitt 3.1. die Aufgaben 1) bis 6), 21) bis 26) und 36) sowie die Abschnitte 3.2.3. und 3.5. behandeln.

Ist man vor allem an einer *Erweiterung des Unterrichtsstoffs* (etwa in Form eines vorgezogenen Leistungskurses) interessiert, dann wird man sich vorzugsweise auf die Abschnitte 3.2.1. und 3.2.2 sowie auf die Aufgaben 6) bis 10) sowie 14) bis 32) des Abschnitts 3.2.3 konzentrieren.

Soll dagegen die Vorbereitung auf mathematische Wettbewerbe im Vordergrund stehen, dann wird man sich vor allem den Abschnitten 3.3., 3.4. und den für das Maximalprogramm vorgeschlagenen Aufgaben der anderen Abschnitte zuwenden.

Da unsere Aufgabensammlungen und Anleitungen in steigendem Maß auch in anderen Bundesländern genutzt werden, haben wir eine konkrete Bezugnahme auf den seit 1992/93 gültigen Lehrplan des Landes Sachsen vermieden.

Dieser Lehrplan brachte im Vergleich zu dem davor gültigen Lehrplan vor allem auf dem Gebiet der Geometrie beträchtliche Veränderungen mit sich, die vor allem bei der Überarbeitung der Aufgabensammlungen /4/, /6/, /8/ berücksichtigt werden mussten.

Ab Schuljahr 1992/93 sind bei uns vor allem die Gymnasien für die zusätzliche Förderung mathematisch interessierter Schüler verantwortlich. Im Freistaat Sachsen gibt es an jedem Gymnasium einen "Beauftragten für Begabtenförderung und Wettbewerbe", der für die Verwirklichung der vom "Sächsischen Landeskomitee zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schüler" formulierten Ziele an seinem Gymnasium sorgen soll. Wir wenden uns daher mit unseren Aufgabensammlungen und Anleitungen vor allem auch an diese Kolleginnen und Kollegen.

Die "Breitenförderung" an den Gymnasien macht jedoch eine "Spitzenförderung" auf Kreis-, Bezirks- und Landesebene nicht überflüssig.

Im Regierungsbezirk Chemnitz wurde in jedem der 12 Kreise ein "Beauftragter für Begabtenförderung und Wettbewerbe" mit der Entwicklung entsprechender Aktivitäten auf Kreisebene betraut, wozu eine enge Zusammenarbeit mit den genannten Beauftragten für die Gymnasien in unserem Regierungsbezirk eine notwendige Voraussetzung ist.

Besonders günstige Verhältnisse bestehen diesbezüglich in der Stadt Chemnitz, wo im *Mathematikzentrum des Hauses der Kinder und Jugend "spektrum"* nach wie vor in den Klassen 5 bis 10 "Kreisarbeitsgemeinschaften" für besonders interessierte und begabte Schüler durchgeführt werden.

Zur Popularisierung und Durchsetzung unserer Absichten führen wir ab Schuljahr 1993/94 im Regierungsbezirk Chemnitz eine *Weiterbildung für Lehrer* durch, die sich mit fachlichen und didaktischen Aspekten einer derartigen Förderung von interessierten Schülern im unterrichtlichen und im außerunterrichtlichen Bereich befasst.

Auf diese Weise gelingt es, mit denjenigen Kolleginnen und Kollegen in persönlichen Kontakt kommen, die sich für die Begabtenförderung interessieren und auf deren engagierte Arbeit wir angewiesen sind.

Ferner geht es darum, in enger Zusammenarbeit mit den Elternhäusern solche Schüler über Fördermöglichkeiten und Wettbewerbe auf Kreis-, Bezirks-, Landes- und Bundesebene zu informieren.

Für Schüler aus den Klassenstufen 5, 6, 7 und 8 gibt es in unserem Regierungsbezirk den "Korrespondenzzirkel Mathematik":

Für Schüler aus den Klassenstufen 7 und 8 gibt es ein einwöchiges Spezialistenlager zu Beginn der Sommerferien.

Für Schüler aus den Klassenstufen 9 bis 12 werden der Korrespondenzzirkel Mathematik sowie ein einwöchiges Seminar zur Vorbereitung auf die Bundesolympiade Mathematik auf Landesebene durchgeführt.

Viele dieser Schüler werden in Klasse 5 an dem dreistufigen Adam-Ries-Wettbewerb sowie in den Klassen 5 bis 9 an der 2. Stufe der Mathematik-Olympiade (Kreisolympiade) teilgenommen haben.

Besondere Aufmerksamkeit verdienen diejenigen Schüler, denen es gelungen ist, ab Klasse 6 an der 3. Stufe der Mathematik-Olympiade (*Landesolympiade*) teilzunehmen. Diese Schüler sollten sich das Ziel stellen, die 4. Stufe der Mathematik-Olympiade (*Bundesolympiade*) zu erreichen, die für Schüler der Klassen 8 bis 12 durchgeführt wird.

Obwohl der *Bundeswettbewerb Mathematik* für Schüler aus der Sekundarstufe II vorgesehen ist, sollten Schüler aus der Klassenstufe 10 aufgefordert werden, auch diesen Wettbewerb als Hilfsmittel für die Förderung mathematisch interessierter Schüler zu nutzen.

Nähere Informationen zu den im Regierungsbezirk Chemnitz durchgeführten Fördermaßnahmen und Wettbewerben findet man unter www.bezirkskomitee.de .

Mein besonderer Dank gilt Herrn Horst Römer für das Lesen der Korrektur sowie für viele kritische Hinweise beim Erarbeiten und Fertigstellen dieser Anleitung.

Wir würden uns freuen, wenn uns Nutzer dieses Materials ihre Erfahrungen, Einschätzungen und Verbesserungsvorschläge mitteilen würden.

Hinweis:

Eine Überarbeitung der zugehörigen Aufgabensammlung für Klasse 10 (und auch dieser Einleitung) wurde im Januar 2002 abgeschlossen. Dabei ging es vor allem um eine Anpassung an die neue Rechtschreibung.

1. ZU ZIEL UND INHALT DER ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IN KLASSE 10

Anknüpfend an die in den Anleitungen /3/, /5/, /7/, /9/, /11/ für die Klassen 5, 6, 7, 8, 9 genannten Ziele sei nochmals hervorgehoben:

In erster Linie streben wir die Entwicklung der Fähigkeit zum problemlösenden Denken durch bewußtes Vermitteln von heuristischen Vorgehensweisen an.

Maßnahmen der äußeren und der inneren Differenzierung sollten es ermöglichen, jeden Schüler bis zur oberen Grenze seiner Leistungsfähigkeit zu fordern und auf diese Weise optimal zu fördern.

Von gleicher Bedeutung ist vor allem in den oberen Klassenstufen das Ziel, die Schüler zum selbständigen Erwerb von Wissen und Können zu befähigen. Dem dient der "Merkstoff", den jede der genannten Aufgabensammlungen enthält, und der nicht nur für Zusammenfassung und Wiederholung, sondern vor allem auch für das unter Anleitung durchzuführende selbständige Erarbeiten von neuem Stoff genutzt werden sollte.

Auch die im Unterricht verwendeten Lehrbücher sollten zu diesem Zweck mit herangezogen werden. Besuchen Schüler aus mehreren verschiedenen Gymnasien die AG, dann sollte der Lehrer in Erfahrung bringen, welche Lehrbücher verwendet werden.

In der Klassenstufe 10 sollte man die Schüler auch zum Studium mathematischer Beiträge anregen, wie sie etwa in der Zeitschrift "Alpha" oder in Publikationen der Mathematischen Schülerbücherei enthalten sind.

Neben diesen beiden Hauptzielen streben wir auch ein über den Unterricht hinausgehendes Wissen und Können auf dem Gebiet der *mengentheoretisch-logischen Grundlagen der Mathematik* an. Bereits ab Klasse 6 enthalten die Aufgabensammlungen diesbezüglichen Merkstoff, auf den man auch in späteren Klassen noch zurückgreifen sollte.

Von untergeordneten Bedeutung ist für uns der Erwerb von Wissen und Können, das über den Unterrichtsstoff hinausgeht und das um seiner selbst willen vermittelt wird. In AGn sollte der Erwerb neuen Wissens stets dem Ziel dienen, weitere Hilfsmittel zum Lösen problemhafter Aufgaben zu gewinnen.

Wir verweisen diesbezüglich auch auf den Abschnitt 5., in dem zusammenfassend dargestellt wird, welche Ziele in den Klassen 5 bis 10 angestrebt werden können, wenn man sich der Aufgabensammlungen für diese Klassenstufen bedient.

Den genannten Zielen ist zu entnehmen, daß wir uns nicht nur an mathematisch interessierte Schüler wenden. Unsere Förderung will auch die naturwissenschaftlich-technisch interessierten Schüler erreichen und soll auch denjenigen Schülern Nutzen bringen, die einen Beruf ergreifen wollen, der keine speziellen mathematischen Kenntnisse erfordert.

Von dieser allgemeinen Zielstellung ausgehend sollte jeder Lehrer zunächst Überlegungen anstellen, welche Ziele er in Abhängigkeit von der Leistungsfähigkeit und von den Interessen seiner Schüler erreichen kann und will. Um ihm dabei zu helfen, werden zu jedem Stoffgebiet explizit diejenigen Ziele genannt, die bei seiner Behandlung angestrebt werden können, und es wird auch ein "Minimalprogramm" und ein "Maximalprogramm" vorgeschlagen.

Erst auf der Grundlage einer solchen konkreten Zielstellung ist es dann möglich, eine begründete Entscheidung über Auswahl und Reihenfolge der zu behandelnden Aufgaben zu treffen. Das didaktische Vorgehen wird dann ebenfalls von den angestrebten Zielen abhängen.

1.1. Heuristische Vorgehensweisen

Heuristisches Vorgehen ist bis zu einem gewissen Grade lehrbar. Es reicht von der Beachtung sehr allgemeiner *Prinzipien* über den Einsatz von *Strategien* bis zur Anwendung relativ einfach anzueignender heuristischer *Hilfsmittel*

Für uns besteht heuristische Schulung vor allem im Vermitteln gewisser Fragen und Impulse, die vom konkreten Inhalt der zu lösenden Aufgabe weitgehend unabhängig sind. Wir knüpfen diesbezüglich an die Arbeiten /18/, /19/, /20/ von G. POLYA an und greifen auf die in /14/, /15/ und /16/ festgehaltenen Auffassungen zurück.

Wir vertreten die Ansicht, daß das bewußte Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen in Form von Verfahrenskenntnissen die Entwicklung des Schöpfertums der Schüler nicht behindert, sondern auf einem höheren Schwierigkeitsniveau sogar unterstützt, wenn bei dieser Vermittlung gewisse Prinzipien beachtet werden (vgl. hierzu Abschnitt 2.).

Die in den einzelnen Klassenstufen einführbaren und trainierbaren heuristischen Vorgehensweisen werden in den Anleitungen /3/, /5/, /7/, /9/ und /11/ erläutert. Wir verweisen vor allem auf die zusammenfassende Darstellung in /11/, S.4 - 8.

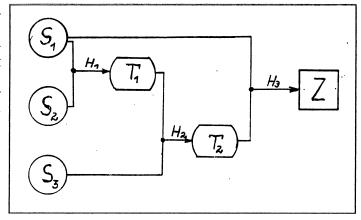
Wir möchten hier als eine etwas andere Art der Zusammenfassung ein Material wiedergeben, das unter der Bezeichnung "Einige Regeln zum Lösen problemhafter Aufgaben" für die Hand des Lehrers entwickelt wurde.

Eine jede Aufgabe enthält Informationen über "Start" und "Ziel".

Eine Aufgabe lösen heißt, auf irgendeine Weise irgendeinen Weg vom Start zum Ziel zu finden.

Dieser Weg führt in der Regel über gewisse "Teilziele", die mit Hilfe gewisser "Hilfsmittel" erreicht werden.

In solchen Fällen läßt sich der Lösungsplan in Form eines "Lösungsgraphen" festhalten. Die Belegung der Knoten und der Kanten eines solchen Graphen ist der nebenstehenden Skizze zu entnehmen.



Es ist zweckmäßig, zwischen "Beweisaufgaben" und zwei Arten von "Bestimmungsaufgaben" zu unterscheiden:

Aufgabe	Start	Ziel	Teilziele	Hilfsmittel
Beweis- aufgabe	Voraussetzungen	Behauptung	"Feststellungen"	Sätze, Definitionen, Um- formungsregeln u.ä.
	Gegebenes	Gesuchtes		
Bestim- mungs-	Daten (nebst Beziehungen)	Unbekannte	Hilfsgrößen	Formeln, Umformungsre- geln, Sätze, Definitionen u.ä.
aufgabe	(Konjunktion von) Aussageformen (Bedingungen)	Erfüllungsmenge	"Hilfsmengen"; vereinfachte Aussageformen	Umformungsregeln, Sätze, Definitionen, logische Schlußregeln u.ä.

Im außerunterrichtlichen Bereich werden bis Klassenstufe 10 vor allem folgende Arten von Bestimmungs- und Beweisaufgaben behandelt:

- Geometrische Aufgaben (einschließlich Konstruktions- und Ortsaufgaben als spezielle Bestimmungsaufgaben);
- Zahlentheoretische Aufgaben (über dem Bereich der natürlichen oder der ganzen Zahlen);
- Arithmetische Aufgaben (über dem Bereich der rationalen oder der reellen Zahlen) mit dem Teilgebiet "Gleichungen/Ungleichungen";
- Logisch-kombinatorische Aufgaben .

Ferner lohnt es, Sach- und Anwendungsaufgaben als eine spezielle Art von Bestimmungsaufgaben hervorzuheben.

Allgemeine Regeln zum Lösen problemhafter Aufgaben

- (I) Erfassen der Aufgabe
- (1) Sind alle vorkommenden Begriffe klar?
 - Ist eine günstige Veranschaulichung möglich? (Figur, Skizze, Tabelle o.ä.)
 - Start und Ziel der Aufgabe ermitteln!
 (Voraussetzungen Behauptung; Gegebenes Gesuchtes)
 - Günstige Bezeichnungen einführen! Zweckmäßige Symbolik wählen, um so Start und Ziel übersichtlich festhalten zu können!
- (II) Finden eines Lösungsplans
 - Wurde eine ähnliche Aufgabe bereits gelöst?
 Welche Vorgehensweisen zum Lösen solcher Aufgaben sind bekannt?
 - Erfolgversprechende Vorgehensweise auswählen!
- (2.1) Vorwärtsarbeiten (VA)
 - Welche *ableitbaren Teilziele* (Feststellungen, Hilfsgrößen) lassen sich von den Voraussetzungen bzw. den gegebenen Größen ausgehend unmittelbar erreichen (ableiten, berechnen)?

 Begründung!
 - * Welche Hilfsmittel (Sätze, Definitionen, Formeln u.ä.) enthalten die Voraussetzungen bzw. die gegebenen Größen? (Diese Hilfsmittel können ableitbare Teilziele liefern!)
- (2.2) Rückwärtsarbeiten (RA)
 - Von welchen *hinreichenden Teilzielen* aus ließe sich das Ziel unmittelbar erreichen? Begründung!
 - * Welche Hilfsmittel (Sätze, Formeln, Definitionen u.ä.) enthalten die Behauptung bzw. die gesuchte Größe?

(Diese Hilfsmittel können hinreichende Teilziele liefern!)

Man arbeite von abgeleiteten Teilzielen aus vorwärts, von hinreichenden Teilzielen aus rückwärts, bis ein Weg vom Start zum Ziel gefunden wurde.

- (3) Grundmethode zum Lösen von Bestimmungsaufgaben (GI)
- Welche Beziehungen (das sind allgemein Aussageformen, oft Gleichungen) bestehen zwischen den gegebenen, den gesuchten und u.U. noch günstig gewählten Hilfsgrößen?
 - ° Die Anzahl der benötigten Gleichungen ist gleich der Summe der Anzahlen von gesuchten Größen und Hilfsgrößen.
 - Eliminiere die Hilfsgrößen!

Um von gegebenen oder gefundenen Aussageformen (Bedingungen, Beziehungen, Gleichungen o.ä.) zur *gesuchten Erfüllungsmenge* zu gelangen, kann man folgende beiden Wege einschlagen:

(3.1) Ermittle zu jeder Bedingung (Beziehung, Aussageform) die zugehörige Erfüllungsmenge

Bilde den Durchschnitt dieser Erfüllungsmengen!

- Oie Elemente endlicher Erfüllungsmengen kann man im Prinzip stets durch "systematisches Erfassen aller möglichen Fälle" ermitteln. Dabei ist es oft zweckmäßig, Tabellen zu verwenden.
- ° Untersuche zuerst die "informativste" Bedingung, die die "kleinste" Erfüllungsmenge besitzt (d.h. die das Suchfeld am stärksten einengt).
- ° Man kann auch aus der Erfüllungsmenge einer dieser Bedingungen systematisch diejenigen Elemente aussondern, die eine der restlichen Bedingungen nicht erfüllen.
- (3.2) Forme die Bedingungen (Beziehungen, Aussageformen o.ä.) günstig um, ziehe zweckmäßige Folgerungen aus ihnen, und ermittle nach einer solchen Vereinfachung die gesuchte Erfüllungsmenge.

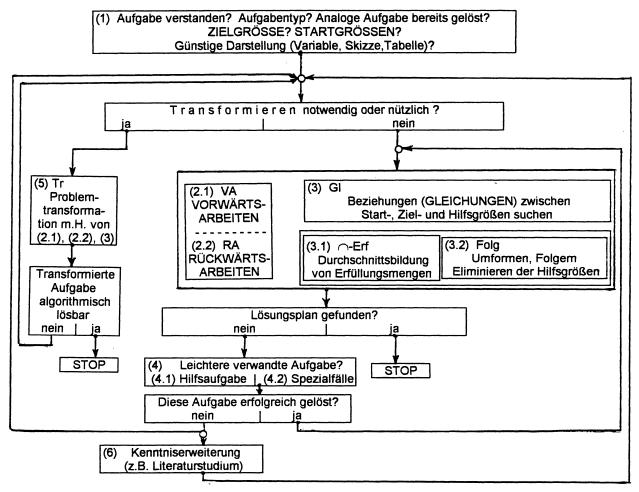
 (Dies ist eine spezielle Form des Vorwärtsarbeitens.)
- (4) Kannst du eine Aufgabe nicht lösen, dann wende dich zunächst einer günstig gewählten verwandten, leichteren Aufgabe zu!
- (4.1) Versuche die Aufgabe für einen Spezialfall zun lösen! Vielleicht helfen die so gefundenen Lösungsideen auch beim Lösen der Ausgangsaufgabe weiter. Auch die Beschäftigung mit Verallgemeinerungen "Grenzfällen und analogen Fällen kann diesem Zweck dienen.

 Variiere den Start oder das Ziel!
- (4.2) Ermittle eine Hilfsaufgabe, deren Lösung das Lösen der Ausgangsaufgabe mit Sicherheit ermöglichen würde! (Auf solche Hilfsaufgaben stößt man oft beim Rückwärtsarbeiten.)
- Übersetze (t r a n s f o r m i e r e) die Aufgabe in die Sprache einer günstig gewählten mathematischen Disziplin!
 Löse die (gleichbedeutende) transformierte Aufgabe!
 [Bei "nichtmathematisch" formulierten Sach- und Anwendungaufgaben muß man so vorgehen; bei "innermathematischen" Aufgaben ist es manchmal günstig, so vorzugehen. Beim Transformieren wendet man vor allem die Regeln (2.1), (2.2) und (3) an.]
- (6) Kannst du eine Aufgabe trotz aller Anstrengungen nicht lösen, dann muß du zunächst deine Kenntnisse erweitern. Besorge dir aus einschlägiger Literatur neue Anregungen und neue Hilfsmittel.
- (III) Ausführen des Plans; Darstellen der Lösung (Dies ist eine erlernbare Technik, bei der heuristische Vorgehensweisen keine Rolle spielen.)
- (IV) Kontrolle und Auswertung
 - Kontrolliere das Resultat, den Beweis!
 Wurde jeder Lösungsschritt hinreichend begründet?

(Manchmal ist eine Probe am Spezialfall sehr nützlich.)

- Überlege, welche heuristische Vorgehensweise dir beim Lösen der Aufgabe besonders, geholfen hat! Merke es dir!
 Bei welchen anderen Aufgaben würdest du analog vorgehen?
- Wurden alle gegebenen Größen oder Bedingungen bzw. alle Voraussetzungen für die Lösung benötigt?
- Formuliere eine *neue*, *verwandte Aufgabe* (eine analoge oder eine verallgemeinerte Aufgabe; eine wahre Umkehrung des bewiesenen Satzes; o.ä.)!

Folgendes Schema hält fest, in welchen Reihenfolgen diese durchnumerierten "Impulsblöcke" durchlaufen werden können, wobei in der Regel "Schleifen" auftauchen. Der Prozeß der Lösungsfindung wird durch eine "STOP" beendet, wenn ein Lösungsplan gefunden wurde. Da es sich hierbei um einen heuristischen Prozeß handelt, wird dieses Ziel keineswegs mit Sicherheit erreicht.



Aus diesem "allgemeinen Regelsystem" kann man durch Interpretation und Konkretisierung der vorkommenden Begriffe sowie durch spezifische Ergänzungen "spezielle Regelsysteme" für das Lösen der genannten Aufgabenarten gewinnen. Durch Verwendung der eingeführten Nummern für die einzelnen Impulsblöcke soll dieser wichtige Zusammenhang festgehalten werden. Die Schüler sollen erkennen, daß man beim Lösen der inhaltlich sehr verschiedenen speziellen Aufgabenarten im Prinzip stets immer wieder nur einige wenige heuristische Vorgehensweisen einsetzt.

Regeln zum Lösen von geometrischen Beweisaufgaben

- (1) Zeichne eine Figur! (Keinen Sonderfall wählen!) Wie lautet die Behauptung, wie lauten die Voraussetzungen des Satzes? Schreibe sie unter Verwendung der in der Figur eingeführten, geschickt gewählten Bezeichnungen heraus!
- (2.1) Gehe von den Voraussetzungen aus! Welche Feststellungen lassen sich aus ihnen unmittelbar folgern?
 - Welche Sätze oder Definitionen enthalten diese Voraussetzungen?
 Sie können als Beweismittel dienen! Ergänze gegebenenfalls die Figur!
 Welche ableitbaren Feststellungen führen wohl am einfachsten zum Ziel?
- (2.2) Betrachte die Behauptung!

Aus welchen Feststellungen ließe sie sich unmittelbar folgern?

- Welche Sätze oder Definitionen enthalten diese oder eine ähnliche Behauptung? Sie können als *Beweismittel* dienen!

Hast du ein solches Beweismittel gefunden, dann ergänze die Figur durch zugehörige Hilfslinien oder Bezeichnungen.

Welche der gefundenen hinreichenden Feststellungen führt wohl am einfachsten zum Ziel?

Manchmal ist es günstig, die *Behauptung äquivalent umzuformen*, um so brauchbare Beweismittel oder Hilfslinien zu finden.

Wende *abwechselnd* die Strategie des *Vorwärts- und Rückwärtsarbeitens* an, bis du einen Weg von den Voraussetzungen zur Behauptung gefunden hast.

Welche neuen Beweismittel und Hilfslinien legt die dabei laufend ergänzte Figur nahe?

Bieten sich an einer Stelle mehrere Beweismittel bzw. Wege an, dann versuche, deren *Erfolgschancen abzuschätzen*! Verfolge stets zunächst den Weg, der am einfachsten zu sein scheint.

Wenn du nicht weiterkommst, dann prüfe zunächst genau nach, ob du vielleicht eine der Voraussetzungen bei deinem Beweisversuch noch nicht verwendet hast!

Oder hast du dich durch eine spezielle Beweisfigur zu einem Trugschluß verleiten lassen?

Verfolge an einer neuen, von der bereits gezeichneten abweichenden Figur deine Beweisidee!

- (4.1) Versuche, wenigstens einen Spezialfall des Satzes zu beweisen!

 Betrachte auch Grenzfälle, Verallgemeinerungen oder analoge Fälle!

 Das kann zu einer Beweisidee führen.
- (4.2) Versuche, zunächst noch unbekannte Hilfssätze zu entdecken und zu formulieren, mit deren Hilfe sich der Satz beweisen ließe! Überzeuge dich zunächst, daß es sich um "nützliche" Hilfssätze handelt, mit deren Hilfe sich der gegebene Satz tatsächlich beweisen läßt. Wenn dies der Fall ist, dann versuche, diese Hilfssätze zu beweisen.
- (5) Übersetze die elementargeometrische Beweisaufgabe in die Sprache der Vektoralgebra oder der Koordinatengeometrie!

Auch Hilfsmittel aus der *Trigonometrie* oder aus dem Rechnen mit *komplexen Zahlen* sind manchmal von **N**utzen.

Regeln zum Lösen von geometrischen Bestimmungsaufgaben

(1) Zeichne eine Figur!
Wie lautet die Unbekannte? Wie lauten die Daten und die gegebenen Bedingungen?
Führe günstige Bezeichnungen ein!

(2.1) Gehe von den *Daten nebst Bedingungen* aus! Welche Hilfsgrößen lassen sich aus ihnen unmittelbar berechnen (bestimmen)? Welche Hilfsmittel (Formeln o.ä.) bieten sich hierzu an?

(2.2) Betrachte die Unbekannte!

Aus welchen Hilfsgrößen ließe sie sich unmittelbar berechnen?
Als Hilfsmittel bieten sich Formeln oder Beziehungen an, in denen die Unbekannte vorkommt!

Wende abwechselnd die Strategie des Vorwärts- und Rückwärtsarbeitens an, bis du einen Weg von den Daten zur Unbekannten gefunden hast!

Wenn du nicht weiterkommst, dann prüfe nach, ob du bereits alle gegebenen Bedingungen voll ausgenützt hast!

- (3) Suche nach Beziehungen (meist in Form von Gleichungen) zwischen den Daten, der Unbekannten und günstig gewählten Hilfsgrößen!
- (3.2) Löse das entstandene Gleichungssystem!

 Eliminiere dabei die eingeführten Hilfsgrößen!

 Du brauchst hierzu ein System unabhängiger Gleichungen, deren Anzahl gleich der Summe der Anzahlen der Unbekannten und der Hilfsgrößen ist.

Beachte, daß auch die Anwendung von (2.1) und (2.2) stets auf ein solches Gleichungssystem führt, das jedoch in der Regel sehr leicht lösbar ist, weil sich die eingeführten Hilfsgrößen durch schrittweises Einsetzen eliminieren lassen.

Das Lösen von Gleichungssystemen, die durch Anwendung von (3) gefunden wurden, ist dagegen häufig eine problemhafte Aufgabe.

Kommst du auf diese Weise noch nicht ans Ziel, dann wende analog die Regeln (4.1), (4.2) oder (5) an.

Die genannten Regeln gelten auch für Beweis- und Bestimmungsaufgaben aus der **Stereome- trie**.

Zusätzlich beachte hier noch folgendes:

- (1) Der Veranschaulichung der Aufgabenstellung können nicht nur eine Figur in perspektivischer Darstellung, eine Zweitafelprojektion, ein Körpernetz oder eine Abwicklung dienen, sondern oft sind auch günstig gewählte ebene Schnitte, denen die charakteristischen Eigenschaften des räumlichen Gebildes zu entnehmen sind, ein nützliches Hilfsmittel.
- (2.1), (2.2) Neben Sätzen aus der Stereometrie bieten sich dann auch Sätze aus der Planimetrie als Hilfsmittel an.
- (4) Suche nach einer analogen Aufgabe aus der Planimetrie! Oft läßt sich eine hier erfolgreiche Lösungsidee analog beim Lösen der stereometrischen Aufgabe anwenden.

Regeln zum Lösen von geometrischen Ortsaufgaben

[Hinweis: Geometrische Ortsaufgaben sind spezielle Bestimmungsaufgaben. Gesucht ist jeweils eine Punktmenge M, deren Elemente einer gegebenen Bedingung genügen, die sich in Form einer Aussageform H(X) schreiben läßt. Dabei bezeichnet X einen beliebigen Punkt der Ebene (manchmal auch des Raumes) .

Es ist dann zu zeigen: Für alle X gilt: $x \in M \Leftrightarrow H(X)$.

- (I) Versuche, den gesuchten geometrischen Ort zu erraten!
 - a) Zeichne eine genaue Figur!
 - b) Betrachte Spezialfälle und Grenzfälle für die Lage des Punktes X!
 - c) Hast du eine Vermutung gefunden, dann überprüfe sie anhand von weiteren Spezialfällen!
- (II) Versuche, die gefundene Vermutung zu beweisen!

Verwende hierzu die Regeln zum Lösen von geometrischen Beweisaufgaben!

- a) Beachte, daß die Zusammenfassung eines Satzes und einer Umkehrung dieses Satzes zu beweisen ist! Hierzu sind in der Regel zwei Beweise nötig.
- b) Beachte, daß man anstelle des Satzes "Wenn $x \in M$, dann H(X)" auch die mit ihm gleichbedeutende Kontraposition "Wenn nicht H(X), dann nicht $x \in M$ " beweisen kann.
- c) Beachte, daß eine Umkehrung eines Satzes oft indirekt bewiesen wird! Dabei kann man manchmal der Beweisidee für den Ausgangssatz folgen oder man kann den Ausgangssatz als Beweismittel verwenden.
- (5) Kommst du auf diese Weise nicht ans Ziel, dann übersetze die Aufgabe in die Sprache der Koordinatengeometrie!
 (Du erhältst dann den geometrischen Ort zunächst in der Form F(x;y) = 0.)

Regeln zum Lösen von geometrischen Konstruktionsaufgaben

[Hinweis: Geometrische Konstruktionsaufgaben sind spezielle Bestimmungsaufgaben. Zu ermitteln sind alle Figuren, die die gegebenen Bedingungen erfüllen. Genauer gesagt: Zu ermitteln ist eine (Konstruktionsbeschreibung genannte) algorithmische Vorschrift, die es gestattet, aus den Daten genau diejenigen (untereinander nicht kongruenten) Figuren zu konstruieren, die die gestellten Bedingungen erfüllen.

Solche Aufgaben lassen sich stets so umformulieren, daß nur Punkte nebst Bedingungen gegeben und nur Punkte gesucht sind, und man daher die Methode der geometrischen Örter und die Methode der Hilfselemente anwenden kann. Der Suche nach Hilfsgrößen entspricht hier die Suche nach Hilfspunkten.

Man kann solche Aufgaben auch so umformulieren, daß nur Streckenlängen nebst Bedingungen gegeben und nur Streckenlängen gesucht sind, und man daher die algebraische Methode anwenden kann. Die hierbei erhaltenen Terme sind (elementar) konstruierbar genau dann, wenn sie als Operationszeichen nur +, -, ·, : und Quadratwurzelzeichen enthalten.]

- (1) Zeichne eine *Planfigur*!

 Notiere die gegebenen *Bedingungen*, in denen die *Daten* vorkommen!
- (3.1) Wende die Methode der geometrischen Örter an!
 - Reduziere die Aufgabe auf die Konstruktion eines (oder mehrerer) Punktes X!
 (Das ist oft auf mehrere Weisen möglich.)
 - Bilde aus den gegebenen Bedingungen zwei Aussageformen mit der freien Variablen X!

- Ermittle die den Aussageformen zugehörigen beiden Erfüllungsmengen (geometrischen Örter)!
- Bilde den Durchschnitt dieser beiden geometrischen Örter!

Kommst du so nicht sofort ans Ziel, dann wende die Methode der Hilfselemente an!

- (2.1) Welche Hilfspunkte (Hilfsfiguren o.ä.) lassen sich aus den gegebenen Bedingungen unmittelbar konstruieren?

 Begründe (d.h. nenne die beiden geometrischen Örter, die den Hilfspunkt bestimmen)!
- (2.2) Aus welchen Hilfspunkten (Hilfsfiguren o.ä.) ließe sich der gesuchte Punkt unmittelbar konstruieren?

 Sind für jeden dieser Hilfspunkte je zwei geometrische Örter bekannt?

Wende abwechselnd die Strategie des Vorwärts- und des Rückwärtsarbeitens an, bis du einen Weg von den gegebenen Punkten über die gefundenen Hilfspunkte zu den gesuchten Punkten gefunden hast!

Als Hilfsfiguren eignen sich oft Teildreiecke (Teilfiguren), zur gesuchten Figur ähnliche Figuren oder Figuren, über die man viel aussagen kann (z.B., Parallelogramme).

Um brauchbare Hilfselemente zu finden, muß man oft einschlägige geometrische Sätze verwenden, d.h. charakteristische Eigenschaften der zu konstruierenden Figur beachten. Auch die Anwendung von Abbildungen (von Bewegungen, Ähnlichkeitsabbildungen, Spiegelungen am Kreis usw.) kann hierbei helfen.

- (3) Bei schwierigeren Konstruktionsaufgaben muß man die für die Konstruktion der Hilfspunkte oder der gesuchten Punkte benötigten Beziehungen erst entdecken und herleiten, was zu einer
- (4.2) Beweisaufgabe als Hilfsaufgabe führen kann. Es kann auch vorkommen, daß du zu einer gegebenen oder gefundenen Bedingung den zugehörigen geometrischen Ort nicht kennst. Dann muß du dich der zugehörigen Ortsaufgabe als Hilfsaufgabe zuwenden. Überzeuge dich aber vorher, daß du auf diese Weise wirklich zu einem Lösungsweg für die Konstruktionsaufgabe gelangst!
- (5) Wende die *algebraische Methode* an!
 - Suche eine Streckenlänge, die eine "hinreichende" Hilfsgröße ist, d.h. mit deren Hilfe sich die gesuchte Figur konstruieren ließe.
 - Drücke diese Hilfsgröße rechnerisch durch die Daten aus!
 Erweist sich der so gefundene Term als konstruierbar, dann hast du einen Lösungsweg gefunden.

Regeln zum Lösen von zahlentheoretischen Beweisaufgaben

(1) Schreibe die *Behauptung* und die *Voraussetzungen* des Satzes unter Verwendung einer geschickten Bezeichnungsweise heraus! (*Variable* einführen, Aussageformen verwenden.)

Mache dir den Inhalt des Satzes klar, indem du einige konkrete Zahlenbeispiele betrachtest!

- (5) Lohnt es, die Aufgabe in die Sprache der Kongruenzen zu übersetzen?
- (2.1) Vorwärtsarbeiten!

Wandle Teilbarkeitsaussagen durch Anwendung der Definition von alb in Gleichungen um!

Führt eine vollständige Fallunterscheidung zum Ziel? Ist ein Beweis durch vollständige Induktion erfolgversprechend?

- (2.2) Rückwärtsarbeiten! (Definitionen sowie Sätze mit gleicher Behauptung liefern hinreichende Feststellungen.)
- (4.2) Beim Rückwärts- oder Vorwärtsarbeiten stößt man bisweilen auf *Hilfsaufgaben* bzw. entdeckt *Hilfssätz*e, mit deren Hilfe man ans Ziel gelangen kann.
- (4) Manchmal lohnt es, die Beweisaufgabe *in eine Bestimmungsaufgabe umzuwandeln* und die zugehörigen Regeln zu verwenden.

Regeln zum Lösen von zahlentheoretischen Bestimmungsaufgaben

[Hinweis: Zahlentheoretische Bestimmungsaufgaben lassen sich in der Regel auf folgende Form bringen:

"Ermittle die Menge aller (natürlicher oder ganzer) Zahlen, die folgende Bedingungen (Aussageformen) erfüllen: "...

Im Gegensatz etwa zu geometrischen Bestimmungsaufgaben oder zu Sach- und Anwendungsaufgaben ist hier der Aufgabenstellung nicht zu entnehmen, daß es genau eine Lösung gibt, sondern die gesuchte Erfüllungsmenge kann leer sein, endlich oder unendlich viele Elemente enthalten.]

- (1) Führe *Variable* ein und schreibe die *gegebenen Bedingungen* unter **V**erwendung günstiger Bezeichnungen als Aussageformen heraus!
- (3.1) Ermittle zu jeder Bedingung die Erfüllungsmenge! Bilde den *Durchschnitt dieser Erfüllungsmengen*!
 - Jede endliche Erfüllungsmenge läßt sich im Prinzip durch "systematisches Erfassen aller möglichen Fälle" ermitteln.
 Lege hierzu übersichtliche Tabellen an!
 - Oft ist die Reihenfolge wichtig, in der man die einzelnen Bedingungen untersucht. Beginne mit der Bedingung, die von möglichst wenigen Elementen erfüllt wird! Aus dieser Menge kann man dann systematisch alle Elemente ausschließen, die eine der restlichen Bedingungen nicht erfüllen. Hierbei beginne man mit der Bedingung, die sich am leichtesten nachprüfen läßt.
- (3.2) Forme die gegebenen Bedingungen zweckmäßig um, ziehe Folgerungen aus ihnen, und ermittle nach solchen Vereinfachungen die gesuchte Erfüllungsmenge!

 [Oft wird (3.1) und (3.2) kombiniert angewendet. In beiden Fällen liegt eine spezielle Form des Vorwärtsarbeitens vor.]
- (4) Versuche, durch Betrachtung einiger konkreter Fälle, durch Probieren o.ä. zu einer Vermutung über die gesuchte Erfüllungsmenge zu gelangen, und löse die zugehörige Beweisaufgabe!

Regeln zum Lösen von logisch-kombinatorischen Aufgaben

[Hinweis: Wir betrachten hier nur folgende logisch-kombinatorischen Aufgaben: Gegeben sind Aussagen über Zuordnungen zwischen oder über Reihenfolgen von Elementen nebst Informationen über die Wahrheitswerte dieser Aussagen. Zu ermitteln sind alle Zuordnungen oder Reihenfolgen, die sämtliche gegebenen Bedingungen erfüllen.]

- (1) Führe geeignete Bezeichnungen ein, wähle eine zweckmäßige Symbolik, und halte die gegebenen Aussagen (Bedingungen) in übersichtlicher Form fest!

 Verwende Tabellen, um Zuordnungen oder Reihenfolgen übersichtlich festzuhalten.
- (2.1) Was läßt sich aus den gegebenen Aussagen folgern?
- (3.2) Welche Aussage dürfte die meiste Information liefern? Beginne mit dieser Aussage!
 - Halte die gefolgerten Aussagen in der angefertigten Tabelle symbolisch fest; ziehe weitere Schlußfolgerungen, und fülle die Tabelle schrittweise aus !
 - Sind die Wahrheitswerte der gegebenen Aussagen noch zu bestimmen, dann suche zunächst nach in sich widerspruchsvollen oder nach untereinander unverträglichen Aussagen!
 - Wenn du nicht weiterkommst, dann prüfe nach, ob du schon alle gegebenen Informationen voll ausgeschöpft hast!
- (2.2) Betrachte das Gesuchte! Woraus und auf welche Weise ließe es sich ableiten (ermitteln)?
 - Oft ist die Kenntnis der Wahrheitswerte der gegebenen Aussagen hinreichend für die Lösung der Aufgabe.
 - Wie lassen sich diese Wahrheitswerte ermitteln?
- (3.1) Erfasse systematisch alle möglichen Fälle (Zuordnungen, Reihenfolgen, Wahrheitswertverteilungen) und schließe systematisch alle Fälle aus, die nicht eintreten können!
 - Welche Fälle lassen sich auf Grund welcher Aussage sofort ausschließen? Überprüfe die restlichen Fälle anhand der gegebenen Aussagen!
 - Verwende *Tabellen*, um die gewonnenen Ergebnisse übersichtlich festzuhalten!

Regeln zum Lösen von Beweisaufgaben aus dem Gebiet "Gleichungen/Ungleichungen"

- (1) Die abzuleitende Gl/Ugl ist die *Behauptung* des zu beweisenden Satzes. Wie lauten seine Voraussetzungen?
 - Gilt die Gl/Ugl für alle oder nur für einen Teilbereich der reellen Zahlen oder werden noch weitere einschränkende Voraussetzungen getroffen?
 - Mache dir den Inhalt des Satzes anhand einiger *konkreter Zahlenbeispiele* klar! Wähle auch Zahlen, die die Voraussetzung nicht erfüllen!
- (2.2.1) Folgern aus der Behauptung: Forme die abzuleitende Gl/Ugl so lange um, bis du zu einer allgemeingültigen Gl/Ugl gelangst oder zu einer Gl/Ugl, die sich aus den Voraussetzungen ableiten läßt.
 - Untersuche, ob sich der so gefundene Weg auch von den Voraussetzungen zur Behauptung beschreiten läßt oder ob dabei noch bestimmte Modifikationen nötig sind!
- (2.2) Betrachte die abzuleitende Ungleichung!

- Weist ihre Gestalt auf eine bekannte "Standardungleichung" (z.B.die Ugl über das arithmetische, das geometrische, das harmonische und das quadratische Mittel) hin, die als Hilfsmittel einsetzbar wäre?
 - Forme zweckmäßig um, so daß dies möglich wird!
- Lassen sich die vorkommenden *Terme* günstig (nach oben oder nach unten) *abschätzen*, so daß man auf diese Weise zu einer leichter ableitbaren Ugl gelangen kann?
- (2.1) Betrachte die Voraussetzungen! Was läßt sich aus ihnen folgern?
 - Deuten sie auf die Anwendbarkeit gewisser Hilfsmittel hin?
 - Läßt sich eine der Variablen durch die anderen ausdrücken, so daß sich in der abzuleitenden Gl/Ugl die Anzahl der Variablen verringern läßt?
- (4.1) Gelingt dir die Ableitung der Gl/Ugl nicht, dann beschäftige dich zunächst mit einem Spezialfall . Vielleicht führt das zu einer brauchbaren Lösungsidee.
- (4.2) Bei der Anwendung von (2.2.1) oder (2.2) stößt man bisweilen auf *Hilfsaufgaben.*Beschäftige dich erst dann mit solchen Aufgaben, wenn du dich überzeugt hast, daß ihre Lösung die Lösung der Ausgangsaufgabe ermöglicht.
- (5) Manchmal ist es zweckmäßig, die *graphische Lösungsmethode* einzusetzen. *Untersuche* die zu vorkommenden Termen gehörenden *Funktionen und deren Graphen,* vor allem in Hinblick auf Extremwerte; dies kann beim Abschätzen von Termen helfen.

Regeln zum Lösen von Bestimmungsaufgaben aus dem Gebiet "Gleichungen/Ungleichungen"

- (2.1) Betrachte die gegebenen Gl/Ugl; analysiere die vorkommenden Terme!
- (3.2) Ermittle den Lösungsgrundbereich der Gl/Ugl (als Durchschnitt der Definitionsbereich aller vorkommenden Terme)!
 - Versuche durch *Untersuchung der Wertebereiche der* vorkommenden *Terme* und durch andere inhaltliche Überlegungen Informationen über die gesuchte Lösungsmenge zu gewinnen!
 - Untersuche bei quadratischen Gl/Ugl stets zunächst die *Diskriminante*! Welche Information liefert sie über die gesuchte Lösungsmenge?
 - Ganzzahlige Lösungen von Gleichungen n-ten Grades lassen sich mit Hilfe des Wurzelsatzes von Vieta erraten. Durch Abspalten des zu einer erratenen Lösung gehörenden Linearfaktors läßt sich der Grad der Gleichung erniedrigen.
- (5) Transformiere die Aufgabe in den Bereich "Funktionen und ihre Graphen", d.h. versuche auf graphischem Wege Informationen über die Lösungsmenge zu gewinnen!
 - Forme die Gl/Ugl so um, daß auf beiden Seiten Terme stehen, deren zugehörige Graphen du relativ einfach zeichnen kannst. Kennzeichne charakteristische Punkte und Asymptoten dieser Graphen!
 - Läßt sich auf diesem Wege die Lösungsmenge genau ermitteln , oder gewinnt man so nur Informationen über die Anzahl und die näherungsweise Lage der Lösungen?
- (2.1) Wenn du auf diese Weise die Lösungsmenge nicht genau ermitteln kannst, dann forme
- (3.1) die Gl/Ugl so lange (wenn möglich äquivalent) um, bis du zu einer Gl/Ugl gelangst, deren Lösungsmenge sich unmittelbar ablesen läßt.

 Versuche auch, durch geschickte Substitutionen die Gl/Ugl zu vereinfachen!

- Versuche die Gl/Ugl so umzuformen, daß auf der einen Seite ein Produkt, auf der anderen Seite Null steht! Denn dann kannst du (mit Hilfe eines bekannten Satzes über Produkte) zu einer Alternative von einfacheren Gl/Ugln übergehen. Neben dem Ausklammern gemeinsamer Faktoren verwende vor allem die binomischen Formeln, um Summen in Faktoren zu zerlegen.
- Entsteht beim Umformen eine Alternative bzw. eine Konjunktion von Gl/Ugln, dann erhält man die gesuchte Lösungsmenge als Vereinigung bzw. Durchschnitt der betreffenden Lösungsmengen.

Wenn du nicht immer nur äquivalent umgeformt hast, dann ist ein *Existenznachweis* in Form einer *Probe* nötig, d.h. du mußt noch nachprüfen, ob alle Lösungen der umgeformten Gleichung auch wirklich Lösungen der Ausgangsgleichung sind. (Bei Ungleichungen ist dieses Vorgehen unpraktikabel.)

Regeln zum Ermitteln des Ansatzes bei Sach- und Anwendungsaufgaben

[*Hinweis:* Das Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben (aus Physik, Technik, Ökonomie usw.) erfolgt im Prinzip stets in 3 Schritten:

- 1. Übersetzung der Aufgabe in die Sprache einer mathematischen Disziplin; (Ansatz finden);
- 2. Lösen der mathematischen Aufgabe (meist Gleichung oder Gleichungssystem);
- 3. "Rückübersetzung", d.h. Deutung des mathematischen Resultats; Formulieren des Antwortsatzes.

Wir betrachten hier nur den 1.Schritt, der einer Anwendung der Regel (5) entspricht. Der 2.Schritt entspricht im allgemeinen der Anwendung von Regel (3.2).

- (1) Was ist gegeben, was ist gesucht? Führe Variable ein!
 - Welche *allgemeinen Beziehungen* (Formeln, Gesetze) spielen bei der Lösung der Aufgabe eine Rolle?
 - Welche speziellen Beziehungen sind dem Aufgabentext unmittelbar zu entnehmen?
 - Fertige zur Veranschaulichung eine Skizze an!
 - Fertige eine *Tabelle* an!
 - Die in der einschlägigen allgemeinen Beziehung vorkommenden Größen liefern die Spalteneingänge; passend gewählte Zeileneingänge müssen dem jeweiligen speziellen Sachverhalt entnommen werden.
 - Trage die gegebenen Größen in die Tabelle ein! Kennzeichne die Felder, in denen die gesuchten Größen stehen!
- (2.1) Was läßt sich aus dem Gegebenen unmittelbar berechnen?
 Mit welchen Hilfsmitteln (Formeln, Sätzen o.ä.) ist dies möglich?
- (2.2) Aus welchen Größen ließe sich das Gesuchte unmittelbar berechnen? Verwende hierzu Formeln, in denen das Gesuchte vorkommt!

Versuche, durch Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten einen Weg vom Gegebenen über Hilfsgrössen zum Gesuchten zu finden und so eine Gleichung zu gewinnen, in der neben der gesuchten Größe nur gegebene Größen vorkommen.

- (3) Suche nach Gleichungen (Beziehungen) zwischen den gegebenen, den gesuchten und passend gewählten Hilfsgrößen! Eliminiere die Hilfsgrößen!
 - Welche Beziehungen kannst du der Skizze entnehmen?

- Fülle die Felder der Tabelle schrittweise aus, indem du die gegebenen oder gefundene Beziehungen verwendest! Dabei kannst du auch von einer Hilfsgröße ausgehen.
- Sind alle Felder der Tabelle gefüllt und wird nur eine Größe gesucht, dann gibt es in der Regel noch eine Beziehung, die beim Ausfüllen der Tabelle nicht verwendet wurde.
 Diese Beziehung liefert die Ansatzgleichung.

(Oft gibt es mehrere verschiedene Möglichkeiten, die Felder der Tabelle zu füllen, was dann auch zu verschiedenen Ansatzgleichungen führt.)

1.2 Logische Grundlagen

Auch auf diesem Gebiet lernen die Schüler in der AG Klasse 10 nicht Neues mehr kennen. Um dem Unterricht nicht vorzugreifen und um diese AG nicht stofflich zu überlasten, wurde auf eine Behandlung der vollständigen Induktion verzichtet.

Wie dem Abschnitt 5. zu entnehmen ist, geht es hier um eine Wiederholung folgender Themenbereiche: Einzigkeits- und Existenznachweis; parameterhaltige Aufgaben; logische Verwandtschaften zwischen Aussagen und Aufgaben; direkte und indirekte Beweise; Abstraktion durch Äquivalenzklassenbildung.

Was auf dem Gebiet der logischen Grundlagen in den AGn der Klassen 5 bis 9 behandelt werden kann, ist der Übersicht in Abschnitt 5. zu entnehmen. Eine relativ ausführliche Zusammenfassung dieses Inhalts findet man in /11/, S.9 - 13.

Stark im Vordergrund steht das explizite Bewußtmachen des *deduktiven Aufbaus* mathematischer Disziplinen (vgl. die Abschnitte 3.2.1., 3.2.2. und 3.2.3.) was in den AGn der niedrigeren Klassenstufen nicht vordergründig behandelt wurde.

Empfehlenswert ist auch eine rückblickende und zusammenfassende Betrachtung der Einteilung der Aufgaben in Aufgabenklassen aus logischer Sicht.

Ein erster Ausgangspunkt sind die in Abschnitt 1.1. auf S.6 eingeführten Begriffe "Start", "Ziel", Teilziel", "Hilfsmittel".

Ein zweiter Ausgangspunkt ist die Einteilung mathematischer Ausdrücke in "Term", "Aussage", "Aussageform" sowie die zugeordneten Begriffe "Wert, Definitionsbereich, Wertebereich", "Wahrheitswert" und "Erfüllungsmenge".

Das Ermitteln des Definitionsbereichs und des Wertebereichs sowie spezieller Werte eines gegebenen Terms, der Variable enthält, führt zu Aufgaben, die meist algorithmisch lösbar sind und die deshalb in unserem heuristischen Regelsystem nicht vorkommen.

Das Ermitteln des Wahrheitswerts einer gegebenen Aussage bezeichnet man als "Entscheidungsaufgabe", die je nach der getroffenen Entscheidung zur einer "Beweisaufgabe" oder einer "Widerlegungsaufgabe" wird. Die Wahrheit einer Allaussage wird meist direkt, die Falschheit einer Existenzaussage meist indirekt bewiesen; die Wahrheit einer Existenzaussage wird durch ein Beispiel, die Falschheit einer Allaussage durch ein Gegenbeispiel nachgewiesen.

Das Ermitteln der Erfüllungsmenge einer Aussageform haben wir als "Bestimmungsaufgabe vom Typ I" bezeichnet.

Sind Größen (d.h. Terme ohne Variable) und Beziehungen (d.h. Aussageformen) gegeben und Größen gesucht, dann sprechen wir von "Bestimmungsaufgaben vom Typ II".

1.3. Sachkenntnisse und Fertigkeiten

Uns ist bewußt, daß man AGn auch unter Zielstellungen durchführen kann, die sich von den hier angegebenen unterscheiden. Besonders in höheren Klassenstufen kann das Vermitteln von Wissen aus mathematischen Disziplinen, die nicht zum Unterrichtsstoff gehören, zum Inhalt mathematischer Zirkel gemacht werden. Die Gruppentheorie, Matrizen und Determinanten, lineare Optimierung, projektive Geometrie und noch viele andere Disziplinen sind hierfür geeignet.

Man könnte der Meinung sein, daß wir in der AG Klasse 10 mit dem Behandeln der Vektoralgebra und der komplexen Zahlen eben dieses Ziel verfolgen. Dem ist jedoch nicht so. Für uns ist das Vermitteln speziellen mathematischen Wissens niemals eine Selbstzweck. Bis zur AG Klasse 9 dienten vermittelte Sachkenntnisse und Fertigkeiten ausschließlich dem Ziel, neues Werkzeug zum Bewältigen problemhafter Aufgaben zu erhalten.

Der Zusammenstellung in Abschnitt 5. ist zu entnehmen, worum es sich hierbei in den einzelnen Klassenstufen handelt.

Bekanntlich dürfen die Schüler nicht nur bei der Internationalen Mathematikolympiade, sondern auch schon bei den Mathematik-Olympiaden ab Stufe 3 keine Formelsammlungen verwenden. Dies bedeutet, daß ein Schüler bei diesen Wettbewerben z.B. die in /1/ auf S.31-32 angegebenen goniometrischen Formeln und trigonometrischen Sätze auswendig kennen muß, um einschlägige Aufgaben bearbeiten zu können.

Schüler, die über keine sehr gute Merkfähigkeit verfügen, sollten daher in der Lage sein, sich derartige Formeln rasch herzuleiten.

Da das Rechnen mit komplexen Zahlen auch anderweitig ein nützliches Hilfsmittel zum Lösen problemhafter Aufgaben darstellt, und da man auf diese Weise sehr leicht zu einigen grundlegenden goniometrischen Formeln gelangen kann, lag es nahe, dieses Stoffgebiet in die AG Klasse 10 mit aufzunehmen.

Ein weiteres Argument für diese Entscheidung liegt darin, daß sich an diesem Beispiel der deduktive Aufbau einer Theorie besonders günstig demonstrieren läßt.

Aus den verschiedenen Möglichkeiten, die Theorie der komplexen Zahlen deduktiv aufzubauen, haben wir diejenige ausgewählt, die einen stark "geometrischen" Zugang zu dieser Theorie gestattet.

Entscheidend ist die Stelle, an der die Multiplikation komplexer Zahlen definiert wird. In mathematischen Vorlesungen geschieht dies in der Regel auf der Grundlage der Darstellung komplexer Zahlen als geordnete Paare reeller Zahlen.

Uns lag daran, die Möglichkeit der graphischen Deutung von Zahlen als Punkte maximal auszunützen. Damit war klar, daß wir gleich zu Anfang die Gaußsche Zahlenebene als eine Erweiterung der Zahlengeraden einführen wollten.

Ferner lag es nahe, die Zusammenhänge zwischen komplexen Zahlen und Vektoren (bzw. Pfeilen) auszunützen. Der Addition komplexer Zahlen entspricht eine "Addition" zugehöriger Pfeile, der Multiplikation komplexer Zahlen eine "Drehstreckung" solcher Pfeile.

Daher haben wir gleich am Anfang die beiden gleichberechtigten Darstellungen (x;y) bzw, $[|z|; \phi]$ eingeführt. So war es möglich, die Addition m.H. der Darstellung (x;y), die Multiplikation m.H. der Darstellung $[|z|; \phi]$ zu definieren und damit den geometrtischen Aspekt hervorzuheben

Da das Rechnen mit Vektoren nicht nur einen Zugang zum Rechnen mit komplexen Zahlen eröffnet, sondern auch anderweitig ein wichtiges Hilfsmittel zum Lösen geometrischer Aufgaben darstellt, haben wir auch dieses Stoffgebiet in die AG Klasse 10 aufgenommen.

2. ZU EINIGEN ORGANISATORISCHEN UND DIDAK-TISCHEN FRAGEN

Da die Aufgabensammlung /1/ sowohl für Schularbeitsgemeinschaften als auch für Arbeitsgemeinschaften auf Kreisebene bestimmt ist, muß der AG-Leiter in Abhängigkeit von der durchschnittlichen Leistungsfähigkeit und von den Interessen seiner Schüler zunächst entscheiden, welche der in Abschnitt 1. genannten Ziele er erreichen möchte. Dadurch ist die Auswahl des zu behandelnden Stoffs, speziell der zu lösenden Aufgaben bis zu einem gewissen Grad bereits festgelegt, und auch das methodische Vorgehen wird sich nach den angestrebten Zielen richten müssen.

Es ist zu empfehlen, daß der AG-Leiter einen **Jahresarbeitsplan** aufstellt, in dem der zeitliche Umfang für die zu behandelnden Stoffgebiete, die zu behandelnden Aufgaben (-gruppen), der zu erarbeitende Merkstoff und die zu wiederholenden Stoffgebiete aus den Aufgabensammlungen der Klassenstufen 6 - 9 festgehalten werden.

Die Befähigung der Schüler zum selbständigen Erwerb von Wissen und Können wurde als eines der zentralen Ziele hervorgehoben. Man sollte daher die Schüler bewußt an ein zielgerichtetes "Literaturstudium" heranführen und sie dabei anleiten.

Hierfür bieten sich zunächst Abschnitte aus dem jeweiligen Lehrbuch an, die (als Hausaufgabe) von den Schülern zu wiederholen sind.

Diesbezüglich ungeübte Schüler sollten den "Merkstoff" in den Aufgabensammlungen zunächst für eine Zusammenfassung und Wiederholung des im Zirkel gemeinsam erarbeiteten Stoffes nutzen.

In einer AG Klasse 10 sollten die Schüler dazu angehalten werden, derartigen Merkstoff auch selbständig zu erarbeiten. Dies wird in der Regel in mehreren Etappen erfolgen, die vom AG-Leiter zu planen sind.

Darüber hinaus sollte man die leistungsfähigsten Schüler anregen, z.B. Beiträge aus der Zeitschrift "Alpha" oder aus ausgewählten Bänden der "Mathematischen Schülerbücherei" selbständig durchzuarbeiten. Teile des so erworbenen Wissens und Könnens können dann in Form kurzer Schülervorträge an die anderen Schüler weitergegeben werden.

Selbst bei günstigen Möglichkeiten für eine äußere Differenzierung finden sich in der Regel Schüler mit unterschiedlicher Leistungsfähigkeit in einer AG zusammen. Da wir uns das Ziel stellen, jeden Schüler stets an der oberen Grenze seiner Leistungsfähigkeit zu fordern, kann man auf Maßnahmen einer **inneren Differenzierung** nicht verzichten.

Hinweise hierzu findet man in 171 auf S.14 - 15.

Es empfiehlt sich, für jeden Zirkel zwei "Angebote" zu planen und an der Wandtafel festzuhalten.

Das "Normalangebot" richtet sich zunächst an alle Schüler. Es besteht aus der Angabe aller Aufgaben, die im jeweiligen Zirkel behandelt werden sollen, sowie aus an der Wandtafel festgehaltenen "Leerstellen" für Teilresultate und das Endresultat der zu behandelnden Aufgaben.

Die Schüler werden aufgefordert, sich zu melden, wenn sie eine Aufgabe gelöst zu haben glauben und sich dann sofort der nächsten Aufgabe zuzuwenden.

Nach einer angemessenen Zeit läßt sich der AG-Leiter die gewonnenen Teilresultate und Resultate nennen, hält sie kommentarlos an der Wandtafel fest und fragt nur, ob es Schüler gibt, die andere Resultate erhalten haben. Ist das der Fall, dann werden sie auch an der Wandtafel festgehalten, und die Schüler werden aufgefordert, zu entscheiden, welches der angeschriebenen Resultate das richtige ist.

Wer die Aufgaben des "Normalangebots" richtig gelöst hat, beschäftigt sich mit dem "Zusatzangebot", das Aufgaben höheren Schwierigkeitsgrades enthält.

Leistungsstarke Schüler, die überzeugt sind, die Aufgaben des "Normalangebots" lösen zu können (z.B. Mitglieder des Korrespondenzzirkels Mathematik), dürfen sich sofort mit den

Aufgaben des "Zusatzangebots" beschäftigen. In der Regel sind dies nur einige wenige Schüler der AG, so daß der AG-Leiter hinreichend Zeit hat, diese Schüler individuell zu beraten, während die Lösungen zu den Aufgaben des "Normalangebots" nach angemessener Zeit mit allen AG-Mitgliedern gemeinsam besprochen werden.

Auf verschiedene **Formen der Zirkelarbeit** wird in /7/ auf S.15-17 relativ ausführlich eingegangen.

Es ist von Vorteil, wenn sich ein Zirkel im äußeren Ablauf deutlich von einer Unterrichtsstunde unterscheidet.

Das frontale *Unterrichtsgespräch* sollte auf keinen Fall dominieren. Vor allem achte man darauf, daß hierbei die leistungsstärksten Schüler die Lösungen nicht gleich verraten und dadurch den leistungsschwächeren Schülern die Möglichkeit zu selbständiger intensiver geistiger Arbeit nehmen.

Die wichtigste Form ist wohl die von Auswertungen unterbrochene *Stillarbeit*, bei der sich keinesfalls immer alle Schüler zur gleichen Zeit mit derselben Aufgabe beschäftigen müssen. Sehr effektiv kann auch die *Gruppenarbeit* sein, bei der die Mitglieder einer jeden Gruppe gemeinsam an der Lösung einer Aufgabe arbeiten, wobei sich durchaus verschiedene Gruppen auch mit verschiedenen Aufgaben beschäftigen können. Besonders leicht organisierbar ist die Arbeit in Zweiergruppen.

Heuristische Schulung besteht für uns im bewußten Vermitteln von weitgehend inhaltsunabhängigen Fragen oder Impulsen, durch deren Anwendung ein Lösungerfolg zwar nicht garantiert wird, wohl aber die Wahrscheinlichkeit, zu einer Lösung zu gelangen, stark anwächst.

Beim bewußten Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen sind einige **Prinzipien** zu beachten:

- 1. Heuristisches Vorgehen läßt sich nur im Prozeß angestrengter geistiger Tätigkeit beim weitgehend selbständigen Lösen anspruchsvoller Aufgaben (und nicht etwa nur durch Zuhören) erlernen. Dazu muß man dem Schüler Zeit lassen! Ein kurzschrittiges Steuern der Schülerhandlungen mit dem Ziel, möglichst rasch zur einer Lösung zu gelangen, ist eine für die heuristische Schulung unbrauchbare Methode.
- 2. Heuristische Hilfsmittel, Strategien oder Prinzipien sollten stets anhand solcher Aufgaben eingeführt werden, die der Schüler nicht oder nur mit unangemessenem Aufwand selbständig lösen könnte.

Nach einer "Trainingsphase", in der eine geeignete Aufgabenfolge eingesetzt wird, muß dann eine Phase kommen, bei der sich der Schüler beim Lösen "vermischter" Aufgaben selbständig für eine heuristische Vorgehensweise entscheiden muß.

- Je begabter ein Schüler ist, desto häufiger sollte man ihn auffordern, gewohnte Bahnen zu verlassen und es einmal auch "ganz anders zu versuchen".
- 3. Um die Gemeinsamkeiten des Vorgehens beim Lösen unterschiedlicher Aufgaben hervorzuheben, sollte sich der AG-Leiter der "genormten Impulse" bedienen, die zur Charakterisierung der Strategien verwendet wurden. Es sind dies die (inhaltsunabhängigen) "Hauptimpulse", die nur dann durch "Unterimpulse" ergänzt werden sollen, wenn der Hauptimpuls noch nicht zum Ziel geführt hat. Auch diese Unterimpulse sollten vom konkreten Aufgabeninhalt noch möglichst wenig abhängen. Konkrete Lösungshinweise sollten nur notfalls und dann ganz zum Schluß kommen.
- 4. Das Endziel besteht darin, daß die Schüler derartige Fragen und Impulse übernehmen und beim Lösen problemhafter Aufgaben in der Regel unterbewußt einsetzen. Sie sollten jedoch

dazu angehalten werden, beim Auftauchen größerer Schwierigkeiten das ihnen zur Verfügung stehende Repertoir an heuristischen Vorgehensweisen bewußt durchzumustern.

Auf diese Weise soll die "strategische Ratlosigkeit" überwunden werden, die darin besteht, daß man keine Idee mehr hat, wie man das Problem anpacken könnte.

Um dies zu erreichen, wird folgendes Vorgehen empfohlen:

Die Fragen und Impulse werden zunächst vom Lehrer formuliert, dann aber möglichst rasch von den Schülern selbst gestellt. Wer einen Lösungsweg gefunden hat, darf ihn nicht verraten, er darf lediglich die nächste Frage stellen, den nächsten Impuls geben.

Auf diese Weise werden die leistungsstärksten Schüler zusätzlich gefordert, die leistungsschwächeren Schüler haben mehr Zeit zur Aneignung der Vorgehensweise und den leistungsschwächsten Schülern bleibt es überlassen, die Lösung zu formulieren.

Im Idealfall spielt der AG-Leiter bei einem Unterrichtsgespräch nur die Rolle eines Dirigenten, der bestimmt, wer zu Wort kommen soll, und der die gestellten Fragen oder Impulse sowie die zugehörigen Antworten wertet.

5. Man sollte Schülern nie einen bestimmten Lösungsweg aufdrängen, sondern sie stets selbst suchen lassen.

Der AG-Leiter sollte möglichst alle naheliegenden Lösungswege einer Aufgabe kennen, um Lösungsvorschläge der Schüler richtig bewerten zu können. Die Schüler sollen wissen, daß man sie aus Gründen der Zeitersparnis im Zirkel vor "Sackgassen" bewahrt, die sich beim selbständigen Lösen nicht ausschließen lassen. Bei der Diskussion nach Phasen der Stillarbeit oder der Gruppenarbeit sollte der AG-Leiter auch auf diese Problematik eingehen.

Wenn es zu einer Aufgabe mehrere wesentlich verschiedene Lösungswege gibt, dann sollte man in der Phase des Rückblicks nach allen diesen Lösungswegen systematisch suchen lassen und nachträglich eine Diskussion über Vorteile und Nachteile der verschiedenen Lösungswege durchführen.

Bei der organisatorischen und didaktischen Gestaltung der Zirkel sollte der AG-Leiter stets unser *Hauptziel* im Auge behalten:

Es geht um die systematische Förderung mathematisch begabter und interessierter Schüler, wobei die Entwicklung der Fähigkeit zum problemlösenden Denken im Vordergrund steht. Dieses Ziel läßt sich aber nur erreichen, wenn die Zirkel so gestaltet werden, daß den Schülern diese zusätzliche Beschäftigung mit Mathematik auch Spaß macht.

3. VORSCHLÄGE ZUR GESTALTUNG DER ZIRKEL

3.1. Gleichungen, Ungleichungen und Funktionen

Ziele:

Heuristische Vorgehensweisen

- Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten beim Lösen von Beweis- und Bestimmungsaufgaben
- Durchschnittsbildung von Erfüllungsmengen beim graphischen Lösen von Gleichungssystemen
- Transformationsprinzip beim graphischen Lösen von Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen
- Rückführungsprinzip (Suche nach und Rückführung auf Hilfsaufgaben)
- Bewußte Suche nach möglichst einfachen Lösungswegen vor dem Einsatz algorithmischer Lösungsverfahren; geschicktes quasialgorithmisches Vorgehen beim Ermitteln von Lösungsmengen

Logische Grundlagen

- "Begründete Herleitung" als Einzigkeitsnachweis; "Probe" als Existenznachweis; Rolle von Stichproben bzw. von Proben am Spezialfall
- Äquivalentes Umformen zum Zweck der Vereinfachung von Aussageformen; gleichzeitiger Nachweis von Einzigkeit und Existenz von Lösungen; Rolle der Probe
- Parameterhaltige Aufgaben als Aufgabenklassen; Interpretation von Parametern; vollständige Lösungsdiskussion (Determination)
- Verallgemeinern und Spezialisieren von Aussagen
- Indirekte Beweise

Sachkenntnisse und Fertigkeiten

- Rechnen mit Potenzen, Wurzeln und Logarithmen
- Fertigkeiten im geschickten Umformen von Bruch- , Wurzel- , Exponential- und Logarithmengleichungen sowie von nichtlinearen Gleichungssystemen
- Eigenschaften und Graphen von ganzen rationalen Funktionen, Wurzelfunktionen, Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen

Für eine selbständige Wiederholung durch die Schüler sollten genutzt werden:

- Aufgabensammlung /6/ für Kl.7: S.17 "Aussageformen und Mengen; Abbildungen; Terme; Gleichungen"; S.18 "Regeln für das äquivalente Umformen von Gleichunen und Ungleichungen".
- Aufgabensammlung /8/ für Kl.8: S.15 "Das Beweisen von Gleichheits- und Ungleichheitsaussagen"; S.21. "Funktionen und ihre Graphen".
- Aufgabensammlung /10/ für Kl.9: S.23 "Lineare Gleichungssysteme; der Gaußsche Algorithmus"; S.24 "Quadratische Gleichungen und Ungleichungen"; S.25 "Gleichungen höheren Grades"; S.26 "Transformation von Funktionsgraphen".

In diesem Abschnitt werden folgende Stoffgebiete behandelt:

- (1) Aufg. 1) 4) : Ermitteln der Lösungsmenge von Bruch- und Wurzelgleichungen bzw. -ungleichungen
- (2) Aufg. 5) 16) : Eigenschaften von ganzen rationalen Funktionen; einfache Funktionalgleichungen
- (3) Aufg.17) 20): Nichtlineare Gleichungssysteme
- (4) Aufg.21) 24): Potenzen mit rationalen Exponenten; Exponentialgleichungen

(5) Aufg. 25) - 33): Logarithmen (Termberechnungen; Beweis von Gesetzen; Gleichungen und Ungleichungen mit Logarithmen)

(6) Aufg. 34) - 37): Graphen von Exponential-, Logarithmus- und Wurzelfunktionen;

graphisches Lösen von entsprechenden Gleichungen

(7) Aufg. 38) - 42): Beweisen von Ungleichheitsaussagen

Wenn man in einer Schularbeitsgemeinschaft das Ziel verfolgt, den *Unterrichtsstoff zu festigen und zu vertiefen*, dann sollte man sich vor allem mit den Stoffgebieten (1), (4), (5) und (6) beschäftigen. Ferner empfiehlt es sich, auf die Aufgabensammlungen /8/ und /10/ für die Klassen 8 bzw. 9 zurückzugreifen.

Aus der AG Klasse 8 bieten sich folgende Abschnitte an: "Funktionen und ihre Graphen", S.11, Aufg. 1) bis 6); "Das Berechnen und Umformen von Termen", S.12, Aufg. 12) bis 17); "Das Bestimmen der Lösungsmenge von Gleichungen und Ungleichungen", S.13, Aufg.18) bis 26); "Sach- und Anwendungsaufgaben", S.16, Aufg.37) bis 44).

Aus der AG Klasse 9 sollte man aus dem Abschnitt "Arithmetik" auf S.10, Aufg. 16) bis 28) das Lösen von Bruchgleichungen sowie von Gleichungen 2. bis 4.Grades wiederholen

Verfolgt man das Ziel, den *Unterrichtsstoff zu erweitern*, dann sollte man auch das Stoffgebiet (3) behandeln. Aus der AG Klasse 8 bietet sich hierfür der Abschnitt "Funktionen und ihre Graphen", S.11, Aufg.7) bis 11) an. Aus der AG Klasse 9 sollte man auf S.8 mit Aufg. 1) bis 14) den Gaußschen Algorithmus zum Lösen linearer Gleichungssysteme sowie das Lösen nichtlinearer Gleichungssysteme nebst zugehörigen Anwendungsuafgaben wiederholen.

Möchte man auch eine Vorbereitung auf mathematische Wettbewerbe durchführen, dann muß man auch das Stoffgebiet (7) mit einbeziehen. Hierzu gehören aus der AG Klasse 8 der Abschnitt "Das Beweisen von Gleichheits- und Ungleichheitsaussagen", S.15, Aufg.27) bis 36) sowie aus der AG Klasse 9 die Aufgaben 29) bis 37) auf S.12.

In der Klassenstufe 10 kommt der Befähigung zum selbständigen Erwerb von Können und Wissen eine sehr große Bedeutung zu. Daher sollte man für das Erarbeiten des "Merkstoffs" durch die Schüler stets genügend Zeit einplanen und beachten, daß man vor allem leistungsschwächere Schüler dabei anfangs stark unterstützen muß. Die Schüler sollten stets die Aufgabensammlungen für die AG Klasse 8 und 9 mitbringen. Beim Wiederholen von benötigtem Wissen und Können sollte man stets auf den "Merkstoff" dieser Aufgabensammlungen zurückgreifen lassen.

In jedem der oben genannten Stoffgebiete (1) bis (7) gibt es Aufgaben von stark unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad. Um dem Lehrer die Aufgabenauswahl zu erleichtern, geben wir eine für leistungsschwächere Schüler bestimmte "Minimalvariante" und eine für leistungsstarke Schüler bestimmte "Maximalvariante" an.

Minimalvariante

1a),b),c)	Bruchgleichungen
4a),b),c),d),e)	Wurzelgleichungen
5), 6)	Begriff, Graphen und Eigenschaften von ganzen rationalen Funktionen
5), 21a)- i), 22a)-f) Erweiterungen des Potenzbegriffs; Berechnen entsprechender Terme
23), 24)	Exponentialgleichungen
5), 25a)- f)	Begriff des Logarithmus; Berechnen entsprechender Terme
26),27), 28a)- d	Entdecken, Beweisen und Anwenden von Logarithmengesetzen
31a)- g)	Gleichungen mit Logarithmen
34), 35a),b), 36	a),b) Graphisches Lösen von Gleichungen
38a),39), 40a),	41a) Beweisen von Ungleichheitsaussagen

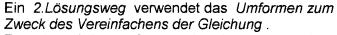
Maximalvariante

1d),e), 2), 3)	Bruchgleichungen, auch parameterhaltig
4m),n),o)	Wurzelgleichungen und -ungleichungen
5), 8), 9), 10), 14), 15a),b), 16a),b) Eigenschaften von ganzen rationalen Funktionen
7), 11),12), 13)	Einfache Funktionalgleichungen
17a)- d), 18a) - f), 19a)- d	c) Nichtlineare Gleichungs- und Ungleichungssysteme
27), 29a)- d), 30)	Entdecken, Beweisen und Anwenden von Logarithmengesetzen
32a),b), 33)	Gleichungen und Gleichungssystem mit Logarithmen
38b), 40a)- c), 41a),b), 42	2) Beweisen von Ungleichheitsaussagen

Bei der Aufgabe 1) sollte man eine zusammenfassende Wiederholung des einschlägigen Stoffs aus der AG Klasse 8 und Klasse 9 durchführen:

- Zerlegen der Teilnenner in Faktoren und Festhalten des Lösungsgrundbereichs ;
- Ermitteln des Hauptnenners HN und der zugehörigen Erweiterungsfaktoren ;
- Erraten ganzzahliger Lösungen mit Hilfe des Vietaschen Wurzelsatzes ;
- Abspalten von Linearfaktoren durch Partialdivision;
- Berechnen der Diskriminante $D = b^2 4ac$ eines quadratischen Terms $f(x) = ax^2 + bx + c$;
- Lösungsformel für quadratische Gleichungen;
- Transformation von Funktionsgraphen und graphisches Lösen von Gleichungen.

Bei der Aufgabe 1a) lohnt das graphische Lösungsverfahren, weil man auf diese Weise sofort erkennt, daß die Gleichung genau eine Lösung besitzt, die sich ablesen läßt. Dabei muß mit Hilfe der Eigenschaften der zugehörigen Graphen begründet werden, warum es außerhalb des gezeichneten Ausschnitts keine weiteren Lösungen geben kann (Einzigkeitsnachweis), und es muß mit Hilfe einer Probe nachgewiesen werden, daß die abgelesene Lösung tatsächlich die Gleichung erfüllt (Existenznachweis).



Zunächst wird x = 2 aus dem Lösungsgrundbereich ausgeschlossen.

Dann gelangt man durch äquivalentes Umformen

über
$$\frac{1}{x-2} = (x-2)^2$$
 und $(x-2)^3 = 1$ zu $x-2=1$ und somit zur Lösungsmenge $L=\{3\}$.

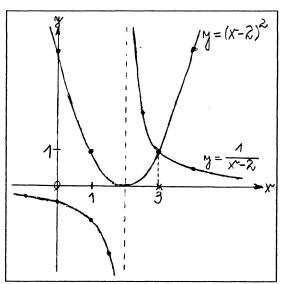
Obwohl (wegen des äquivalenten Umformens) eine Probe aus logischer Sicht überflüsssig ist, sollte man sie dennoch durchführen, um aufgetretene Rechenfehler erkennen und verbessern zu können.

Bei einem Vergleich der beiden Lösungswege wird man feststellen, daß der 2.Lösungsweg günstiger ist als der 1.Lösungsweg.

Bei $Aufgabe\ 1b)$ kann man auf graphischem Weg erkennen, daß die Gleichung genau drei Lösungen besitzt, wobei nur x=3 eine ganzzahlige Lösung sein kann.

Auf rechnerischem Weg gelangt man durch äquivalentes Umformen zu

$$x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = (x^2 - x - 1)(x - 3) = 0$$
.



Da die Diskriminante D = 1 + 4 = 5 positiv aber keine Quadratzahl ist, besitzt der quadratische Term zwei Nullstellen, die nicht ganzzahlig sind. Durch Anwenden der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhält man die gesuchte Lösungsmenge L = $\{\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}); \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}); 3\}$.

Bei Aufgabe 1c) gelangt man durch äquivalentes Umformen über dem Lösungsgrundbereich $X = R \setminus \{0; -1; \frac{1}{2}\}$ zur vereinfachten Gleichung $0 \cdot x + \frac{1}{2} = 0$ und somit zu $L = \emptyset$.

Als wesentlich schwieriger erweist sich die Aufgabe 1d), weil hier routinemäßiges Vorgehen nicht zum Ziel führt.

Nach dem Feststellen des Erfüllungsgrundbereichs gelangt man durch äquivalentes Umformen

von (1)
$$\frac{x^2 + 12x + 4}{x + 2} = 6\sqrt{x}$$
, $x \ge 0$

zu (2)
$$x^4 - 12x^3 + 8x^2 - 48x + 16 = 0$$
, $x \ge 0$.

Nun kann man sich überzeugen, daß diese Gleichung keine ganzzahligen Lösungen besitzt und daß man daher durch das übliche Abspalten von Linearfaktoren nicht weiterkommt. Es bedarf schon einiger Findigkeit, um folgende Faktorzerlegung zu entdecken und so zu folgender Gleichung zu gelangen, die mit (1) und (2) äquivalent ist:

(3)
$$(x^2 - 12x + 4)(x^2 + 4) = 0$$
, $x \ge 0$.

Der Rest ist einfach. Da stets $x^2 + 4 > 0$ gilt, muß $x^2 - 12x + 4 = 0$ gelten, was zur gesuchten Lösungsmenge L = $\{6 - 4\sqrt{2}; 6 + 4\sqrt{2}\}$ führt.

Ein 2.Lösungsweg benötigt ebenfalls geschickte, nicht leicht zu findende Umformungen. Zunächst überzeugt man sich, daß x = 0 keine Lösung der Gleichung (1) ist und man daher x > 0 fordern kann. Für positive x ist folglich (1) äquivalent mit

$$\frac{(x+2)^2 + 8x}{x+2} = 6\sqrt{x} ,$$

also mit

$$x + 2 + \frac{8x}{x + 2} = 6\sqrt{x}$$

sowie mit

$$\frac{x+2}{\sqrt{x}} + \frac{8\sqrt{x}}{x+2} = 6$$

Nun führt die Substitution $z = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$ zur Gleichung $z + \frac{8}{z} = 6$, die für z > 0 äquivalent ist mit $z^2 - 6z + 8 = 0$, d.h. mit z = 2 oder z = 4.

z = 2 führt zu $x - 2\sqrt{x} + 2 = 0$, also auf den Widerspruch $(\sqrt{x} - 1)^2 + 1 = 0$.

z = 4 führt zu der oben angegebenen Lösungsmenge.

Auch die Aufgabe 1e) besitzt einen recht hohen Schwierigkeitsgrad. Zunächst liegt es nahe, die Teilnenner in Faktoren zu zerlegen. So gelangt man zu

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-4)} + \frac{1}{(x-4)(x-5)} + \frac{1}{(x-5)(x-6)} + \frac{1}{(x-6)(x-7)} = \frac{x(x+5)}{(x-1)(x-7)} \,, \quad x \not\in \{1,2,3,4,5,6,7\} \,.$$

Nun bietet allerdings das Multiplizieren mit dem Hauptnenner kaum Aussicht auf Erfolg. Man würde mit viel Rechenaufwand zu einer Gleichung 5. Grades gelangen.

Entscheidend ist die Erkenntnis, daß sich jeder der Brüche auf der linken Seiten als Summe zweier einfacherer Brüche darstellen läßt.

Aus
$$\frac{1}{(x-6)(x-7)} = \frac{1}{x-7} - \frac{1}{x-6}$$
 und $\frac{1}{(x-5)(x-6)} = \frac{1}{x-6} - \frac{1}{x-5}$ folgt $\frac{1}{(x-6)(x-7)} + \frac{1}{(x-5)(x-6)} = \frac{1}{x-7} - \frac{1}{x-5}$.

So gelangt man zu folgender Gleichung, die der Ausgangsgleichung äquivalent ist:

$$\frac{1}{x-7} - \frac{1}{x-1} = \frac{x^2 + 5x}{(x-1)(x-7)} , \quad x \notin \{1,2,3,4,5,6,7\} .$$

Der Rest ist einfach. Man gelangt zur Gleichung $x^2 + 5x - 6 = 0$, also zu x = -6 oder x = 1. Wegen $x \ne 1$ lautet die gesuchte Lösungsmenge daher $L = \{-6\}$.

Beim Lösen der in Aufgabe 2a) gegebenen parameterhaltigen Bruchgleichung führt routinemäßiges Vorgehen zum Ziel.

Es empfiehlt sich, zunächst den Hauptnenner HN und die Erweiterungsfaktoren durch eine Nebenrechnung zu ermitteln und den Erfüllungsgrundbereich festzuhalten. Die Lösung läßt sich wie folgt darstellen:

Teilnenner	Erweiterungsfaktoren
$x^2 - p^2 = (x + p)(x - p)$	2(x + p) = 2x + 2p
$x^2 + 2px + p^2 = (x + p)^2$	2(x - p) = 2x - 2p
2x - 2p = 2(x - p)	$(x + p)^2 = x^2 + 2px + p^2$
$HN = 2(x - p)(x + p)^2$	

Auf diese Weise haben wir die parameterhaltige Ausgangsgleichung durch äquivalentes Umformen maximal vereinfacht und müssen nun noch durch die *Determination* feststellen, wie die Lösungsmenge in Abhängigkeit vom Parameterwert beschaffen ist.

Viele Schüler ziehen hier den (naheliegenden aber falschen) Schluß, daß die Gleichung für p < 0 keine, für p = 0 genau eine und für p > 0 genau zwei Lösungen besitzt. Der Trugschluß besteht darin, daß die Bedingung $x \neq \pm p$ nicht berücksichtigt wird.

Für p = 0 wird x = 0, was der Bedingung $x \neq p$ widerspricht; daher existiert auch für p = 0 keine Lösung.

Für p = 1 wird (x = -3 oder x = 1), also liefert x = 1 keine Lösung, weil dies wieder der Bedingung $x \ne p$ widerspricht. Also gibt es für p = 1 nicht zwei, sondern nur eine Lösung.

Dies führt zu der folgenden vollständigen Lösungsdiskussion:

Wenn
$$p \le 0$$
, dann $L = 0$;
wenn $p = 1$, dann $L = \{-3\}$;
wenn $p > 0$ und $p \ne 1$, dann $L = \{-p - 2\sqrt{p}\} - p + 2\sqrt{p}\}$.

Es empfiehlt sich, hier einige weiterführende Betrachtungen durchzuführen.

Jede parameterhaltige Gleichung ist eine Klasse von (in der Regel unendlich vielen) konkreten Gleichungen. Mit der allgemeinen Lösung einer parameterhaltigen Gleichung verfügt man daher über die Lösungsmengen von unendlich vielen konkreten Gleichungen, und man kann nach denjenigen Gleichungen suchen, deren Lösungsmengen eine bestimmte Bedingung

erfüllen. Man sollte die Schüler auffordern, selbst derartige weiterführende Aufgaben zu stellen. So erkennt man z:B., daß die Lösungen genau dann ganzzahlig sind, wenn p eine Quadratzahl ist, daß nur für p = 4 eine der beiden Lösungen die Zahl 0 sein kann, u.ä.

Da nur äquivalent umgeformt wurde, ist eine Probe nicht erforderlich. Es ist jedoch zu empfehlen, günstige *Stichproben* durchzuführen, um Rechenfehler zu entdecken. So kann man u.U. entdecken, daß die zu p=0 gehörende Gleichung keine, die zu p=1 gehörende Gleichung nur eine Lösung besitzt und daß die zu p=4 gehörende Gleichung tatsächlich die aus der allgemeinen Lösung folgende Lösungsmenge $L=\{-8;0\}$ besitzt.

Die Aufgabe 2b) wird analog gelöst, hier sind jedoch die rechentechnischen Schwierigkeiten größer.

Die Gleichung
$$\frac{x^2 - p + 3p^2}{x - p} + 2x = 3$$
, $x \neq p$

läßt sich durch äquivalentes Umformen vereinfachen zur Gleichung

(1)
$$3x^2 - (2p+3)x + (3p^2+2p) = 0$$
, $x \neq p$.

Für die Diskriminante des quadratischen Terms auf der linken Seite der Gleichung gilt

$$D = (2p+3)^2 - 12(3p^2+2p) = -32p^2 - 12p + 9 = (4p+3)(3 - 8p)$$
.

Folglich gilt D < 0 genau dann, wenn $p \in (-\infty; -\frac{3}{4}) \cup (\frac{3}{8}; \infty)$;

D = 0 genau dann, wenn p $\in \{-\frac{3}{4}, \frac{3}{8}\}$;

D > 0 genau dann, wenn $p \in \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{8}\right)$.

Nun muß noch die Bedingung $x \neq p$ berücksichtigt werden. Die Lösungen der Gleichung (1) lauten

(2)
$$x_{1,2} = \frac{1}{6}(2p + 3 \pm \sqrt{(4p + 3)(3 - 8p)})$$
, $x \neq p$.

Hieraus folgt nach einiger Rechnung dann die Bedingung $p \neq 4p^2$, also $p \neq 0$ und $p \neq \frac{1}{4}$.

Für p = 0 gilt (x = 1 oder x = 0), wobei x = 0 keine Lösung liefert, da dies der Bedingung $x \neq p$ widerspricht.

Für $p = \frac{1}{4}$ erhält man ($x = \frac{11}{12}$ oder $x = \frac{1}{4}$), wobei $x = \frac{1}{4}$ wieder keine Lösung liefert.

Dies führt schließlich zu der folgenden vollständigen Lösungsdiskussion :

In *Aufgabe 3)* kommen Gleichungen vor, die dem Schüler vom Unterricht her nicht vertraut sind. Es sind alle geordnete Paare (k;x) aus einer ganzen Zahl k und einer reellen Zahl x zu ermitteln, die eine Bruchgleichung erfüllen.

Bevor die Schüler mit dem Umformen beginnen, sollten sie zunächst nach einem erfolgversprechenden "groben Lösungsplan" suchen.

Würde man alle ganzen Zahlen kennen, die in einem derartigen Zahlenpaar vorkommen können, dann käme man leicht ans Ziel.

Bei Aufgabe 3a) führt eine einfache Abschätzung des Bruchs ans Ziel, bei den Aufgaben 3b,c) kann man nach Umformung in eine quadratische Gleichung mit Hilfe der Diskriminante entscheiden, für welche ganzen Zahlen k es Lösungen geben kann.

Bei Aufgabe 3a) kann k nur die Werte 1, 2 oder 3 annehmen, da für alle reellen Zahlen stets $0 < \frac{3}{3x^2 + 1} \le 3$ gilt.

Für k = 1 gilt dann 3 = $3x^2 + 1$, also $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ oder $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Dies liefert die Zahlenpaare (1; $\sqrt{\frac{2}{3}}$) und (1; - $\sqrt{\frac{2}{3}}$) als Lösungen .

Analog erhält man für k=2 die Lösungen (2; $\sqrt{\frac{1}{6}}$) und (2; $-\sqrt{\frac{1}{6}}$) und für k=3 die Lösung (3; 0). Eine Probe bestätigt die Richtigkeit der Lösungen.

Bei Aufgabe 3b) hat der Nenner des Bruchs keine Nullstellen, also ist die gegebene Bruchgleichung äquivalent mit $x = k(x^2 - 6x + 10)$ und damit auch mit $kx^2 - (6k+1)x + 10k = 0$.

Die Diskriminante D = $(6k+1)^2 - 40k^2 = -4k^2 + 12k + 1$ besitzt die Nullstellen $x_{1,2} = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{10})$.

Wegen $x_1 \approx 3,08$ und $x_2 \approx -0,08$ gilt $D \ge 0$ genau dann, wenn k=0, k=1, k=2 oder k=3 gilt. Hieraus folgt dann, daß unsere Gleichung nur für diese Werte von k=3 Lösungen besitzen kann. Die zugehörigen Werte von k=3 ermittelt man so, wie bei Aufgabe 3a) angegeben. Eine Probe bestätigt die Richtigkeit der Lösungen.

Dies führt zur gesuchten Lösungsmenge L = { (0; 0), (1; 5), (1; 2), (2; 4), 2; $\frac{5}{2}$), (3; $\frac{10}{3}$), (3; 3) }.

Aufgabe 3c) wird analog gelöst. Die gegebene Bruchgleichung erweist sich als äquivalent zur quadratischen Gleichung kx² - (5k+1)x + 7k = 0, die wegen $D = -3k^2 + 10k + 1$ nur für k = 0, k = 1, k = 2 oder k = 3 Lösungen besitzen kann. Die gesuchte Lösungemenge lautet $L = \{(0; 0), (1; 3 - \sqrt{2}), (1; 3 + \sqrt{2}), (2; \frac{7}{2}), (2; 2), (3; \frac{7}{3}), (3; 3)$.

Bei der *Aufgabe 4)* wiederhole man folgende in der AG Klasse 8 und Klasse 9 eingeführte Vorgehensweise:

- Man ermittle stets zuerst den Erfüllungsgrundbereich X der Gl/Ugl als Durchschnitt der Definitionsbereiche der vorkommenden Terme bzw. halte explizit fest, welche Elemente nicht zur gesuchten Lösungsmenge L gehören können.
- Bevor man mit dem Umformen der Gl/Ugl beginnt, sollte man stets versuchen, durch inhaltliche Überlegungen (vor allem durch Betrachten der Wertebereiche der vorkommenden Terme) die gesuchte Lösungsmenge auf möglichst einfache Weise zu ermitteln. Desgleichen sollte man überlegen, ob die graphische Lösungsmethode nützlich sein kann.
- Man gebe dem äquivalenten Umformen einer Gl/Ugl vor dem nur implizierenden Umformen stets den Vorzug, weil man dann auf eine Probe verzichten kann.
- Beim äquivalenten Umformen der Gl/Ugl wähle man keine feste, sondern eine zweckmäßige Reihenfolge der Umformungsschritte, um möglichst geschickt und rasch zu der vereinfachten Gl/Ugl zu gelangen.
- Wenn eine Umformung nur unter einer bestimmten Bedingung eine zur Ausgangsgl./-ugl äquivalente Gl/Ugl liefert, dann muß man für alle Elemente, die diese Bedingung nicht erfüllen, durch inhaltliche Überlegungen nachprüfen, ob sie zur Lösungsmenge gehören oder nicht. Dies spielt besonders beim beidseitigen Quadrieren einer Gl/Ugl eine wichtige Rolle.
- Auch wenn eine Probe nicht erforderlich ist, sollte man sich zum mindesten durch Stichproben überzeugen, daß beim Umformen keine Rechenfehler unterlaufen sind. Bei der Lösungsmenge einer Ungleichung sollte man auch für "Randwerte" von vorkommenden Intervallen eine Probe machen.

Bei Aufgabe 4a) erhält man als Lösungsgrundbereich $X = (-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$ und nach beidseitigem Quadrieren (unter der Bedingung $x \ge 0$) und weiterem Umformen die vereinfachte Gleichung ($x^2 = 4$ und $0 \le x \le 2\sqrt{2}$), woraus dann $L = \{2\}$ folgt.

Bei Aufgabe 4b) ist es durchaus möglich, auf graphischen Weg die Lösungsmenge L = { 1 } zu ermitteln, weil sich die Graphen von $y = \sqrt{10 - x}$ und $y = \sqrt{x} + 2$ im Gitterpunkt (1; 3) schneiden.

Die Darstellung einer Lösung durch Umformen kann wie folgt aussehen:

Bei *Aufgabe 4c)* gilt $X = \langle \frac{1}{2}, \infty \rangle$. Hier neigen viele Schüler dazu, im ersten Schritt gleich zu quadrieren. Das ist ungeschickt, weil die rechte Seite der Gleichung negativ werden kann und man daher eine überflüssige Fallunterscheidung durchführen müßte.

Man wird daher erst nach beidseitiger Addition von \sqrt{x} quadrieren, was ohne Bedingung erlaubt ist. Man stößt dann auf die Gleichung $2\sqrt{2x^2-x}=2-3x$. Nun ist das Quadrieren nur unter der Bedingung $x \le \frac{2}{3}$ erlaubt und man erkennt, daß für $x > \frac{2}{3}$ keine Lösungen existieren.

Man gelangt schließlich zu der zur Ausgangsgleichung äquivalenten Gleichung

$$x^2 - 8x + 4 = 0$$
 und $\frac{1}{2} \le x \le \frac{2}{3}$

und von hier aus zur Lösungsmenge L = $\{4 - 2\sqrt{3}\}$.

Aufgabe 4d) sollte man "im Kopf" lösen. Hier gilt $X = \{2\}$, und die Probe mit dem einzigen "lösungsverdächtigen" Element zeigt, daß $L = \{2\}$ gilt.

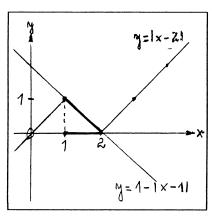
Die Meinung, daß die in den Aufgaben 4a) und 4d) gegebenen Gleichungen äquivalent seien, weil sie die gleiche Lösungemenge besitzen, und daß es daher möglich sein müßte, die Gleichungen durch äquivalentes Umformen ineinander überzuführen, ist falsch. Man mache die Schüler darauf aufmerksam, daß man nur von "Äquivalenz bezüglich des gleichen Erfüllungsgrundbereiches" sprechen kann, was in unserem Fall nicht zutrifft.

Aufgabe 4e) gestattet zu zeigen, wie schädlich es ist, bei Wurzelgleichungen stets routinemäßig mit dem Quadrieren zu beginnen, und daß es durchaus Wurzelgleichungen geben kann, die eine unendliche Lösungsmenge besitzen.

Wenn man bemerkt, daß die beiden Radikanden sich zu $(x-1)^2$ bzw. $(x-2)^2$ umformen lassen, dann kann man erkennen, daß die Gleichung

$$\sqrt{-2x + x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 4 - 4x} = 1$$

äquivalent ist mit der Betragsgleichung |x-1|+|x-2|=1, bei der man am einfachsten auf graphischem Weg die Lösungsmenge $L=\langle 1;2\rangle$ ermittelt.



Bei Aufgabe 4f) gilt X = R, und es ist möglich, durch routinemäßiges Vorgehen ans Ziel zu gelangen.

Nach beidseitigem Quadrieren von $5\sqrt{x^2+5x+28} = x^2+5x+4$ gelangt man durch Umformen, Erraten ganzzahliger Lösungen und Abspalten von Linearfaktoren durch Partialdivision schließlich zur Gleichung

 $x^4 + 10x^3 + 8x^2 - 85x - 684 = (x^2 + 5x + 19)(x - 4)(x + 9) = 0$

wobei der quadratische Term keine Nullstellen besitzt.

Dieser Lösungsweg führt zwar zur gesuchten Lösungsmenge L = { - 9; 4 }, ist jedoch mit einem relativ großen Rechenaufwand verbunden.

Ein 2.Lösungsweg nützt die weitgehende Übereinstimmung des vorkommenden Radikanden mit dem Term auf der rechten Seite der Gleichung aus.

Durch die Substitution $u = \sqrt{x^2 + 5x + 28}$ gelangt man zur Gleichung $5u = u^2 - 24$ mit den leicht zu erratenden ganzzahligen Lösungen u = 8 und u = -3 und von hier dann zu den Gleichungen $x^2 + 5x - 36 = 0$ sowie $x^2 + 5x + 19 = 0$, von denen nur die erstgenannte zwei Lösungen besitzt, und zwar die beiden oben angegebenen.

Da hier nicht durchweg äquivalent umgeformt wurde, ist eine Probe erforderlich.

Bei Aufgabe 4g) gilt zunächst $X = \langle 0; 26 \rangle$, und es lohnt, die Gleichung $\sqrt{26 - x} \le \sqrt{x} - 4$ sofort zu quadrieren, wobei die Bedingung $x \ge 16$ zu beachten ist.

Äquivalentes Umformen führt dann zu $4\sqrt{x} \le x - 5$, nochmaliges Quadrieren und Umformen liefert die Ungleichung $(x - 1)(x - 25) \le 0$ mit der Bedingung $16 \le x \le 26$, was dann die gesuchte Lösungsmenge $L = \langle 25; 26 \rangle$ liefert.

Bei *Aufgabe 4h)* gilt $X=\langle -1;\infty \rangle$. Eine einfache Umformung führt zu (#) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+1} \ge 3$. Routinemäßiges Quadrieren und Umformen liefert die Ungleichung (*) $\sqrt{x^2+5x+4} \ge 2-x$, bei der für $x \le 2$ erneutes Quadrieren erlaubt ist, was nach einigen Umformungen schließlich zur vereinfachten Ungleichung $x \ge 0$ nebst der Bedingung $-1 \le x \le 2$ führt.

Hierbei liegt der Fehler nahe, $L=\langle\ 0;\ 2\ \rangle$ als Lösungsmenge anzugeben. Der Fehler liegt darin, daß man beim Quadrieren von (*) vergessen hat nachzuprüfen, ob sich unter den beim äquivalenten Umformen ausgeschlossenen Elementen x>2 auch Lösungen dieser Ungleichung befinden. Wie man leicht erkennt, gehören alle x>2 zur Lösungsmenge dieser Ungleichung, und die gesuchte Lösungmenge lautet daher $L=\langle\ 0;\ \infty\)$.

Man kommt aber wesentlich schneller ans Ziel, wenn man in der Ungleichung (#) die Wertebereiche der beiden Wurzeln betrachtet. Auf diese Weise erkennt man sofort, daß $x \ge 0$ gelten muß und daß alle diese x auch Lösungen sind.

Diese Aufgabe ist gut geeignet, den Schülern zu zeigen, daß es oft lohnt, vom routinemäßigen Vorgehen abzuweichen und nach einfachen Lösungswegen zu suchen.

Bei Aufgabe 4i) gilt X = $\langle 0; 4,5 \rangle$ und das Quadrieren von $\sqrt{10-x} + \sqrt{x} \le \sqrt{2x+1} + \sqrt{9-2x}$ nebst weiterem Umformen führt zu $\sqrt{10x-x^2} \le \sqrt{-4x^2+16x+9}$.

Nochmaliges Quadrieren und Umformen führt zu x^2 - 2x - $3 \le 0$ und schließlich zu - $1 \le x \le 3$ mit der Bedingung $0 \le x \le 4.5$.

Dies liefert dann die gesuchte Lösungemenge $L = \langle 0; 3 \rangle$.

Bei Aufgabe 4k) kann man nachprüfen, ob sich die Schüler daran gewöhnt haben, nicht sofort umzuformen, sondern zunächst zu versuchen, die Lösungmenge durch inhaltliches Schließen zu ermitteln.

Offensichtlich gilt stets $x^2 + 2 < 2x^2 + 5$, also hat $\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{2x^2 + 5} < 0$ und damit erst recht die gegebene Ungleichung die Lösungsmenge L = R.

Bei Aufgabe 4l) wollen wir zeigen, wie man die Lösung einer solchen Bruchgleichung übersichtlich festhalten kann, wobei die Begründungen zu den einzelnen Umformungen (die verwendeten Umformungsregeln nebst Bedingungen) vom Schüler nur mündlich verlangt werden.

Bei Aufgabe 4m) gilt $X = \langle -\frac{1}{2}\sqrt{2}; \frac{1}{2}\sqrt{2} \rangle \setminus \{0\}$. Durch Betrachten der Wertebereiche der vorkommenden Terme erkennt man, daß auch x > 0 gelten muß. Man kann daher wie folgt vorgehen:

Da die ersten beiden Faktoren auf der linken Seite der Ungleichung für die zugelassenen Werte von x positiv sind, gilt diese Ungleichung genau dann, wenn

Hieraus erhält man die gesuchte Lösungsmenge $L = \langle \frac{1}{2}\sqrt{2}; 1 \rangle$.

Man überzeuge sich, daß nur äquivalent umgeformt wurde, und daß daher eine Probe nicht erforderlich ist. Dennoch sollte man sich durch Stichproben, etwa für $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, x = 1, x = 2, überzeugen, daß (wahrscheinlich) keine Rechenfehler begangen wurden.

Die Aufgabe 40) besitzt einen relativ hohen Schwierigkeitsgrad. Hier liegt der recht seltene Fall vor, daß eine nicht allgemeingültige Gleichung eine unendliche Lösungsmenge besitzt. Ein

derartiger Fall war bereits in Aufgabe 4e) aufgetreten, wo sich die gegebene Wurzelgleichung als äquivalent mit einer Betragsgleichung erwies.

Besonders bei schwierigen Aufgaben ist es weder für den Schüler noch für den AG.-Leiter hilfreich, wenn man ihm nur eine elegante Musterlösung mitteilt (wie dies in der Regel bei den Musterlösungen zu Aufgaben der Mathematikolympiaden üblich ist). Wesentlich nützlicher ist eine methodisch aufbereitete Lösung, die auf naheliegende Sackgassen hinweist und die zu zeigen versucht, wie man die Lösungsidee finden kann.

In den Vorbemerkungen zur Aufgabe 4) haben wir einige heuristische Regeln festgehalten, die helfen können, die geistigen Handlungen eines Schülers bei der Suche noch einem Lösungsweg zu steuern. Wir wollen nun untersuchen, wie dies bei unserer Aufgabe aussehen könnte.

Beim *Ermitteln des Erfüllungsgrundbereichs X* stößt man zunächst auf die Bedingung $x \ge 1$ und muß dann noch untersuchen, für welche x die Ungleichung $x + 3 - 4\sqrt{x - 1} \ge 0$ erfüllt ist. Dies ist genau für $x^2 + 6x + 9 \ge 16x - 16$, also für $x^2 - 10x + 25 \ge 0$ und somit für $(x - 5)^2 \ge 0$ der Fall. Analog erkennt man, daß für $x \ge 1$ die Ungleichung $x + 8 - 6\sqrt{x - 1} \ge 0$ mit der allgemeingültigen Ungleichung $(x - 10)^2 \ge 0$ äquivalent ist. Also gilt $X = \langle 1, \infty \rangle$, und man hat zusätzlich erkannt, daß die Zahlen 5 und 10 eine wichtige Rolle spielen könnten.

Sehr erfahrene und findige Schüler könnten beim Betrachten der vorkommenden Terme u.U. entdecken, daß $(2-\sqrt{x-1})^2=x+3-4\sqrt{x-1}$ sowie $(3-\sqrt{x-1})^2=x+8-6\sqrt{x-1}$ gilt und daß unsere Wurzelgleichung daher mit der folgenden Betragsgleichung äquivalent ist:

$$|2 - \sqrt{x-1}| + |3 - \sqrt{x-1}| = 1$$
.

Bei der Überlegung, ob u.U. die *graphische Methode* helfen könnte, kann man auf die Idee kommen, die Funktionen $f(x) = \sqrt{x+3} - 4\sqrt{x-1}$ (= | 2 - $\sqrt{x-1}$ |) und $g(x) = 1 - \sqrt{x+8} - 6\sqrt{x-1}$ (= 1 - | 3 - $\sqrt{x-1}$ |) zu betrachten und deren Funktionswerte für günstig gewählte Argumente zu berechnen. Dies kann zu folgendem Resultat führen:

Х	1	2	5	10	17	26	37	 6	7
f(x)	2	1	0	1	2	3	4	 0,236	0,449
g(x)	-2	-1	0	1	0	-1	-2	 0,236	0,449

Hieraus erkennt man, daß x = 5 und x = 10 Lösungen sind und daß für x < 5 und x > 10 keine Lösungen vorkommen können (was sich mit dem Monotonieverhalten der Funktionen leicht nachweisen läßt).

Dies kann zur Idee führen, für einige Werte zwischen 5 und 10 mit dem ETR die zugehörigen Funktionswerte zu berechnen und so zur Vermutung zu kommen, daß die gesuchte Lösungsmenge $L = \langle 5; 10 \rangle$ lautet.

Es ist immer nützlich, wenn man die Lösung einer Bestimmungsaufgabe erraten kann, weil das Lösen der dann noch verbleibenden Beweisaufgabe in der Regel einfacher ist.

Beim *äquivalenten Umformen zum Zweck des Vereinfachens* wird man zunächst feststellen, daß sofortiges Quadrieren nicht lohnt, weil es zu komplizierten Rechnungen führt. Es scheint günstiger zu sein, zunächst eine der Wurzeln auf die andere Seite zu bringen und dabei den Nachteil in Kauf zu nehmen, daß nunmehr das Quadrieren nicht mehr bedingungslos möglich ist. Offensichtlich muß dann $1 - \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} \ge 0$ gelten, was nur für $5 \le x \le 17$ der Fall ist

Beim weiteren äquivalenten Umformen muß man dann nochmals quadrieren, was nur unter der Bedingung $x \le 10$ erlaubt ist und was schließlich zu einer allgemeingültigen Gleichung führt.

Folglich spielen allein die gefundenen Bedingungen $x \ge 1$, $5 \le x \le 17$ und $x \le 10$ eine Rolle, was zu der bereits oben vermuteten Lösungsmenge führt.

Wir haben bei unserem Vorgehen die heuristische Regel befolgt, dem äquivalenten Umformen vor dem nur implizierenden Umformen den Vorzug einzuräumen, weil man dann auf eine Probe verzichten kann. Dies ist vor allem beim Lösen von Ungleichungen sowie von Gleichungen mit unendlichen Lösungsmengen wichtig, weil hier ja eine Probe durch Einsetzen nicht möglich ist. Implizierendes Umformen liefert nur den Einzigkeitsnachweis, und um den Existenznachweis zu liefern, muß noch nachgewiesen werden: "Wenn ein Element zur Lösungsmenge gehört, dann erfüllt es auch die zu lösende GI/Ugl."

Auch wenn das "routinemäßige" Vorgehen zum Ziel führt (vgl. den 1.Lösungsweg), sollte man zusätzlich nach einfacheren und eleganteren Lösungswegen suchen. Der 2.Lösungsweg dürfte dieses Prädikat verdienen. Ob dies auch noch für den 3.Lösungsweg zutrifft, ist fraglich. Hier findet man zwar beim Einzigkeitsnachweis eine sehr nette Idee, ist jedoch durch den Verzicht auf ausschließlich äquivalente Umformungen gezwungen, einen doch recht lästigen Existenznachweis zu führen.

Der "3.Lösungsweg" ist die veröffentlichte Musterlosung zu der folgenden Olympiadeaufgabe 181043B : "Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die erstens die in dem Ausdruck $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$ auftretenden Wurzeln und damit dieser Ausdruck insgesamt (als reelle Zahl) existiert und zweitens diese Zahl gleich 1 ist ."

1.Lösungsweg: (Begründungen mündlich; Nebenrechnungen siehe oben)

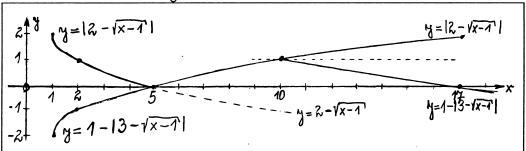
2.Lösungsweg:

Wie oben gezeigt, ist unsere Wurzelgleichung äquivalent mit der Betragsgleichung

$$|2-\sqrt{x-1}| = 1-|3-\sqrt{x-1}|$$
.

Diese Gleichung läßt sich (durch Fallunterscheidung) auf rechnerischem Weg lösen, was jedoch recht aufwendig ist.

Durch Transformation des Funktionsgraphen von $y = \sqrt{x}$ läßt sich zeigen, daß die Graphen der Funktionen $f(x) = |2 - \sqrt{x-1}|$ und $g(x) = 1 - |3 - \sqrt{x-1}|$ genau im Bereich $5 \le x \le 10$ übereinstimmen und sonst keine gemeinsamen Punkte besitzen.



3. Lösungsweg (Zitat einer "Musterlösung"):

Genau dann existiert jede in dem angegebenen Ausdruck auftretende Wurzel, wenn die Beziehungen

$$x \ge 1 \quad , \tag{1}$$

$$x + 3 \ge 4\sqrt{x - 1} \quad , \tag{2}$$

$$x + 8 \ge 6\sqrt{x - 1} \tag{3}$$

gelten.

(I) Angenommen, für eine reelle Zahl x sei dies der Fall, und für sie gelte auch

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1 \quad (4)$$

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = 1 - \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$$

$$x+3-4\sqrt{x-1} = 1 - 2\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} + x+8 - 6\sqrt{x-1}$$

$$\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 3 - \sqrt{x-1}$$
(5)

also

Dann folat

 $\sqrt{x-1} \leq 3 . (6)$

Aus (4) und (5) folgt weiter

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} - 2 , \qquad (7)$$

also

 $\sqrt{x-1} \geq 2 \tag{8}$

Aus (6) und (8) ergibt sich

$$4 \le x - 1 \le 9$$
, (9)

also

 $5 \leq x \leq 10 . \tag{10}$

Daher können nur diejenigen reellen Zahlen x, für die (10) gilt, die geforderten Eigenschaften haben.

(II) Umgekehrt gilt: Wenn eine reelle Zahl die Bedingung (10) erfüllt, so gilt für sie (1) sowie (9), also (6) und (8); ferner gilt $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2 \ge 0$, also $x^2 + 6x + 9 \ge 16x - 16$, d.h. $(x + 3)^2 \ge 16(x - 1)$, und daraus ergibt sich (da aus (10) auch x + 8 > 0 folgt) die Ungleichung (2).

Weiterhin gilt $x^2-20x+100 = (x-10)^2 \ge 0$, also $x^2+16x+64 \ge 36x-36$, d.h. $(x+8)^2 \ge 36(x-1)$, und daraus ergibt sich (da aus (10) auch x+8>0 folgt) die Ungleichung (3).

Ferner gilt $(\sqrt{x-1}-2)^2 = x-1-4\sqrt{x-1}+4=x+3-4\sqrt{x-1}$; hieraus und aus (6) folgt (5). Aus (5) und (7) aber ergibt sich, daß x auch (4) erfüllt.

Somit haben genau diejenigen reellen Zahlen x, für die (10) gilt, die geforderten Eigenschaften

Im Zusammenhang mit dem in *Aufgabe 5)* geforderten Erarbeiten des Abschnitts "Funktionen und ihre Graphen" sollte man eine Wiederholung des einschlägigen Stoffs aus Unterricht und AG verbinden.

Eine Funktion f ist (als eindeutige Abbildung) eine Menge geordneter Paare; eine Funktionsgleichung y = f(x), $x \in X$ ist eine Aussageform, die eine Funktion darstellt. Dabei ist f die Erfüllungsmenge von y = f(x), $x \in X$.

Durch eine *Gleichung* F(x,y) = 0, $x \in X$, $y \in Y$ wird eine (nicht notwendig eindeutige) *Abbildung* von der Menge X auf die Menge Y festgehalten. Als Beispiel wähle man die Gleichung $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, die als *Graph* den Kreis um 0 mit dem Radius 1 besitzt. Man lasse begründen, warum dies nicht der Graph einer Funktion ist.

Nach einem Überblick über die Einteilung der Funktionen wird man sich vor allem den ganzen rationalen Funktionen zuwenden und den verallgemeinerten Vietaschen Wurzelsatz wiederholen. Bei der Betrachtung der Graphen solcher Funktionen sollen die Schüler Feststellungen über mögliche Anzahlen von Lösungen der zugehörigen Gleichungen treffen. In diesem Zu-

sammenhang sollte man auf die Aufgaben 18) bis 22) auf S.10/11 der Aufgabensammlung /10/ für die AG Klasse 9 zurückgreifen.

Bei Aufgabe 6) wird zunächst festgestellt, daß f(0) = 0 genau dann, wenn d = 10, daß f(1) = 12 genau dann, wenn a+b+c+10 = 12, also a+b+c = 2, daß f(2) = 4 genau dann, wenn 8a+4b+2c = -6 und daß f(3) = 1 genau dann, wenn 27a+9b+3c = -9.

Auf diese Weise gelangt man zu einem linearen Gleichungssystem vom Typ (3;3), das man mit Hilfe des *Gaußschen Algorithmus* lösen kann (vgl. Aufgabensammlung /10/ für AG Klasse 9, S.23/24).

So erhalt man $f(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{25}{2}x^2 + 12x + 10$ und erkennt, daß die Koeffizienten a, b, c, d und damit die ganze rationale Funktion dritten Grades durch die gegebenen vier Funktionswerte eindeutig bestimmt sind.

Bei Aufgabe 7) führt kombiniertes VA/RA relativ problemlos zum Ziel. Durch Einsetzen und Umformen erhält man

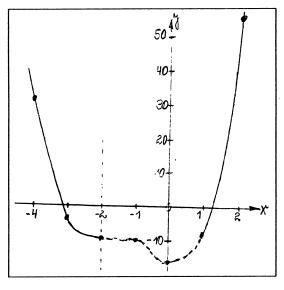
$$(f(2))^2 = (a^2 + b^2 + (a+b)^2)^2 = (2a^2 + 2ab + 2b^2)^2 = 4(a^4 + a^2b^2 + b^4 + 2a^3b + 2a^2b^2 + 2ab^3) =$$

= 2($a^4 + b^4 + a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$) = 2($a^4 + b^4 + (a+b)^4$) = 2.f(4).

Von wesentlich höherem Schwierigkeitsgrad ist Aufgabe 8). Da die gegebene Gleichung 4. Grades nachweislich keine ganzzahligen Lösungen besitzt, liegt es nahe, sich zunächst auf graphischem Weg einen Überblick über den Funktionsverlauf und die Lage der beiden Nullstellen zu verschaffen.

Wir betrachten daher die durch

 $f(x)=x^4+5x^3+6x^2-4x-16$ definierte Funktion f und berechnen f(-4)=32, f(-3)=-4, f(-2)=-8, f(-1)=-10, f(0)=-16, f(1)=-8 und f(2)=56. Dem zugehörigen Graphen ist zu entnehmen, daß die beiden reellen Lösungen der Gleichung zwischen -4 und -3 bzw. zwischen 1 und 2 liegen. Ferner kann man vermuten, daß f im Intervall $(-\infty; -2)$ streng monoton fällt und im Intervall $(1; \infty)$ streng monoton steigt, woraus folgen würde, daß f in diesen Intervallen keine weiteren



als die beiden genannten Nullstellen haben kann. Ferner kann man vermuten, daß im Intervall (-2; 1) stets f(x) < 0 gilt, womit dann der geforderte Beweis geführt wäre.

Der Nachweis dieser Vermutungen erfordert von Schüler einiges Geschick.

Wegen $f(x) = (x+2)^4 - 3(x+2)^3 - 8$ ist f im Intervall (- ∞ ; -2) streng monoton fallend.

Wegen $f(x) = (x-1)^4 + 9x^3 - 17$ ist f im Intervall $(1, \infty)$ streng monoton steigend.

Ferner ist $f(x) = (x+1)^4 + x^3 - 8x - 17$. Für -2 < x < 0, also -1 < x+1 < 1 gilt daher $(x+1)^4 < 1$, $x^3 < 0$, -8x < 16 und somit f(x) < 0.

Für $0 \le x < 1$ schließlich gilt $x^4 < 1$, $5x^3 < 5$, $6x^2 < 6$, $-4x \le 0$ und somit ebenfalls f(x) < 0. Damit ist der geforderte Beweis erbracht.

Bei Aufgabe 9) vermutet man leicht, daß stets $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 > 0$ gilt und die zugehörige Funktion f daher keine reelle Nullstelle besitzt.

Der Nachweis fällt besonders leicht, wenn man die Fälle x > -1 und $x \le -1$ unterscheidet.

Für x > -1 wird x+1 > 0, wegen $x^2 \ge 0$ daher $x^2(x+1) = x^3 + x^2 \ge 0$ und wegen $x^4 \ge 0$ dann schließlich $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 > 0$.

Für $x \le -1$ wird $x + 1 \le 0$ und x < 0 und $x^2 > 0$, also $x(x+1) = x^2 + x \ge 0$ und damit auch $x^2(x^2+x) = x^4 + x^3 \ge 0$, woraus dann $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 > 0$ folgt.

Aufgabe 10) erweist sich als leichte Aufgabe, wenn vorher die Aufgabe 9) als Hilfsaufgabe gelöst wurde, weil dann offensichtlich ist, daß für $|a| \ge 1$ stets f(x) > 0 gilt und die Funktion f daher allenfalls für die ganze Zahl a = 0 eine reelle Nullstelle besitzen kann.

Wegen $f(x) = x^4 + x^3 + x + 1 = x^3(x+1) + x+1 = (x^3+1)(x+1)$ gilt f(-1) = 0, womit gezeigt ist, daß die Funktion f für a = 0 tatsächlich eine Nullstelle besitzt.

In den Aufgaben 11), 12) und 13) treten *Funktionalgleichungen* auf, die den Schülern aus dem Unterricht kaum vertraut sind.

Aufgabe 11) läßt sich durch Einsetzen geeigneter Werte für x in die Gleichung

$$x \cdot f(x+2) = (x^2-9) \cdot f(x)$$

lösen. Dabei schadet es gar nichts, wenn die Schüler beim Probieren zunächst auch "ungeeignete" Werte betrachten.

Für x = 0 gilt $0 \cdot f(2) = -9 \cdot f(0)$, also f(0) = 0. Für x = 3 gilt $3 \cdot f(5) = 0 \cdot f(3)$, also f(5) = 0.

Für x = -3 gilt $-3 \cdot f(-1) = 0 \cdot f(-3)$, also f(-1) = 0.

Damit ist gezeigt, daß die Funktion f mindestens die drei Nullstellen 0,5 und -1 besitzt.

Auch bei Aufgabe 12) führt geschicktes Einsetzen zum Ziel.

Aus (1) und (3) folgt f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2,

f(3) = f(2+1) = f(2) + f(1) = 2 + 1 = 3f(5) = f(3+2) = f(3) + f(2) = 3 + 2 = 5

f(7) = f(5+2) = f(5) + f(2) = 5 + 2 = 7

Wegen (2) folgt hieraus $f(\frac{1}{7}) = \frac{1}{7^2} \cdot f(7) = \frac{1}{7^2} \cdot 7 = \frac{1}{7}$.

Hieraus und aus (3) folgt dann $f(\frac{2}{7}) = f(\frac{1}{7} + \frac{1}{7}) = f(\frac{1}{7}) + f(\frac{1}{7}) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$

 $f(\frac{3}{7}) = f(\frac{2}{7} + \frac{1}{7}) = f(\frac{2}{7}) + f(\frac{1}{7}) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$

 $f(\frac{5}{7}) = f(\frac{3}{7} + \frac{2}{7}) = f(\frac{3}{7}) + f(\frac{2}{7}) = \frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$

Damit ist gezeigt: Wenn eine Funktion f die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, dann gilt $f(\frac{5}{7}) = \frac{5}{7}$.

Analog gelöst wird die schwierigere Aufgabe 13):

Wegen (2) und (3) gilt $2 \cdot f(0) = f(1) \cdot f(0) = f(1+0) = f(1) = 2$ und daher (4) f(0) = 1

Wegen (2), (3) und (4) gilt: $2 \cdot f(-1) = f(1) \cdot f(-1) = f(1 + (-1)) = f(0) = 1$, also (5) $f(-1) = \frac{1}{2}$.

Durch wiederholte Anwendung von (3) und aus (2) erhält man:

$$(f(\frac{1}{7}))^7 = f(\frac{1}{7}) \cdot f(\frac{1}{7}) \cdot \dots \cdot f(\frac{1}{7}) = f(\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{7}) = f(1) = 2$$
, also (6) $f(\frac{1}{7}) = \sqrt[7]{2}$.

Durch wiederholte Anwendung von (3) und aus (6) erhält man

$$f(\frac{3}{7}) = f(\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}) = f(\frac{1}{7}) \cdot f(\frac{1}{7}) \cdot f(\frac{1}{7}) = (f(\sqrt[7]{2}))^3 = \sqrt[7]{2}^3 = \sqrt[7]{8} , \text{ also}$$
 (7)
$$f(\frac{3}{7}) = \sqrt[7]{8} .$$

Um bei *Aufgabe 14*) nachzuweisen, daß jede rationale Nullstelle x der Funktion f sogar eine ganzzahlige Nullstelle ist, liegt es nahe, $x = \frac{p}{q}$ mit teilerfremden ganzen Zahlen p, q und $q \neq 0$ zu setzen und dies in die Funktionsgleichung einzusetzen. Dann müßte sich zeigen lassen, daß nur q = 1 oder q = -1 gelten kann.

Aus $\frac{p^4}{q^4}$ + $a_3\frac{p^3}{q^3}$ + $a_2\frac{p^2}{q^2}$ + $a_1\frac{p}{q}$ + a_0 = 0 folgt p^4 = -q(a_3p^3 + a_2p^2q + a_1pq^2 + a_0q^3). Daher ist q ein Teiler von p^4 . Da aber q zu p und damit auch zu p^4 teilerfremd ist, kann q nur +1 oder -1 sein.

Aufgabe 15a): Seien $x_1, x_2, ..., x_n$ die n reellen Nullstellen der zu betrachtenden ganzen rationalen Funktion n-ten Grades. Dann gilt $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n) = 0$. Durch Ausmul-

tiplizieren und Zusammenfassen erhält man dann $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$, wobei die a_i die im Vietaschen Wurzelsatz angegebenen Werte besitzen. Sind alle x_i ganze Zahlen, dann trifft dies trivialerweise auch für alle a_i zu .

Aufgabe 15b): Ganz analog wie bei Aufgabe 14) kann man zeigen, daß für $a_n = 1$ und ganzzahlige a_i keine Nullstelle rational sein kann, ohne ganzzahlig zu sein. Hieraus folgt unmittelbar die Behauptung.

Die Aufgabe 16) besitzt einen hohen Schwierigkeitsgrad. Es empfiehlt sich, die Schüler nicht sofort mit selbständiger Arbeit beginnen zu lassen, sondern die Bearbeitung in mehreren Etappen durchzuführen, an deren Ende jeweils über die erreichten Resultate diskutiert und das Ziel für die nächste Etappe formuliert wird. Auf diese Weise kann man die Schüler vor Sackgassen warnen und auch den leistungsschwächeren Schülern die Chance geben, auf Teilstrecken selbständig zu arbeiten. Natürlich hätte es wenig Sinn, die Lösung durch einen sehr leistungsstarken Schüler oder durch den AG-Leiter vortragen zu lassen.

In der 1. Etappe sollen die Schüler zunächst nur nach einem "groben Lösungsplan" suchen, den sie dann zur Diskussion stellen.

Es liegt nahe, sich zunächst mit der wahrscheinlich leichteren Aufgabe 16b) zu beschäftigen. Dabei kann eine gewisse Analogie zu Aufgabe 6) auffallen, wo die Koeffizienten eines Polynoms 3.Grades zu ermitteln waren, für das die Funktionswerte an vier verschiedenen Stellen gegeben waren. Dies führte zu einem linearen Gleichungssystem, das leicht lösbar war.

Diese Lösungsidee führt hier nicht ans Ziel. Man erhält hier ein Gleichungssystem vom Typ (4;4) mit Parametern der Gestalt x_i^k als Koeffizienten und landet in einer Sackgasse. Dieser Lösungsversuch führt jedoch zur Vermutung, daß das gesuchte Polynom (wenn es überhaupt existiert) vom 3. Grad sein dürfte.

Die Aufgabe wäre etwas einfacher, wenn man wüßte, ob derartige Polynome existieren. Wenn man von einer "sinnvollen" Aufgabenstellung ausgeht, wäre zu vermuten, daß in einem der beiden Fälle ein derartiges Polynom existiert, im anderen nicht, und daß es erfolgversprechend ist, bei 16b) nach einem derartigen Polynom 3.Grades zu suchen und dabei zu überlegen, warum es bei 16a) ein derartiges Polynom 4.Grades nicht geben kann.

Von sehr leistungsstarken Schülern könnte auch der Vorschlag kommen, das Problem gleich ganz allgemein anzugehen, indem man von m paarweise verschiedenen ganzen Zahlen ausgeht und untersucht, für welche m das Problem lösbar ist. G.POLYA weist auf das "Paradoxon des Erfinders" hin: Der umfassendere Lehrsatz kann leichter zu beweisen, die allgemeinere Aufgabe leichter zu lösen sein (vgl. /18/, S.170). In unserem Fall trifft dies jedoch nicht zu.

Wenn kein Schüler auf die hier entscheidende Lösungsidee kommt, dann muß sie der AG-Leiter formulieren: Man transformiere die Aufgabenstellung , so daß eine leichter lösbare Aufgabe entsteht.

Die vorangegangenen Aufgaben haben gezeigt, daß bei ganzen rationalen Funktionen die Kenntnis der Nullstellen sehr nützlich ist, weil man dann viele Folgerungen ziehen kann. Läßt sich dies hier ausnützen?

In der 2. Etappe wird die Ausgangsaufgabe zunächst in übersichtlicher Form an der Wandtafel festgehalten. Wir suchen nach einem Polynom, das folgende Bedingungen erfüllt:

- (1) $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, $a_i \in Z$;
- (2) $p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = 1$;
- (3) $p(x_0) = 30$;
- (4) x_0 , x_1 , x_2 , x_3 sind paarweise verschiedene ganze Zahlen.

Die Schüler erhalten den Auftrag, nach einer leichter lösbaren transformierten Aufgabe zu suchen.

Am Ende der 2. Etappe werden entsprechende Schülervorschläge diskutiert. Da es leichter ist, ein Polynom zu ermitteln, über dessen Nullstellen wir etwas wissen, kann man auf die Idee kommen, nach einem derartigen Polynom f(x) zu suchen, mit dessen Hilfe man das gesuchte Polynom ermitteln könnte. Dieses Polynom müßte außer (4) noch folgende Bedingungen erfüllen:

- (5) f(x) = p(x) 1;
- (6) $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$;
- (7) $f(x_0) = 29$.

Dies wird an der Wandtafel festgehalten. Ein Schüler begründet, warum unsere Aufgabe gelöst wäre, wenn man ein derartiges Polynom ermittelt hätte. Die Schüler werden aufgefordert, nach einem derartigen Polynom f(x) zu suchen.

In Auswertung der 3. Etappe wird festgehalten und begründet:

(6)
$$\Rightarrow$$
 (8) $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$;

(7),(8)
$$\Rightarrow$$
 (9) $f(x_0) = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) = 29$; die drei Faktoren sind ganzzahlig und paarweise verschieden .

Aus (9) folgt, daß als Faktoren nur die Teiler 1, -1, 29 und -29 der Zahl 29 in Frage kommen. Durch Probieren erkennt man leicht, daß im wesentlichen (d.h. bis auf die Reihenfolge der Faktoren) nur folgendes gelten kann:

(10)
$$x_0 - x_1 = 1$$
, $x_0 - x_2 = -1$, $x_0 - x_3 = -29$.

Nun liegt die Idee nahe, für x_0 eine Zahl zu wählen, die die Bedingung (4) erfüllt, die zugehörigen x_1 , x_2 . x_3 zu berechnen und hieraus dann f(x) und schließlich p(x) zu ermitteln.

Am naheliegendsten wählt man $x_0 = 0$, was zu $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 29$ und somit zu

$$f(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 29) = x^3 - 29x^2 - x + 29$$

sowie zu $p(x) = x^3 - 29x^2 - x + 30$

führt. Wie man sich leicht überzeugt, erfüllt dieses Polynom p(x) tatsächlich alle gestellten Bedingungen.

Man kann für x_0 aber auch jede andere von 1, -1 und 29 verschiedene ganze Zahl wählen. Für x_0 = 2 erhält man $p(x) = x^3 - 35x^2 + 127x - 92$, das auch die gestellten Bedingungen erfüllt.

In einer 4. Etappe wendet man sich nun der Aufgabe 16b) zu. Durch analoges Vorgehen gelangt man zu

(9*)
$$f(x_0) = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x_0 - x_4) = 29$$
; die vier Faktoren sind ganzzahlig und paarweise verschieden.

Es ist leicht einzusehen, daß ein analoger Übergang zu (10*) hier nicht möglich ist, weil hier nur die vier Faktoren 1, -1, 29, -29 in Frage kommen, die jedoch die gestellten Bedingungen nicht erfüllen. Damit ist nachgewiesen, daß ein derartiges Polynom p(x) nicht existieren kann, und die Aufgabe 16b) ist ebenfalls gelöst.

Natürlich ist es jetzt möglich, auch die verallgemeinerte Aufgabe zu lösen, auf die oben hingewiesen wurde.

Unsere Aufgabe entspricht der Olympiadeaufgabe 201224, in deren Musterlösung gleich der verallgemeinerte Fall behandelt wird, daß m paarweise verschiedene ganze Zahlen $x_1, x_2, ..., x_m$ sowie eine weitere ganze Zahl x_0 gesucht werden, die die entsprechenden Bedingungen (2^*) , (3^*) erfüllen. Für f(x) = p(x) - 1 wird dann gefolgert, daß

(8*)
$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_m) \cdot g(x)$$

gilt, wobei g(x) ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Wegen $p(x_0) = 30$ und $f(x_0) = p(x_0) - 1 = 29$ folgt hieraus dann

$$(9^*)$$
 $(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdot ... \cdot (x_0 - x_m) \cdot g(x_0) = 29.$

Da die Faktoren ganzzahlig sind und 29 eine Primzahl ist, können nur die Faktoren 1, -1, 29, -29 auftreten.

Ferner sind mit Ausnahme von $g(x_0)$ die restlichen Faktoren paarweise verschieden, und es kann nur einer dieser Faktoren den Betrag 29 haben, weil sonst die linke Seite von (10*) durch 29^2 teilbar wäre.

Daher können insgesamt höchstens drei solche Faktoren auftreten.

Offensichtlich ist es wenig sinnvoll, derartige Musterlösungen vortragen zu lassen, vielmehr bedarf es noch einer methodischen Aufbereitung, bevor man eine derartige Aufgabe mit Gewinn in einer AG behandeln kann.

In den Aufgaben 17) und 18) sind *nichtlineare algebraische Gleichungssysteme* zu lösen. Es sollte den Schülern bewußtgemacht werden, daß hier ein Vereinfachen durch ausschließlich äquivalentes Umformen in der Regel nicht möglich ist und daß daher stets neben dem Einzigkeitsnachweis (der begründeten Herleitung) ein gesonderter Existenznachweis erforderlich ist, der bei endlichen Lösungsmengen durch Einsetzen in Form einer Probe erbracht werden kann. Ist die Lösungsmenge (etwa bei Ungleichungssystemen) dagegen unendlich, dann kommt man um einen Existenznachweis in Form eines "Rückschlusses" (wie er im 3.Lösungsweg zu Aufgabe 40) vorgeführt wird) nicht herum. Wir wollen derartige Aufgaben hier nicht behandeln.

Da es kein Verfahren gibt, das bei solchen Aufgaben mit Sicherheit zum Ziel führt, sollte man mit den Schülern einen Überblick über Verfahren erarbeiten, die erfahrungsgemäß erfolgversprechend sind.

Man wird stets versuchen, das Gleichungssystem zu vereinfachen, indem man die Anzahl der Variablen reduziert oder den Grad der vorkommenden Terme erniedrigt.

Bei einfachen Aufgaben vom Typ (2;2) führt das Auflösen einer Gleichung nach einer Variablen nebst Einsetzen in die andere Gleichung zum Ziel.

In komplizierteren Fällen kann man dieses "Einsetzungsverfahren" in verallgemeinerter Form verwenden, indem man nicht nach einer Variablen sondern nach einem geschickt gewählten Term auflöst und dann einsetzt. Auf diese Weise lassen sich manchmal quadratische Ausdrücke eliminieren.

Neben dem "Einsetzungsverfahren" spielt vor allem auch das "Additionsverfahren" eine Rolle, bei dem ein Vielfaches einer Gleichung zu einem Vielfachen einer anderen Gleichung seitenweise addiert wird.

Zum Reduzieren des Grades solcher Gleichungen wird oft das "Substitutionsverfahren" verwendet. Auf diese Weise lassen sich etwa biquadratische Gleichungen routinemäßig lösen.

Bei komplizierteren Aufgaben spielen *geschickte Termumformungen* oft die entscheidende Rolle.

Bei Aufgabe 17a) kann man die Gleichung (2) nach y auflösen (wobei x = 0 auszuschließen ist) und dann in (1) einsetzen, was nach Umformung zu $2x^4 - 9x^2 + 4 = 0$ führt.

Mit
$$z = x^2$$
 gelangt man zu $2z^2 - 9z + 4 = 2(z - \frac{1}{2})(z - 4) = 0$, also zu $x^2 = \frac{1}{2}$ oder $x^2 = 4$.

Das Lösen dieser Gleichungen sowie das Berechnen der zugehörigen y führt dann zur gesuchten Lösungsmenge, wobei eine Probe nicht vergessen werden darf. Auf diese Weise erhält man die gesuchte Lösungsmenge $L = \{(2; -1), (-2; 1), (\frac{1}{2}\sqrt{2}; \frac{3}{2}\sqrt{2}), (-\frac{1}{2}\sqrt{2}; -\frac{3}{2}\sqrt{2})\}$.

Bei Aufgabe 17b) führt ebenfalls das Einsetzungverfahren zum Ziel. Wenn man (1) nach y auflöst und in (2) einsetzt, dann erhält man die Gleichung

$$x^4 - 4x^2 + x + 2 = (x - 1)(x + 2)(x^2 - x - 1) = 0$$

deren ganzzahlige Lösungen man erraten kann.

Die Nullstellen des quadratischen Terms lassen sich leicht berechnen. Durch Ermittlung der zugehörigen y gelangt man so zur Lösungsmenge

L = { (1; 1), (-2; 2), (
$$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$$
; $\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$), ($\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$; $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$) }.

Bei einem 2. Lösungsweg wird das Additionsverfahren verwendet. Durch seitenweise Subtraktion von (1) und (2) gelangt man zu $x^2 - y^2 - (x - y) = 0$, also zu

(x+y)(x-y) - (x-y) = (x-y)(x+y-1) = 0, woraus y = x oder y = 1 - x folgt.

Setzt man dies in Gleichung (1) ein, dann erhält man die quadratischen Gleichungen

 $x^2 + x - 2 = 0$ und $x^2 - x - 1 = 0$, aus deren Lösungen man dann die angegebene Lösungsmenge erhält.

Abschließend lasse man die Gleichungssysteme aus den Aufgaben 17a) und 17b) sowie deren Lösungsmengen miteinander vergleichen und folgendes feststellen:

Das Gleichungssystem aus 17b) ist symmetrtisch in den Variablen x, y, woraus folgt: Wenn (x;y) zur Lösungsmenge gehört, dann gehört auch (y;x) zur Lösungsmenge.

Für das Gleichungssystem in 17a) trifft dies nicht zu.

Die Schüler werden angehalten, stets gleich zu Beginn nachzuprüfen, ob das zu lösende Gleichungssystem eine derartige Symmetrieeigenschaft besitzt oder nicht.

Etwas komplizierter ist die *Aufgabe 17c)*, deren Gleichungssystem in x, y symmetrisch ist. Um den Term (x^2+y^2) zu eliminieren, löst man Gleichung (2) nach diesem Term auf und setzt in Gleichung (1) ein.

Wegen $x^2+y^2=36-2xy$ führt dies zu $x^2y^2+36-2xy-6=9xy$, mit z=xy also zur Gleichung $z^2-11z+30=0$, deren ganzzahlige Lösungen 5 und 6 man erraten kann.

Dies führt zu (3a) xy = 5 oder (3b) xy = 6

Aus (2) folgt $x + y = \pm 6$ und damit (4a) y = 6 - x oder (4b) y = -6 - x.

Setzt man (4a) in (3a) ein, so folgt $x^2 - 6x + 5 = 0$, also x = 1 oder x = 5.

Setzt man (4b) in (3a) ein, so folgt $x^2 + 6x + 5 = 0$, also x = -1 oder x = -5.

Setzt man (4a) in (3b) ein, so folgt $x^2 - 6x + 6 = 0$, also $x = 3 + \sqrt{3}$ oder $x = 3 - \sqrt{3}$.

Setzt man (4b) in (3b) ein, so folgt $x^2 + 6x + 6 = 0$, also $x = -3 + \sqrt{3}$ oder $x = -3 - \sqrt{3}$.

Berechnet man hierzu die zugehörigen y, dann erhält man die gesuchte Lösungsmenge

L = { (1; 5), (5; 1). (-1; -5), (-5; -1), (3+ $\sqrt{3}$; 3- $\sqrt{3}$), (3- $\sqrt{3}$; 3+ $\sqrt{3}$), (-3+ $\sqrt{3}$; -3- $\sqrt{3}$), (-3- $\sqrt{3}$; -3+ $\sqrt{3}$) }. Eine Probe bestätigt die Richtigkeit dieser Lösungen. Wie erwartet weist die Lösungsmenge die eingangs festgestellte Symmetrie auf.

Von relativ hohem Schwierigkeitsgrad ist *Aufgabe 17d)*, deren Gleichungssystem ebenfalls in x, y symmetrisch ist.

Der naheliegende Versuch, Gleichung (1) zu quadrieren und dann m.H. von (2) den Term (x^2+y^2) zu eliminieren, bringt nichts. Dagegen gelingt es auf folgende Weise, die Variable x zu eliminieren:

Aus (1) folgt $x(1+y) = 2+3\sqrt{2} - y$, also (3) $x^2(1+y)^2 = (2+3\sqrt{2} - y)^2$.

Dies kann zur Idee führen, (2) mit $(1+y)^2$ zu multiplizieren, damit der dann eliminierbare Term $x^2(1+y)^2$ entsteht.

Aus (2) folgt $x^2(1+y)^2 + y^2(1+y)^2 = 6(1+y)^2$, und wegen (3) folgt hieraus durch Einsetzen und Umformen (4) $y^4 + 2y^3 - 4y^2 - 2(8+3\sqrt{2})y + 4(4+3\sqrt{2}) = 0$.

Recht einfach zu finden ist die ganzzahlige Lösung y = 2. Wesentlich schwieriger ist es, eine weitere Lösung zu erraten, um so nach dem Abspalten zweier Linearfaktoren zu einem quadratischen Term zu gelangen.

Nun ist die Beobachtung entscheidend, daß (1) und (2) in x, y symmetrisch sind, d.h. daß mit (x;y) auch (y;x) eine Lösung dieses Gleichungssystems sein muß. Durch Einsetzen von y = 2 in (1) erhält man $x = \sqrt{2}$, also muß auch $y = \sqrt{2}$ eine Lösung von (4) sein. Spaltet man durch

Partialdivision die entsprechenden Linearfaktoren ab, dann erhält man die zu (4) äquivalente Gleichung (5) $(y - 2) (y - \sqrt{2}) (y^2 + (4+\sqrt{2})y + 6+4\sqrt{2}) = 0$.

Für die Diskriminante des quadratischen Terms gilt $D=(4+\sqrt{2})^2-4(6+4\sqrt{2})=-6-8\sqrt{2}<0$. Folglich besitzt die Gleichung (4) außer den beiden genannten Lösungen keine weiteren Lösungen. Durch Einsetzen in (1) und anschließende Probe erhält man dann die gesuchte Lösungsmenge $L=\{(\sqrt{2};2),(2;\sqrt{2})\}$.

die die erwartete Symmetrie aufweist.

Eine völlig andere Lösungsidee wird in dem folgenden 2. Lösungsweg verwendet:

Betrachtet man die im Gleichungssystem vorkommenden Terme, dann kann man auf den Vietaschen Wurzelsatz als Hilfsmittel stoßen.

Sind x und y die Lösungen der Gleichung

(6)
$$z^2 + pz + q = 0$$
,

dann gilt x+y = -p und xy = q, also $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = p^2 - 2q$.

Setzt man dies in (1) und (2) ein, dann erhält man das leichter lösbare Gleichungssystem

(7)
$$-p + q = 2 + 3\sqrt{2}$$

(8)
$$p^2 - 2q = 6$$

mit der Lösungsmenge L = { $(4+\sqrt{2}; 6+\sqrt{2}), (-2-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ }.

Für das erstgenannte Lösungspaar hat die Gleichung (6) keine Lösungen, das zweitgenannte Lösungspaar liefert die gesuchte Lösungsmenge von (1),(2).

Das in *Aufgabe 18a*) gegebene Gleichungssystem ist von Typ (3;3). Man wird eingangs feststellen, daß die ersten beiden Gleichungen nur die Variablen x, y enthalten und in diesen Variablen symmetrisch sind. Das legt es nahe, zunächst dieses Gleichungssystem vom Typ (2;2) zu lösen.

Auf routinemäßigem Weg eliminiert man y durch Einsetzen von (2) in (1) und gelangt so zur Gleichung x^4 - $5x^2$ + 4 = 0 mit den leicht erratbaren Lösungen $x \in \{1, -1, 2, -2\}$, aus denen man mit Hilfe von (2) die zugehörigen $y \in \{2, -2, 1, -1\}$ sowie mit Hilfe von (3) die zugehörigen $z \in \{3, -3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\}$ berechnet. Dies führt zur gesuchten Lösungemenge

$$\mathsf{L} = \{ \; (1;2;3), \; (-1;-2;-3), \; (2;1;\frac{3}{2}), \; (-2;-1;-\frac{3}{2}) \; \} \; .$$

Bei einem 2.Lösungsweg führt die Additionsmethode zum Ziel.

Addiert bzw. subtrahiert man das Doppelte von (2) zu (1), dann erhält man $x^2 + 2xy + y^2 = 9$, also $(x+y)^2 = 9$ bzw. $(x-y)^2 = 1$.

Hieraus folgt [x+y=3 oder x+y=-3] und [x-y=1 oder x-y=-1], was zu vier linearen Gleichungssystemen von Typ (2;2) führt, deren Lösungen die oben angegebenen vier Paare (x;y) liefern, aus denen man dann die gesuchten Lösungstripel (x;y;z) gewinnt.

Bei einem 3. Lösungsweg kann man die graphische Lösungsmethode anwenden, indem man die vier Schnittpunkte des zu (1) gehörenden Kreises mit der zu (2) gehörenden Hyperbel ermittelt und dabei feststellt, daß diese Schnittpunkte ganzzahlige Abszissen und Ordinaten besitzen.

Löst man bei *Aufgabe 18b*) in den drei Gleichungen die Klammern und setzt u = xy, v = xz, w = yz, dann entsteht ein leicht lösbares lineares Gleichungssystem in u, v, w mit dem Lösungstripel (2;3;6).

Aus xy = 2, xz = 3, yz = 6 folgt dann durch Multiplikation und Quadratwurzelziehen die Gleichung $xyz = \pm 6$, woraus man dann als mögliche Lösungstripel (1;2;3) und -1;-2;-3) erhält.

Eine Probe bestätigt die Richtigkeit. Also gilt $L = \{ (1;2;3), (-1;-2;-3) \}$.

Bei Aufgabe 18c) wird man zunächst feststellen, daß x, y, z ≠ 0 gelten muß.

Man erkennt recht leicht, daß man m.H. von (3) die Variable z durch x ausdrücken kann und daß man dann m.H. von (2) auch y durch x ausdrücken kann. Durch Einsetzen in (1) gelangt man dann zu einer Gleichung mit der Variablen x, aus deren Lösungen man dann die zugehörigen y und z ermitteln kann.

Die so erhaltene Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ hat die Lösungen $x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$.

Beim Berechnen der zugehörigen y, z beachte man: Aus $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ folgt $\frac{1}{x} = -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$

und $1 + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = x$, woraus dann x = y = z gefolgert werden kann.

So erhält man folgende Lösungsmenge mit zwei Lösungstripeln:

$$L = \{ (\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}); \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}); \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})), (\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}); \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}); \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})) \}.$$

Etwas schwieriger ist die Aufgabe 18d).

Wenn man beachtet, daß in (2) die Terme $-y^2$ und (x^2+z^2) vorkommen, dann kann man auf die Idee kommen, (1) nach y aufzulösen, zu quadrieren und dann in (2) einzusetzen, weil sich auf diese Weise (x^2+z^2) eliminieren und damit eine bedeutende Vereinfachung erzielen läßt.

In der Tat führt dieses Vorgehen zur Gleichung xz - x + z - 1 = 0 und damit zu (x+1)(z-1) = 0, woraus dann x = -1 oder z = 1 folgt.

Der Rest ist einfach. Auf diese Weise gelangt man zur Lösungsmenge

$$L = \{ (-1;-1;-1), (1;-1;1) \}.$$

Von noch höherem Schwierigkeitsgrad ist die Aufgabe 18e), bei der man zunächst die Symmetrie bezüglich x, y, z feststellen wird.

Das Auflösen von (1) nach einer der Variablen und Einsetzen in die anderen Gleichungen führt offensichtlich zu keinem brauchbaren Lösungsweg.

Angemessener erscheint die Additionsmethode. Das Quadrieren von (1) nebst Subtraktion von (2) führt zu

(4)
$$xy + xz + yz = 0$$
.

Die entscheidende Lösungsidee besteht jedoch in einem *geschickten Umformen von Termen*, und zwar im Faktorisieren. Dies gestattet es dann, Aussagen über die Faktoren von Produkten zu machen, die einander gleich oder die Null sind.

Gleichung (3) ist äquivalent mit $x^3 + y^3 = a^3 - z^3$ und damit auch mit

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = (a - z)(a^2 + az + z^2)$$
,

wegen x + y = a - z folgt hieraus also

(5)
$$(a-z)(x^2+y^2-xy) = (a-z)(a^2-z^2+2z^2+az)$$
.

Ist z = a, so folgt aus (2) x = y = 0, und man hat das Lösungstripel (0;0;a) gefunden.

Wegen der festgestellten Symmetrie müssen dann auch (a;0;0) und (0;a;0) Lösungstripel sein. Nun muß noch untersucht werden, ob weitere Lösungstripel existieren können.

Für z ≠ a müssen die zweiten Faktoren auf den beiden Seiten von (5) einander gleich sein.

Wegen (2) gilt $x^2+y^2=a^2-z^2$, wegen (4) und (1) gilt $-xy=z(x+y)=z(a-z)=az-z^2$

Zusammen mit (5) erhält man hieraus

(6)
$$-xy = az - z^2 = 2z^2 + az$$

Folglich muß z = 0 und xy = 0 gelten, woraus man dann die bereits oben angegebenen beiden Lösungstripel erhält.

Eine Probe bestätigt, daß es sich tatsächlich um Lösungtripel handelt.

Folglich gilt
$$L = \{ (a;0;0), (0;a;0), (0;0;a) \}$$
.

Auch die $Aufgabe\ 18f)$ ist von höherem Schwierigkeitsgrad. Man erkennt leicht, daß (1;1;1) ein Lösungstripel ist und daß Symmetrie bezüglich x, y, z vorliegt. Dies kann dann zur Vermutung führen, daß (1;1;1) das einzige Lösungstripel ist.

Durch Einsetzen von (1) in (2) und (3) läßt sich eine Variable eliminieren. Geschicktes Umformen der so erhaltenen Gleichungen (4) und (5) legt dann eine Substitution (6) nahe, die zu einem relativ einfachen nichtlinearen Gleichungssystem vom Typ (2;2) führt. Die Rücksubstitution liefert dann die gesuchte Lösungemenge.

Bei Unterdrückung einiger Nebenrechnungen erhält man folgende Lösung:

```
(1) x + y + z = 3; d.h. z = 3 - x - y.
                                                               (2) x^3+y^3+z^3=3.
                                                                                                       xyz = 1.
                                                              (4) 9(x+y) - 3(x+y)^2 + xy(x+y) = 8; [Einsetzen, Umformen].
(1),(2)
                   \begin{array}{lll} (2) & \Rightarrow & (4) & 3(x+y) & 3(x+y
(1),(3)
                                                                                                                                                                                                                                  [Einsetzen, Umformen].
(4),(6)
                                        \Rightarrow (8) \quad 3u - uv = 1 ; \qquad [Einsetzen]. \Rightarrow (9) \quad u + 3v - v^2 = 3 , d.h. \quad u = v^2 - 3v + 3 ; [Addition, Division durch 3].
(5),(6)
(7),(8)
                                        \Rightarrow (10) (v-2)^3 = 0, d.h. v = 2;
                                                                                                                                                                                                                                [Einsetzen, Umformen].
(9),(7)
(10),(9) \Rightarrow (11) u = 1;
                                                                                                                                                                                                                                     [Einsetzen].
(10), (11), (6) \Rightarrow (12) x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0, d.h. x = 1; [Einsetzen, Eliminieren von y].
(12),(11),(6) \Rightarrow (13) y = 1;
                                                                                                                                                                                                                                     [Einsetzen].
(12),(13),(3) \Rightarrow (14) z = 1;
                                                                                                                                                                                                                                     [Einsetzen].
Probe. (1;1;1;) erfüllt das Gleichungssystem (1),(2),(3).
                                                             L = \{ (1;1;1) \}.
```

In Aufgabe 19) ist zu ermitteln, wieviel Lösungen ein parameterhaltiges Gleichungssystem in Abhängigkeit vom Parameter besitzen kann.

Löst man Gleichung (1) nach z auf und quadriert diese Gleichung, dann erhält man nach Einsetzen in (2) und Umformung

(4)
$$x^2 + y^2 + xy = \frac{1}{2}$$
.

Quadriert man diese Gleichung, dann erhält man nach entsprechendem Zusammenfassen (5) $x^4 + y^4 + 3x^2y^2 + 2xy(x^2 + y^2) = \frac{1}{4}$.

Wenn man (1) nach z auflöst, hieraus z⁴ berechnet und dies in (3) einsetzt, dann erhält man (6) $x^4 + y^4 + 3x^2y^2 + 2xy(x^2 + y^2) = \frac{a}{2}$.

Ist a $\neq \frac{1}{2}$, so widersprechen die Gleichungen (5) und (6) einander. Daher hat in diesem Fall das Gleichungssystem (1),(2),(3) keine Lösung.

Ist $a = \frac{1}{2}$, dann folgt aus (5), daß wegen z = -x - y höchstens diejenigen Tripel (x; y; -x -y) das Gleichungssystem (1),(2),(3) erfüllen können, wenn sie die Eigenschaft (4) haben.

Nun läßt sich zeigen, daß im Falle $a = \frac{1}{2}$ tatsächlich jedes Tripel (x; y; -x -y) mit der Eigenschaft (4) das Gleichungssystem (1),(2),(3) erfüllt, denn es gilt:

$$x + y + z = x + y + (-x - y) = 0$$
;
 $x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (-x - y)^2 = 2(x^2 + y^2 + xy) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$;
 $x^4 + y^4 + z^4 = x^4 + y^4 + (-x - y)^4 = 2(x^2 + y^2 + xy)^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = a$.

Folglich hat im Falle $a = \frac{1}{2}$ das Gleichungssystem (1),(2),(3) genau diese Tripel als Lösung.

Wie das Beispiel $(0; \frac{1}{2}\sqrt{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{2})$, $(0; -\frac{1}{2}\sqrt{2}; \frac{1}{2}\sqrt{2})$ zeigt, besitzt die Gleichung (4) mehr als eine Lösung. (Diese Gleichung besitzt sogar unendlich viele Lösungen.)

Damit ist gezeigt: Das Gleichungssystem (1), (2), (3) besitzt

- a) keine reelle Lösung, wenn $a \neq \frac{1}{2}$ gilt;
- b) genau eine reelle Lösung in keinem Fall;
- c) mehr als eine reelle Lösung, wenn $a = \frac{1}{2}$ gilt.

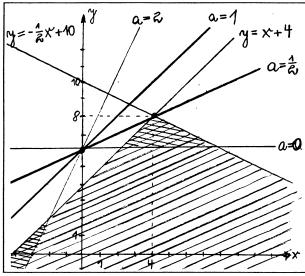
Bei Aufgabe 20a) bietet sich die graphische Lösungsmethode als Hilfsmittel an.

Wir betrachten zunächst das Gleichungssystem

- (1') $y = -\frac{1}{2}x + 10$,
- (2') y = x + 4,
- (3') y = ax + 6.

Die Graphen von (1') und (2') schneiden einander im Punkt (4;8). Also liegt die Menge aller Punkte, die zu den Lösungen (x;y) des Ungleichungssystems (1), (2) gehören, in dem schraffierten Winkelhaken mit Ausnahme der Ränder.

Der Graph von (3') ist ein Geradenbüschel mit dem Zentrum in (0;6). Die zu $a = \frac{1}{2}$ gehörende Gerade berührt den Winkelhaken im



Punkt (4;8), die zu a=1 gehörende Gerade ist parallel zum Graphen von (2'). Folglich kann das Ungleichungssystem (1), (2), (3) für $\frac{1}{2} \le a \le 1$ keine Lösungen besitzen. Für $a < \frac{1}{2}$ (z.B. für a=0) liegen die Lösungen in einem doppelt schraffierten Winkelhaken, für a>1 (z.B. für a=2) liegen sie in einem doppelt schraffierten Winkelhaken.

Folglich besitzt das Ungleichungssystem (1), (2), (3) genau dann mindestens eine Lösung, wenn a $<\frac{1}{2}$ oder a > 1 gilt.

Eine rechnerische Lösung wäre möglich, aber sehr umständlich.

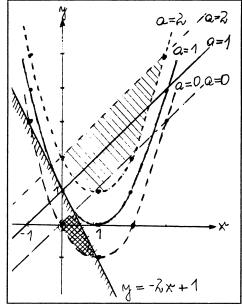
Bei Aufgabe 20b) kann man analog vorgehen. Eine zusätzliche Schwierigkeit besteht darin, daß in dem zugehörigen Gleichungssystem

- (1') $y = x^2 2x + a$,
- (2') y = x + a,
- (3') y = -2x + 1

zwei parameterhaltige Funktionsgleichungen auftreten. Die gesuchte Lösungsmenge besteht aus den Koordinatenpaaren aller derjenigen Punkte, die sowohl oberhalb der zu (1') gehörigen Parabel als auch unterhalb der zu (2') gehörenden Geraden als auch unterhalb der zu (3') gehörenden Geraden liegen.

Durch eine einfache Rechnung erkennt man, daß die zu (1') bzw. (2') gehörenden Graphen einander in den Punkten (0;a) und (3; 3+a) schneiden.

Ist a < 1, dann liegt der Schnittpunkt (0;a) unterhalb der zu (3') gehörenden Geraden, und daher enthält auch das oberhalb (1') und unterhalb (2') gelegene Flächenstück Punkte unterhalb (3') (vgl. das zum speziellen Fall



a = 0 gehörende doppelt schraffierte Flächenstück in nebenstehender Figur). Folglich ist im Falle a < 1 die Lösungsmenge von (1), (2), (3) nicht leer.

Für $a \ge 1$ enthält die Menge aller Punkte, deren Koordinaten (1) und (2) erfüllen (vgl. das zum speziellen Fall a = 2 gehörende einfach schraffierte Flächenstück) keinen Punkt, der auch unterhalb der zu (3') gehörenden Geraden liegt.

Damit ist gezeigt, daß das Ungleichungssystem (1), (2), (3) genau dann mindestens eine Lösung besitzt, wenn a < 1 gilt.

Hier lohnt auch noch die Behandlung eines 2. Lösungswegs, der sich rechnerischer Hilfsmittel bedient.

Angenommen, (1), (2), (3) habe für ein reelles a eine Lösung (x;y).

Aus (1) und (2) folgt dann $x \neq 0$, da sich für x = 0 der Widerspruch y > a, y < a ergäbe.

Aus (1) und (3) folgt ferner $x^2 - 2x + a < y < -2x + 1$, also $a < 1 - x^2$, wegen $x \ne 0$ also a < 1. Daher kann das Ungleichungssystem (1), (2), (3) nur für a < 1 eine Lösung besitzen.

In der Tat gibt es für jedes a < 1 eine Lösung, z.B. eine mit y = a. Für diesen Wert ist das Ungleichungssystem nämlich äquivalent zu

- (4) $x^2 2x < 0$,
- (5) x > 0,
- (6) -2x + 1 > a.
- (4) und (5) sind äquivalent mit

$$(7) \quad 0 < x < 2$$

und (6) ist äquvalent mit

(8)
$$x < \frac{1-a}{2}$$
.

Wegen a < 1 gilt $\frac{1-a}{2}$ > 0; also sind die Ungleichungen (7), (8) durch reelle x erfüllbar.

Die gesuchten Zahlen sind folglich alle Zahlen a < 1.

Die Aufgaben 21) bis 37) befassen sich mit *Exponential- und Logarithmusfunktionen* und zugehörigen Gleichungen und Ungleichungen. Es empfiehlt sich, eine Wiederholung des einschlägigen Unterrichtsstoffs durchzuführen und im "Merkstoff" auf S.26 die "Erweiterungen des Potenzbegriffs" durcharbeiten zu lassen.

Bei Aufgabe 21) achte man darauf, daß kein ETR verwendet wird und daß die Berechnungen möglicht geschickt durch Umwandeln von Potenzen und Verwenden von Potenzgesetzen durchgeführt werden. Dies kann z.B. so aussehen:

Aufgabe 21e)
$$0.00032^{-0.2} = (2^5 \cdot 10^{-5})^{-0.2} = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$$
.

Die Schüler sollten solange selbst analoge Aufgaben stellen und lösen, bis sie diesbezügliche Fertigkeiten erworben haben.

Bei Aufgabe 22) sollen - wiederum ohne Verwendung eines ETR - Näherungswerte für Potenzen berechnet werden, z,B bei

Aufgabe 22g):
$$0.041^{-0.49} \approx 0.04^{-0.5} = (2^2 \cdot 10^{-2})^{-0.5} = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$$
.

Bei Aufgabe 23) führt die Substitutionsmethode zum Ziel. Für u = 3^x geht die gegebene Gleichung über in u^2 - 30u + 81 = (u - 3)(u - 27) = 0 also in u = 3 oder u = 27, woraus man durch Rücksubstitution 3^x = 3 oder 3^x = 27, also x = 1 oder x = 3 und somit die gesuchte Lösungsmenge L = $\{1,3\}$ erhält .

Bei Aufgabe 24) führt die Betrachtung der Wertebereiche der vorkommenden Terme ans Ziel. Man erkennt leicht, daß die Gleichung genau dann gilt, wenn die als Exponenten auftretenden beiden Wurzeln den Wert 0 annehmen, was genau dann eintritt, wenn die beiden Radikanden 0 werden.

Dies führt auf ein leicht lösbares lineares Gleichungssystem und so zu gesuchten Lösungsmenge L = $\{(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})\}$.

Bei Aufgabe 25) geht es um die Festigung des Logarithmusbegriffs. Die Resultate sind wie folgt festzuhalten:

Aufgabe 25f):
$$\log_5 0.2 = -1$$
, weil $5^{-1} = \frac{1}{5} = 0.2$.

Die Schüler sollten solange selbst analoge Aufgaben stellen und lösen, bis sie eine entsprechende Fertigkeit erworben haben.

Aufgabe 26) dient einer Wiederholung dieser Beweise aus dem Unterricht. Man kommt durch Rückgriff auf die Definition des Logarithmus und Rückführung auf ein bekanntes Gesetz über Potenzen zum Ziel. Nach dem Hervorheben dieser Beweisidee sollte jeder Schüler die entsprechenden Beweise selbst finden. Die Darstellung der Lösung läßt sich wie folgt an der Wandtafel festhalten, wobei die Begründungen mündlich gegeben werden:

$$\log_{a}b = x \iff_{Df} b = a^{x}$$

$$\log_{a}c = y \iff_{Df} c = a^{y} \implies \log_{a}b \cdot c = x + y = \log_{a}b + \log_{a}c$$

$$\log_{a}c = y \iff_{Df} c = a^{y} \implies \log_{a}b^{n} = n \cdot x = n \cdot \log_{a}b$$

Bei Aufgabe 27) geht es zunächst darum, Vermutungen durch Betrachten konkreter Beispiele zu finden. So gilt z.B $\log_{16} 2 = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$.

Ferner sollen die Schüler erkennen, daß Formel (1) ein Spezialfall von Formel (2) ist. Nach dem Finden der Vermutung (6) $\log_a \mathbf{b} \cdot \log_b \mathbf{c} = \log_a \mathbf{c}$ und dem Hervorheben des "b" führt man den Namen "Kettenregel" ein (mit dem Hinweis auf die "Verkettung" der beiden Faktoren durch das "b"). Da dann auch $\log_a \mathbf{c} \cdot \log_a \mathbf{b} = \log_a \mathbf{b}$ gilt, ist leicht zu erkennen, daß man (7) aus (6) durch Vertauschen der Bezeichnungen und Umformen erhält.

Bereits vor dem Suchen nach einem Beweis für (6), mit dem auch (5) und (7) bewiesen sind, sollte man durch Betrachten der Aufgabe 28) die wichtige Anwendungsmöglichkeit von Formel (7) für das Berechnen beliebiger Logarithmen mit Hilfe von zwei dekadischen Logarithmen erkennen lassen. Man wählt a = 10, um $\log_c b$ berechnen zu können. Die Schüler sollen sich diesen Spezialfall von (7) in folgender Form einprägen:

(8)
$$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}$$

Ein Beweis für (6) läßt sich durch kombiniertes VA/RA finden. Hierbei stößt man auf das Gesetz über das Potenzieren von Potenzen als Hilfsmittel.

Der Beweis läuft analog wie bei Aufgabe 26). Man leitet (nach Verwendung der Definition des Logarithmus) die Gleichung $b^y = (a^x)^y = a^{x\cdot y} = c$, hieraus $x\cdot y = \log_a c$ und hieraus dann die Behauptung ab.

Aufgabe 28) dient der Aneignung von Formel (8). Um den Logarithmenbegriff zu festigen, lasse man stets vor der Berechnung des jeweiligen Terms abschätzen, ob dessen Wert im Intervall $(-\infty;-1)$, (-1;0), (0;1) oder $(1;\infty)$ liegt.

Die Schüler sollten solange selbst analoge Aufgaben stellen und lösen, bis sie eine hinreichende Fertigkeit im Lösen derartiger Aufgaben erlangt haben.

Bei Aufgabe 29) wird man hervorheben, daß es überraschend ist, daß die angegebenen Terme keine irrationalen Zahlen sondern rationale Zahlen (teilweise sogar ganze Zahlen) darstellen.

Wenn Schwierigkeiten auftreten, dann sollten die Schüler bei den Aufgaben 29a),c),d) die Werte zunächst mit Hilfe eines ETR berechnen, um so zu einer richtigen Vermutung zu gelangen, die sie dann jedoch ohne Verwendung eines ETR beweisen müssen.

Um bei Aufgabe 29a) die Formel (6) verwenden zu können, muß man zunächst die Reihenfolge der Faktoren geschickt vertauschen. So erhält man

$$(\log_2 7 \cdot \log_7 \sqrt{2}) \cdot (\log_3 13 \cdot \log_{13} 9) = \log_2 \sqrt{2} \cdot \log_3 9 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$
.

Bei Aufgabe 29b) wäre es unzumutbar umständlich, die einzelnen Summanden mit dem ETR zu berechnen und dann zu addieren, um zur Vermutung zu gelangen, daß diese Summe den Wert 2 besitzt.

Hier kann die Hilfsmittelfrage beim VA weiterhelfen. Nach dem Addieren der Brüche in den Radikanden bietet sich das Gesetz über Logarithmen von Quotienten als Hilfsmittel an. Auf diese Weise erhält man folgende zum gegebenen Term äquivalente Terme:

$$lg\frac{100}{99} + lg\frac{99}{98} + ... + lg\frac{3}{2} + lg\frac{2}{1} = lg100 - lg99 + lg99 - lg98 + ... + lg3 - lg2 + lg2 - lg1 = lg100 - lg1 = 2 - 0 = 2$$
.

Wenn man bei Aufgabe 29c) mit Hilfe des ETR festgestellt hat, daß der gegebene Term den Wert 0,5 besitzt, dann kann man durch Rückwärtsarbeiten ans Ziel gelangen.

Man würde dieses Resultat erhalten, wenn $\lg(7 - 4\sqrt{3}) = 2 \cdot \lg(2 - \sqrt{3})$ gelten würde, dies würde gelten, wenn $\lg(7 - 4\sqrt{3}) = \lg(2 - \sqrt{3})^2$ gelten würde, was seinerseits aus $(2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3}$ folgen würde.

Man überzeugt sich leicht, daß tatsächlich die letzgenannte Beziehung gilt und hat so einen Lösungsweg gefunden.

Bei Aufgabe 29d) kann man analog vorgehen. Der ETR liefert als Wert des gegebenen Terms 0,66666, also $\frac{2}{3}$, was aus $3 \cdot \lg(3 - 2\sqrt{2}) = 2 \cdot \lg(5\sqrt{2} - 7)$ folgen würde.

Wegen $(3 - 2\sqrt{2})^2 = 17 - 12\sqrt{2}$, $(3 - 2\sqrt{2})^3 = (17 - 12\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 99 - 70\sqrt{2}$ und $(5\sqrt{2} - 7)^2 = 99 - 70\sqrt{2}$ kann man dieses hinreichende Teilziel erreichen und damit ans Ziel gelangen.

Bei Aufgabe 30) kommt man durch Anwendung der Definition des Logarithmus leicht ans Ziel. Aus $log_{14}(log_{11}x) = 1$ folgt $log_{11}x = 14$ und hieraus $x = 11^{14}$, woraus man sofort erkennt, daß die letzte Ziffer von x eine 1 ist.

Da nach den letzten beiden Ziffern von x gefragt ist, wird man das Rechnen mit Kongruenzen als Hilfsmittel einsetzen.

Mit Hilfe des ETR erkennt man, daß $11^5 = 161951 \equiv 51$ (100) und $51^2 = 2601 \equiv 01$ (100), also $11^{10} \equiv 51^2 \equiv 01$ (100) gilt.

Wegen $11^4 = 14641 = 41$ (100) gilt daher $11^{14} = 11^{10.114} = 41$ (100).

Folglich hat x die letzten beiden Ziffern 41.

Beim Lösen der in *Aufgabe 31*) gegebenen *Gleichungen mit Logarithmen* lasse man stets nachprüfen, ob die zum Zweck der Vereinfachung vorgenommenen Umformungen äqivalent sind oder nur implizierend, ob daher eine Probe (oder ein "Rückschluß") nur dem Auffinden von Rechenfehlern dient oder logisch notwendig ist.

Man gewöhne die Schüler daran, stets zuerst den Lösungsgrundbereich der Gleichung festzuhalten.

Die in Aufgabe 31a) gegebene Gleichung ist für x > 0 äquivalent mit $log_2(log_2x) = 2^0 = 1$, also auch mit $log_2x = 2^1 = 2$ und mit $x = 2^2 = 4$.

Folglich gilt $L = \{4\}$.

Eine Probe ist nicht erforderlich, aber zweckmäßig.

Bei Aufgabe 31b) kann die Hilfsmittelfrage beim VA weiterhelfen. Da es mit Hilfe von Formel (8) gelingt, alle Summanden in Logarithmen zur gleichen Basis umzuwandeln, kann man dann mit Hilfe von Formel (1) eine weitere Vereinfachung erreichen und so ans Ziel gelangen.

Offensichtlich ist es am geschicktesten, als gemeinsame Basis die 2 zu wählen. Die durchgeführten Umfomungen erweisen sich als äquivalent, dennoch ist eine Probe zu empfehlen.

$$\begin{split} \log_{16}x + \log_4x + \log_2x &= 7 \quad \text{und} \quad x > 0 \ , \\ \frac{\log_2x}{\log_216} + \frac{\log_2x}{\log_24} + \log_2x &= 7 \ , \\ \frac{1}{4}\log_2x + \frac{1}{2}\log_2x + \log_2x &= 7 \ , \\ \log_2x &= 7 \ , \\ \log_2x &= 4 \ , \\ x &= 2^4 = 16 \quad \text{und} \quad x > 0 \ . \\ L &= \{\ 16\ \} \ . \end{split}$$
 Probe: $\log_{16}16 + \log_416 + \log_216 = 1 + 2 + 4 = 7 \ .$

Aufgabe 31c):
$$\frac{1}{2} \lg(2x-1) + \lg\sqrt{x-9} < 1 \text{ und } x > 9 ,$$

$$\frac{1}{2} \lg(2x-1) + \frac{1}{2} \lg(x-9) < 1 ,$$

$$\lg[(2x-1)(x-9)] < 2 ,$$

$$(2x-1)(x-9) < 10^2 = 100 ,$$

$$x^2 - \frac{19}{2}x - \frac{91}{2} < 0 ,$$

$$(x + \frac{7}{2})(x-13) < 0 \text{ und } x > 9 ,$$

$$-\frac{7}{2} < x < 13 \text{ und } x > 9 ,$$

$$L = (9; 13) .$$

Aufgabe 31f): Diese Ungleichung ist "fast" äquivalent mit der Ungleichung aus Aufgabe 31c), hier steht lediglich anstelle des "<" ein ">" . Also gilt $L = R \setminus \langle 9; 13 \rangle = (-\infty; 9) \cup (13; \infty)$.

Mit Hilfe der *Aufgabe 31g*) sollte man testen, ob sich die Schüler tatsächlich angewöhnt haben, zunächst stets der Erfüllungsgrundbereich X der Gl/Ugl zu ermitteln. Tun sie dies nicht, dann gelangen sie zur Ungleichung $\frac{x-2}{1-2x} > 10$ mit der Lösungsmenge $L = (\frac{1}{2}; \frac{12}{21})$. Da hier aber x > 2 und $x < \frac{1}{2}$ gelten muß, gilt X = 0 und damit auch L = 0.

Von etwas höherem Schwierigkeitsgrad sind die parameterhaltigen Gleichungen in der Aufgabe 32).

Hier wird man nicht nur den Lösungsgrundbereich der Variablen x, sondern auch den zulässigen Grundbereich für den Parameter a gleich zu Beginn festhalten.

```
Aufgabe 32a):
     x^{\log_a x} = a^2 \cdot x und x > 0 und a > 0, a \ne 1; [beidseitig logarithmieren].
     \log_a[x^{\log_a x}] = \log_a a^2 x;
                                                  [Log. von Potenzen und Produkten].
     \log_a x \cdot \log_a x = \log_a a^2 + \log_a x
                                                   [ Umformen ] .
                                                  [Substitution u = log_2x].
     (\log_a x)^2 - \log_a x - 2 = 0;
     u^2 - u - 2 = (u - 2)(u + 1) = 0;
     u = 2 oder u = -1;
                                                   [Rücksubstitution].
     log_a x = 2 oder log_a x = -1;
     x = a^2 oder x = \frac{1}{a};
Folglich gilt: L = \{a^2; \frac{1}{a}\} für a > 0 und a \ne 1;
                 L = \emptyset
                             für a \le 0 oder a = 1.
Eine Probe bestätigt die Richtigkeit der Lösungen .
                      a \cdot 10^{bx} = 10^{cx+d}; x \in R; a,b,c,d \in R
Aufgabe 32b):
           Wenn a \le 0, dann L = 0
Fall 1.:
Fall 2.:
           Wenn a > 0. dann lga = (c - b)x + d, also (c - b)x = lga - d.
Fall 2.1.: Wenn a > 0 und b = c und lga \neq d, dann L = 0.
Fall 2.2.: Wenn a > 0 und b = c und lga = d (also a = 10^d), dann L = R.
Fall 2.3.: Wenn a > 0 und b \neq c, dann x = \frac{lga - d}{c - b}, also L = \{\frac{lga - d}{c - b}\}.
                L = \left\{ \frac{\lg a - d}{c - b} \right\} \quad \text{für} \quad a > 0 \quad \text{und} \quad b \neq c ;
Folglich gilt:
                               für a > 0 und b = c und a = 10^d;
                          für a \le 0 oder [a > 0 und b = c und a \ne 10^d ].
                 L = \emptyset
Stichproben:
Für a = 100, b = c = d = 1 wird 10.10^x = 10^{x+1} eine allgemeingültige Gleichung, also L = R.
Für a = 100, b = 1, c = 2, d = 1 wird 100 \cdot 10^x = 10^{2x+1} mit L = \{1\}.
Von etwas höherem Schwierigkeitsgrad ist die Aufgabe 33) .
Ein Einsetzen von (2) in (1), um x oder y zu eliminieren, bringt offensichtlich nicht viel ein.
Beim Betrachten von (1) könnte man u.U. erraten, daß x = 2 eine Lösung liefern könnte. Ent-
scheidend ist die Vermutung, daß zwischen den Radikanden ein Zusammenhang besteht, wie
er bereits in den Aufgaben 29c,d) eine Rolle spilete.
In der Tat gilt (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 5 - \sqrt{24}, und daher folgt aus (1)
                x \log_{v}(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{x} = 2 \log_{v}(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2}
                x^2 \log_y(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 4 \log_y(\sqrt{3} - \sqrt{2}) mit \sqrt{3} - \sqrt{2} > 0
also
und somit
Aus x = -2 und (2) würde y = 0 folgen, was der Voraussetzung y > 0 widersprechen würde.
Aus x = 2 und (2) folgt y = 4.
Folglich kann nur das Zahlenpaar (2; 4) eine Lösung des gegebenen Gleichungssystems
```

Wegen $2 \cdot \log_4(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 2 \cdot \log_4(5 - \sqrt{24})$ und 4 - 2 = 2 ist dies tatsächlich der Fall.

Folglich ist die gesuchte Lösungsmenge $L = \{(2, 4)\}$.

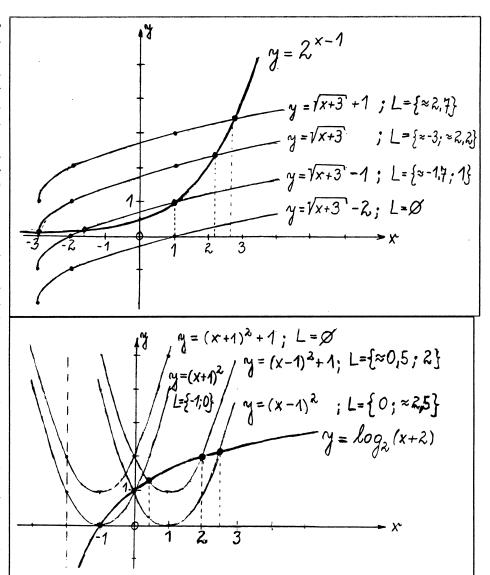
Im Zusammenhang mit der *Aufgabe 34*) sollte man eine zusammenfassende Wiederholung zu "Funktionen und ihre Graphen", "Transformation von Funktionsgraphen" und "Die graphische Methode zum Lösen von Gl/Ugl und Gleichungssystemen" aus der Aufgabensammlung /8/, S.21 für AG8 und der Aufgabensammlung /10/, S.25/26 für AG9 durchführen und auch die zugehörigen Aufgaben nochmals betrachten.

Bei Aufgabe 35) achte man darauf, daß die "charakteristischen Punkte" der Graphen sowie die Asymptoten mit eingezeichnet werden. Bei 35a) bzw. 35b) sind stets alle Graphen in ein und dasselbe Koordinatensystem einzuzeichnen.

Die Graphen sind durch Transformation des Graphen der zugehörigen "Grundfunktion" zu ermitteln und nicht mit Hilfe von Wertetabellen. Allerdings sollte man sich stets durch Stichproben für spezielle Werte überzeugen, ob dabei keine Fehler begangen wurden.

Bei 34a) ist zu beachten, daß ein endlicher Definitionsbereich vorgegeben wurde, der mit zu transformieren ist.

Wenn bei Aufgabe 36) die Schnittpunkte der Graphen charakteristimit schen Punkten oder mit anderen Gitterpunkten zusammenfallen, dann lassen sich die zugehörigen Lösungen der Gleichung "genau" ablesen, wobei man iedoch stets eine Probe machen sollte, um den Existenznachweis liefern. Der notwendige Einzigkeitsnachweis ist durch Untersuchen Definitionsbereiche sowie des Monotonieverhaltens des zugehörigen Funktionen zu erbringen. Auf diese Weise muß gezeigt werden, daß außerhalb des betrachteten Ausschnitts der Koordinatenebene keine weiteren Schnittpunkte liegen können. Bei nur näherungs-



weise ablesbaren Lösungen sollten die Schüler mit Hilfe des ETR Intervalle ermitteln, in denen diese Lösungen liegen.

Auf diese Weise gelangt man zu folgenden Lösungen:

- 36) a_1) $L = \emptyset$, a_2) $L = \{x_1, 1\}$ mit $-1, 7 < x_1 < -1, 6$,
 - a_3) L = { x_1 , x_2 } mit -3 < x_1 < -2.9 und 2.1 < x_2 < 2.2 ,
 - a_4) L = { x_1 } mit 2.6 < x_1 < 2.7 .
 - $b_1) \quad L = \{ \ 0; \ x_2 \ \} \quad \text{mit} \quad 2, 4 \le x_2 \le 2, 5 \ \ , \qquad b_2) \quad L = \{ \ x_1; \ 2 \ \} \quad \text{mit} \quad 0, 4 \le x_1 \le 0, 5 \ \ ,$
 - b_3) L = { -1; 0 },
- b_{A}) L = 0.

Aufgabe 37)

Angenommen, es gibt ein solches Zahlentripel, für das die angegebene Funktion die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Dann gilt

- (1) $\log_a(2b + c) = 2$,
- (2) $\log_a(-b + c) = 0$,
- (3) $\log_a c = 1$.

Aus (3) folgt c = a, aus (2) entsprechend b = c - 1. Daraus und aus (1) erhält man $\log_c(3c - 2) = 2$, also $3c - 2 = c^2$.

Diese Gleichung hat genau die Lösungen c = 1 und c = 2. Wegen c = a > 1 können somit höchstens für c = 2 und damit a = 2 sowie b = 1 die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sein.

Tatsächlich gilt für die Funktion $y = log_2(x + 2)$:

- (1') $\log_2(2+2) = 2$,
- (2') $\log_2(-1+2) = 0$,
- (3') $\log_2(2) = 1$.

Folglich ist (2; 1; 2) das einzige reelle Zahlentripel, das die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Die Aufgaben 38) bis 42) dienen einer Wiederholung des Beweisens von Ungleichheitsaussagen. Dieses Gebiet gehört vorwiegend zum außerunterrichtlichen Bereich. Es wurde in der AG Kl.7 (vgl. /6/, S. 15 u. 25 sowie /7/, S.88ff.) und in der Klasse 8 (vgl. /8/, S.15/16 sowie /9/, S.122ff.) behandelt.

Folgende Methoden wurden eingeführt :

- Folgern aus der Behauptung :
- Folgern aus den Voraussetzungen (VA);
- Hilfsmittelfrage beim VA oder RA führt zu einer Standardungleichung als Hilfsmittel;
- Substituieren zum Zweck der Vereinfachung;
- Abschätzen von Termen .

Ferner haben die Schüler die Sätze über das quadratische, das arithmetische, das geometrische und das harmonische Mittel kennengelernt.

Bei *Aufgabe 38a*) kann das Betrachten der Behauptung zur *Standardungleichung* $x + \frac{1}{x} \ge 2$ (für x > 0) führen. Desgleichen kann man an das Logarithmengesetz (5) aus Aufgabe 27) erinnert werden.

Da für a,b > 0 und a,b \neq 1 stets | $\log_b a$ | | $\log_a b$ | = 1 gilt, führt die Substitution x = | $\log_a b$ | (> 0) sofort zum Ziel.

Bei Aufgabe 38b) führt Folgern aus der Behauptung nebst anschließendem Vorwärtsarbeiten auf das so gewonnene Teilziel hin zum Erfolg.

Aus der Behauptung folgt $2(\lg(a+b) - \lg 3) = \lg a + \lg b$, also $\lg(a+b)^2 - \lg 9 = \lg ab$ und somit $\lg(a^2+b^2+2ab) = \lg 9ab$.

Aus der Voraussetzung $a^2 + b^2 = 7ab$ erhält man sofort $a^2 + b^2 + 2ab = 9ab$ und erreicht im nächsten Schritt das oben gewonnene Teilziel.

Die Lösungsdarstellung kann dann wie folgt aussehen:

Nach Voraussetzung gilt $a^2 + b^2 = 7ab$.

Hieraus folgt $a^2 + b^2 + 2ab = 9ab$,

also auch $(#) (a+b)^2 = 9ab.$

Nach Voraussetzung gilt a, b > 0, also auch $(a + b)^2 > 0$ und 9ab > 0.

Aus (#) folgt daher $lg(a+b)^2 = lg9ab$.

Durch Anwendung von Logarithmengesetzen erhält man hieraus

$$2 \cdot \lg(a+b) = 2\lg 3 + \lg a + \lg b$$
, $\lg(a+b) - \lg 3 = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b)$

und hieraus dann die Behauptung $lg \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(lga + lgb)$.

Damit ist der geforderte Beweis erbracht.

Bei Aufgabe 39) führt Folgern aus der Behauptung leicht zum Ziel.

$$\begin{array}{l} \sqrt{x}+\sqrt{x+3y}<\sqrt{x+y}+\sqrt{x+2y} \text{ , (wegen x,y>0 beide Seiten positiv; quadrieren);}\\ x+x+3y+2\sqrt{x(x+3y)}0 stets erfüllt).} \end{array}$$

Damit ist ein Beweisweg gefunden.

Bei Aufgabe 40) lasse man zunächst die Teilaufgaben 40a) und 40b) miteinander vergleichen und feststellen, daß 40a) ein Spezialfall von 40b) ist

Dann wende man sich sofort der *Aufgabe 40c*) zu und lasse die dort geforderte *Verallgemeinerung* auch in Wortform formulieren:

"Das Produkt aus der Summe von n positiven reellen Zahlen und der Summe ihrer Reziproken ist niemals kleiner als die Zahl n²."

Bei Aufgabe 40a) bespreche man folgende beiden Lösungswege:

1.Losungsweg:

Von $(x+y)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})\geq 4$ ausgehend gelangt man durch Folgern aus der Behauptung zunächst zu $1+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+1\geq 4$ und somit zu $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$.

Wer nicht erkennt, daß man auf diese Weise zu einer bekannten *Standardungleichung* gelangt und damit am Ziel ist, wird durch weiteres Folgern aus der Behauptung über $x^2 + y^2 \ge 2xy$ zur allgemeingültigen Ungleichung $(x - y)^2 \ge 0$ und damit ans Ziel gelangen.

2.Lösungsweg:

Die in der Behauptung auftretenden Terme (x + y) bzw. $(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})$ können an das arithmetische bzw. das harmonische Mittel zweier Zahlen erinnern und so zum Satz über das arithmetische und das harmonische Mittel als Hilfsmittel führen, von dem ausgehend man zu der abzuleitenden Behauptung zu gelangen trachtet.

Man erkennt leicht, daß unsere Behauptung mit der Behauptung dieses Hilfssatzes äquivalent ist und hat damit einen Beweisweg gefunden.

Bei *Aufgabe 40b*) erkennt man, daß Folgern aus der Behauptung $(x + y + z)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) \ge 9$ zu keinem Beweisweg führt. Da jedoch diese Behauptung äquivalent ist mit der Behauptung des

Satzes über das arithmetische und das harmonische Mittel von drei reellen Zahlen, führt der oben angegebene 2. Lösungsweg zum Ziel.

In Aufgabe 41a) ist diejenige Standardungleichung abzuleiten, auf die wir beim 1.Lösungsweg zu Aufgabe 40a) gestoßen sind, und wir haben bereits gezeigt, daß dies durch Folgern aus der Behauptung leicht möglich ist.

Um in *Analogie* zu Aufgabe 40) einen Lösungsweg für die Aufgabe 41b) zu finden, wollen wir nach einem 2. Lösungsweg für Aufgabe 41a) suchen, der dann übertragbar ist. Nun liegt es nahe, systematisch zu untersuchen, ob nicht einer der *Sätze über die Mittelwerte zweier positiver Zahlen als Hilfsmittel* dienen kann.

Dies kann zu folgendem Lösungsweg führen:

Für a,b>0 gilt $\frac{1}{2}(a+b)\geq \sqrt{a\cdot b}$, also $a+b\geq 2\sqrt{a\cdot b}$. Durch die Substitution $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{x}$ mit x,y>0 gelangt man so zu $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2\sqrt{\frac{x}{y}\frac{y}{x}}=2$ und damit ans Ziel.

Analog findet man dann einen Lösungsweg für Aufgabe 41b).

Wegen x,y,z > 0 und $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} = 1$ gilt nach dem Satz über das arithmetische und das geome-

trische Mittel für drei positive Zahlen $\frac{1}{3}(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x})\geq \sqrt[3]{1}$, woraus dann die Behauptung des zu beweisenden Satzes folgt.

Bei Aufgabe 42) kann man die Schüler auffordern, zunächst zu vermuten, für welche Werte des reellen Parameters a die gegebene Ungleichung allgemeingültig ist.

Da schon sehr oft aus $(x - y)^2 \ge 0$ die allgemeingültige Ungleichung $x^2 + y^2 \ge 2xy$ abgeleitet wurde und da sich diese Ungleichung offensichtlich nicht weiter verschärfen läßt, ist klar, daß a nicht größer als 2 werden darf.

Dies kann zur falschen Vermutung führen, daß die Ungleichung für alle $a \le 2$ allgemeingültig wird. Für a < -2 gilt diese Ungleichung nämlich genau dann nicht, wenn entweder x oder y einen negativen Wert annimmt.

Wir wollen daher untersuchen, für welche Werte des Parameters a der Ausdruck (x^2 - $axy + y^2$) für beliebige reelle Zahlen x, y nicht negativ wird.

Es gilt x^2 - $axy + y^2 = (x - \frac{a}{2}y)^2 + (1 - \frac{a^2}{4})y^2 \ge 0$ genau dann, wenn $1 - \frac{a^2}{4} \ge 0$, d.h. $a^2 \le 4$ bzw. $|a| \le 2$.

Folglich ist die gegebenen Ungleichung allgemeingültig genau dann, wenn $|a| \le 2$ gilt. Man erkennt leicht, daß das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn (a = 2 und x = y) oder (a = -2 und x = -y) gilt.

3.2. Weitere Themen aus der Arithmetik

Die Gebiete "Vektoren", "Komplexe Zahlen" und "Trigonometrie" wurden zu einem Komplex zusammengeschlossen, weil es uns hier um das Ziel geht, eine Vertiefung und Erweiterung des Unterrichtsstoffs mit der Entwicklung der Fähigkeit der Schüler zum selbständigen Erwerb von Wissen und Können zu verbinden. Dabei denken wir wiederum nicht ausschließlich an außerunterrichtliche Arbeit sondern sind der Meinung, daß vor allem für Leistungskurse auf diese Weise eine Anregung gegeben werden kann.

Bekanntlich gestattet das Gebiet "komplexe Zahlen" einen günstigen Zugang zum Ableiten goniometrischer Formeln, kann das Verständnis für Zusammenhänge zwischen trigonometrischen Funktionen verstärken und gestattet auch Anwendungen auf andere geometrische Disziplinen.

Andererseits ermöglicht die Vektoralgebra einen anschaulichen Zugang zur Theorie der komplexen Zahlen und ist auch aus anderen Gründen für Schüler der Klassenstufe 10 gut geeignet.

Aus diesen Gründen wurde der Komplex 3.2. gebildet, und deshalb wollen wir auch die Zielstellungen für alle drei Teilgebiete zusammenfassen.

Wir halten eine enge Verbindung zwischen geometrischen und nichtgeometrischen Gebieten für sehr wichtig.

Historisch gesehen waren es oft geometrische Probleme, die den Anstoß für die Entwicklung nichtgeometrischer Disziplinen gegeben haben. Die geometrische Anschauung war oft beim Entdecken mathematischer Erkenntnisse sehr hilfreich, auch wenn sie dann für einen Beweis dieser Erkenntnisse nicht mehr verwendet werden durfte. Und schließlich gehört ein gutes Raumanschauungsvermögen zu den sehr nützlichen (wenn nicht sogar notwendigen) Eigenschaften eines wissenschaftlich arbeitenden Menschen. Es besteht die Gefahr, daß auf Grund der Lehrplaninhalte ein derartiges "geometrisches Denken" im Unterricht zu kurz kommt. Dem wollen wir mit der Behandlung dieses Komplexes entgegenwirken.

Ferner geht es uns darum, gewisse "Leitlinien" des Mathematikunterrichts aufzugreifen, zu vertiefen und den Schülern nahezubringen.

Eine wichtige Rolle spielen die Zahlbereichserweiterungen, bei denen der geometrische Aspekt des "Auffüllens der Zahlengeraden" stark hervorgehoben werden sollte. Der Übergang von skalaren Größen zu vektoriellen Größen sowie die Erweiterung der Zahlengeraden zur Zahlenebene bieten sich im Sinne einer Vertiefung geradezu an.

In engem Zusammenhang hierzu stehen Betrachtungen zur Abstraktion durch Äquivalenzklassenbildung. Neben die gebrochenen Zahlen als Äquivalenzklassen von Brüchen treten nun Vektoren als Äquivalenzklassen von Pfeilen, der Begriff eines "günstig gewählten Repräsentanten", der ja keinesfalls nur in der Mathematik von Bedeutung ist, läßt sich zwanglos verwenden.

Ferner ist es leicht möglich, den Begriff "Strukturierte Menge" den Schülern nahezubringen. Konkrete Beispiele sind aus dem Unterricht und der außerunterrichtlichen Arbeit ja hinreichend bekannt, es geht also nur um eine Zusammenfassung und Vertiefung (wobei es selbstverständlich nicht um exakte Definitionen sondern um das Herausarbeiten von Gemeinsamkeiten und Unterschieden konkreter mathematischer Strukturen geht). Wichtig ist dabei das Fixieren von Fragestellungen: Welche Operationen und/oder Relationen lassen sich in einer vorgegebenen Menge überhaupt definieren? Welche Eigenschaften besitzen diese Operationen und/oder Relationen bzw. sollen sie besitzen, wenn es um die Erweiterung einer Struktur geht?

Wir haben bewußt nur die Multiplikation eines Skalars mit einem Vektor, nicht jedoch die skalare oder die verktorielle Multiplikation von Vektoren eingeführt. Das heißt aber nicht, daß

man den Schülern verschweigen soll, daß man in einer Menge von Vektoren durchaus zwei verschiedene Arten von Multiplikation definieren kann.

Das selbständige Erarbeiten von Wissen und Können durch die Schüler bezieht sich vor allem auf den "Merkstoff" in /1/ und wird in bestimmten Aufgaben explizit gefordert. Das führt dazu, daß im Vergleich zu früheren Klassenstufen die auf dem Gebiet "Sachkenntnisse und Fertigkeiten" genannten Ziele relativ umfangreich werden. Dabei wollen wir aber stets so vorgehen, daß den Schülern der Erwerb von Wissen und Können nicht als Selbstzweck, sondern als Hilfsmittel zum Lösen problemhafter Aufgaben erscheint, wie das in den Arbeiten /18/, /19/ und /20/ von G. POLYA gefordert wird.

Andererseits zeigt die Geschichte der Mathematik, daß dies keineswegs nur Anwendungsprobleme betrifft, sondern daß auch ein anscheinend "zweckfreies" Beschäftigen mit Mathematik zu Ergebnissen führt, ohne die sich die anderen Wissenschaften nicht weiterentwickeln könnten. Es geht uns also auch um das Ziel, bei den Schülern eine vernünftige und gesunde Einstellung zur Mathematik zu entwickeln.

Hiebei sollte man sich gezielt einiger Fakten aus den Geschichte der Mathematik bedienen. In unserem Zusammenhang bietet es sich an, vor allem auf die Leistungen von GAUSS einzugehen, der beim Versuch der Lösung des klassischen Problems der Konstruktion regulärer n-Ecke (allein mit Hilfe von Zirkel und Lineal) das Rechnen mit komplexen Zahlen als Hilfsmittel entwickelte und auf diese Weise zu erstaunlichen Ergebnissen gelangen konnte.

Beim Formulieren der möglichen Ziele unterscheiden wir folgende Teilgebiete:

Heuristische Vorgehensweisen:

- Transformationsprinzip:
 - ° Graphisches Lösen von Gleichungen als ein Übersetzen in die Sprache der Funktionen und ihrer Graphen;
 - ° Das Lösen von geometrischen Aufgaben mit Hilfsmitteln der Vektorrechnung oder der komplexen Zahlen
- Rückführungsprinzip (bzw. Zerlegungsprinzip):
 - ° Suche nach bereits gelösten Aufgaben, die beim Lösen der gestellten Aufgabe helfen können;
 - ° Finden, Formulieren und Lösen einfacherer Aufgaben, die Wege zum Lösen der gestellten Aufgabe öffnen.
- Vermeiden von "routinemäßigem" Vorgehen; "erst denken, dann rechnen"; Suche nach mehreren Lösungswegen und Auswahl der vermutlich rationellsten Lösungsmethode.
- Kombiniertes VA/RA;
 - VA zum Zweck des Vereinfachens von Termen und Aussageformen;
 - ° RA zum Entdecken hinreichender Teilziele oder chancenreicher Hilfsmittel (Sätze, Formeln, Definitionen u.ä.), mit deren Hilfe man in der Geometrie oft "versteckte Hilfslinien" finden kann.

Logische Grundlagen:

- Prinzip des deduktiven Aufbaus einer Theorie;
- Abstraktion durch Äquivalenzklassenbildung (nebst Anwendung auf den Aufbau der Zahlbereiche und der Einführung von Vektoren); geschickte Repräsentantenwahl;
- Problematik von Einzigkeitsnachweis und Existenznachweis bei Bestimmungsaufgaben; Rolle von Proben und Stichproben;
- Parameterhaltige Aufgaben als Aufgabenklassen; Kurvenscharen als Graphen von parameterhaltigen Gleichungen; Notwendigkeit einer Determination (Lösbarkeitsdiskussion oder Angabe von Lösbarkeitsbedingungen);
- Indirekte Beweise .

Sachkenntnisse und Fertigkeiten:

- Begriff und Einteilung der Funktionen; Eigenschaften und Graphen von Funktionen; Fundamentalsatz der Algebra; Transformation von Funktionsgraphen; Beispiele für komplexe Funktionen und deren Beziehungen zu geometrischen Abbildungen;
- Begriffe und Sätze aus der Vektoralgebra nebst Anwenden beim Lösen von Aufgaben; Punkte und Vektoren im Koordinatensystem;
- Begriffe und Sätze über komplexe Zahlen nebst Anwendung auf das Lösen von Aufgaben
- Kenntnis goniometrischer Formeln und trigonometrischer Sätze; Kenntnis des Prinzips der Ableitung dieser Formeln und Sätze; Anwenden beim Lösen von Aufgaben;
- Begriff der strukturierten Menge und der Isomorphie von Strukturen (erläutert anhand konkreter Beispiele)

3.2.1. Vektoren

Minimalvariante:

- 1) Etappenweise Aneignung des Merkstoffs unter Anleitung.
- 2a) bis 2f) Teilaufgaben einzeln lösen ; nach gemeinsamem Erarbeiten des Lösungswegs selbständige Arbeit mit anschließender Kontrolle der Resultate.
- 3) Gemeinsames Erarbeiten; Wiederholung der Dreiecksungleichungen.
- 4),6a),b),c) Wie Aufgabe 2a) bis 2f).
- 9a),b),c) Gemeinsames Erarbeiten, Abheben des Transformationsprinzips (Übersetzen in die Sprache der Vektorrechnung).
- 14) Angeleitete Aneignung des Merkstoffs.
- 15) Selbständiges Lösen mit anschließender Kontrolle.
- 16),17),20),21) Nach gemeinsamem Erarbeiten des Lösungswegs jeweils selbständiges Lösen mit anschließender Kontrolle.

Maximalvariante:

- 1),2),6) Selbständiges Aneignen des Merkstoffs mit Anwendung auf die Aufgaben 2) und 6); anhand von Stichproben überprüfen, ob die Schüler diese Aufgaben ,vor allem die Aufgaben 2f) und 6d) , selbständig lösen können.
- 3),4),5) Selbständiges Lösen der Aufgaben mit Kontrolle der Resultate; anschließend Diskussion zur Lösungsfindung.
- 7) bis 13) Gemeinsame Wiederholung des Transformationsprinzips; Übertragung auf das "Übersetzen in die Sprache der Vektorrechnung"; anschließend selbständiges Lösen der Aufgaben mit abschließender Diskussion zur Lösungsfindung.
- Selbständiges Erarbeiten des Merkstoffs; durch Stichproben überprüfen, ob die Schüler die Aufgaben 15), 16), 17), 20), 21) selbständig lösen können.
- 18),19) Selbständiges Lösen der Aufgaben mit Kontrolle der Resultate; anschließend Diskussion zur Lösungsfindung.

Einleitend wiederhole man die Begriffe "Äquivalenz" (Gleichheit in bestimmter Hinsicht), "Äquivalenzklasse" und "Repräsentant" sowie das Prinzip der Äquivalenzklassenbildung anhand von Beispielen.

Nach einer Wiederholung des Aufbaus der Zahlbereiche kann man mitteilen, daß das Rechnen mit Vektoren eine Reihe von Gemeinsamkeiten aber auch von Unterschieden zum Rechnen mit Zahlen aufweist. An der Wandtafel wird folgende Übersicht festgehalten:

Ausgangsmenge	Äquivalenzrelation	Äquivalenzklassen		
{ Bruch }	Quotientengleichheit	gebrochene Zahlen		
{ gebrochene Zahl }	Differenzengleichheit	rationale Zahlen		
{ ganze Zahl }	Restegleichheit mod m	Restklassen [r] _m		
{ Pfeil }	??????	Vektor ·		

Bei *Aufgabe 1*) werden die Schüler aufgefordert, den Text im Merkstoff auf S.27 und S.28 bis zur Definition von "entgegengesetzter Vektor" durchzulesen, u.U. Fragen zu diesem Text zu stellen und dann die Leerstellen in den nachfolgend angegebenen Sätzen (durch a ¼ b bzw. durch |a| = |b|) zu füllen. Es wird hervorgehoben, daß jeder Vektor durch unendlich viele Pfeile repräsentiert wird, und es wird das leere Feld in obiger Tabelle gefüllt.

In einer zweiten Etappe sollen die Schüler den zu "Addition und Subtraktion von Vektoren" gehörenden Text durcharbeiten. Die angegebenen Sätze werden erläutert, die im "Hinweis" erwähnten Eigenschaften (eindeutige Ausführbarkeit; Assoziativität, Kommutativität, Umkehrbarkeit) wiederholt. Es wird hervorgehoben, daß die Addition von Pfeilen (als geschickt gewählten Repräsentanten der Vektoren) auf zweierlei Weise möglich ist ("Schaft an Pfeilspitze" oder "Kräfteparallelogramm").

Dann teilt der AG-Leiter mit, daß man zwei verschiedene Arten der Multiplikation von Vektoren (skalare bzw. vektorielle Multiplikation) definieren kann, daß dies im Unterricht der Sekundarstufe II geschieht und daß wir hier nur die Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl behandeln (die als "Streckung" der zugehörigen Pfeile gedeutet werden kann). Die Schüler arbeiten im Merkstoff den entsprechenden Abschnitt durch und erläutern (bzw. beweisen) die angegebenen Sätze.

Die Aufgabe 2) dient der Aneignung der eingeführten Begriffe. Die Schüler werden aufgefordert, die im Aufgabentext enthaltenen Leerstellen zu füllen (vgl. die Lösungen im Abschnitt 4.).

Bei den Aufgaben 2a) und 2b) lasse man sich zunächst nur die Anzahl der Lösungen (3 bzw. 4) nennen. So können Schüler, die nicht alle Lösungen gefunden haben, ihren Fehler selbst korrigieren. Die leichte Aufgabe 2c) dient ebenfalls der Vorbereitung auf das Lösen der weiteren Aufgaben.

Bei der Aufgabe 2d) wird zunächst festgestellt, daß $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ und $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$ gilt. Dann sollen die Schüler zunächst jeweils einen geschickt gewählten, zum gegebenen Pfeil äquivalenten Pfeil nennen, dem man die Lösung unmittelbar entnehmen kann. So gilt etwa $\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{a}$. Manchmal führen verschiedene Lösungswege zum Ziel. So gilt etwa $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$, aber auch $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$.

Bei Aufgabe 2e) sollten die Schüler selbst entdecken, daß eine derartige Addition stets dann leicht durchführbar ist, wenn der "Schaftpunkt" eines Summanden mit dem "Pfeilpunkt" des vorhergehenden Summanden übereinstimmt, und daß dies durch die Auswahl günstiger Repräsentanten stets erreichbar ist. So gilt etwa $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{D}$.

Auch bei Aufgabe 2f) sollten die Schüler den Lösungsweg selbst finden. Hier läßt sich das Rückführungsprinzip als heuristische Vorgehensweise gut demonstrieren.

Schreibt man $\overrightarrow{AP} + ? = \overrightarrow{AM}$, dann führt das bei den Hilfsaufgaben 2d) und 2e) entdeckte Verfahren zu $? = \overrightarrow{X} = \overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{D}$.

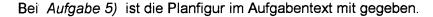
Eine neue Schwierigkeit taucht bei der Aufgabe $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{SR}$ auf, weil hier die Schaftpunkte der Repräsentanten der gegebenen Vektoren nicht übereinstimmen. Wegen $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{AM}$ kann

man die gegebene Gleichung (durch günstige Repräsentantenwahl) auf die lösbare Gleichung $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{X} = \overrightarrow{AM}$ zurückführen und so zu $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{D}$ gelangen.

Bei der Gleichung $\overrightarrow{CR} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{BQ}$ versagt dieses Verfahren, weil es in unserer Figur keinen Punkt X gibt, für den $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{CX}$ gilt. Wegen $\overrightarrow{CR} = \overrightarrow{BP}$ gelangt man hier zur äquivalenten Gleichung $\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{BQ}$, die nach dem vorher angewandten Verfahren zu $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$ führt.

Bei dem in Aufgabe 3) geforderten Beweis führt die Fallunterscheidung zum Ziel, daß je zwei Vektoren stets entweder gleich gerichtet, oder entgegengesetzt gerichtet sind oder verschiedene Richtungen haben. Im letztgenannten Fall erweist sich die zu beweisende Aussage als äquivalent zu den Dreiecksungleichungen, und die beiden ersten Fälle sind auch leicht zu bearbeiten.

Bei der leichten Aufgabe 4) ist zunächst eine Planfigur anzufertigen. Der schwierigste Teil der Aufgabe liegt im Berechnen von $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{p} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{q} - \overrightarrow{p}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q})$.



Die Schüler sollen erkennen, daß bei Aufgabe 5a) die durch AC bzw. BD repräsentierten Vektoren jeweils auf zweifache Weise durch die Vektoren a, b, c, d ausgedrückt werden können:

AC = a + b = d + c; BD = b - c = -a + d.

Es gilt $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$, aber auch der umständlichere Weg

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{b} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$$
 führt zum Ziel.

Ferner erhält man $\overrightarrow{HG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{c} + \overrightarrow{d})$.

Von diesen Resultaten ausgehend gelangt man in Aufgabe 5b) zu $\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ bzw. $\overline{EF} = \overline{HG}$, was den Satz über die Mittellinie EF im Dreieck ABC (die stets halb so lang wie und parallel zur Grundlinie AC ist) bzw. den Satz über das Mittelpunktviereck EFGH des Vierecks ABCD (das stets ein Parallelogramm ist) festhält.

Von höherem Schwierigkeitsgrad ist die Aufgabe 5c)

Zunächst erhält man $\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{d}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{d}) = \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{d})$ oder

 $\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{d} + \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$ oder $\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{d} + \overrightarrow{C} - \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$, was alles nicht der Forderung genügt, HF nur durch a und c auszudrücken.

Addiert man jedoch die beiden letztgenannten Gleichungen seitenweise, dann erhält man $2 \cdot \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}$, also $\overrightarrow{HF} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c})$ und ist am Ziel.

Dieses Resultat kann man als "Satz über die Mittellinie HF des Vierecks ABCD" deuten, von dem man zum "Grenzfall" $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CC} = \overrightarrow{O}$ übergehen kann, für den dann $\overrightarrow{HF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{a}$ gilt, was den Satz über die Mittellinie HF im Dreieck ABC festhält.

Die Aufgaben 6a) bis 6d) werden analog wie die Aufgaben 2a) bis 2d) gelöst. Für die geforderten Begründungen verwendet man den Satz über die Mittellinie im Dreieck oder den räumlichen Strahlensatz.

Bei Aufgabe 7) sollten die Schüler zunächst alle Darstellungen von 👼 durch a, b oder c ermitteln.

Es gilt
$$\overrightarrow{AS_a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS_a} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CS_a} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$
.

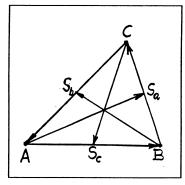
Folglich gilt
$$\vec{s}_a = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} = -\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b})$$
.

Analog gilt
$$\vec{s}_b = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = -\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{c})$$

und $\vec{s}_c = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} = -\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$.

Für
$$\vec{x} = \vec{s_a} + \vec{s_b} + \vec{s_c}$$
 folgt hieraus wegen $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{o}$ dann $\vec{x} = \frac{3}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = -\frac{3}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{2}\vec{o} = \vec{o}$.

Folglich bilden entsprechend gewählte Repräsentanten von $\vec{s_a}$, $\vec{s_b}$, stets ein Dreieck, wovon sich die Schüler auch durch eine Konstruktion überzeugen sollten. Durch Gegenbeispiele kann man



sich überzeugen, daß dies nicht für alle Ecktransversalen eines Dreiecks gilt, z.B. nicht für die Höhen eines beliebigen Dreiecks.

Die Aufgabe 8a) wird analog gelöst wie die Aufgabe 6a).

Um Aufgabe 8b) zu lösen, berechnet man $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$ und $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c})$, woraus dann $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$ folgt. Damit ist gezeigt, daß E, C, M, N in einer Ebene liegen und daß \overrightarrow{MN} die zu \overrightarrow{EC} gehörende Mittellinie im Dreieck ECG ist, was man auch direkt der gegebenen Figur entnehmen kann.

Ferner gilt $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ und $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$, woraus die Lösung von Aufgabe 8c) folgt.

Nun sollte man mit den Schülern das *Transformationsprinzip* wiederholen, das durch den Impuls "Übersetze die Aufgabe in die Sprache einer günstig gewählten mathematischen Theorie" charakterisiert wird.

Eingeführt wurde dieses Prinzip in der Zahlentheorie, wo Aufgaben aus der Teilbarkeitslehre in die Sprache der Gleichungen oder die Sprache der Kongruenzen übersetzt wurden. Dann wurde das graphische Lösen von Gleichungen, Ungleichungen oder Gleichungssystemen als ein Übersetzen der Aufgabe in die Sprache der Funktionen und ihrer Graphen aufgefaßt, und auch die algebraische Methode zum Lösen von Konstruktionsaufgaben wurde unter diesem Aspekt gesehen.

Es wird hervorgehoben, daß wir nun geometrische Aufgaben auch mit Hilfsmitteln der Vektorrechnung lösen können, und es wird mit den Schülern folgendes "Wörterbuch" für das Übersetzen in die Sprache der Vektorrechnung erarbeitet:

Geometrie		Vektorrechnung		
ABQP ist ein Parallelogramm AB PQ und AP BQ	A B	ĀB = PQ , (A ≠ P)		
ABQP ist ein Trapez AB PQ (und AB = k·PQ)	$A \xrightarrow{P} Q$	$\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{PQ}$, $(A \neq P, k > 0)$		
P liegt auf g ; P teilt AB A,B,P ∈ g und AP:AB = k : 1	A P B 9	ĀP = k·ĀB ; (k ≠ 0) (0 < k < 1 bei innerer Teilung)		

Bei dieser Gelegenheit kann man auch die Begriffe "Teilverhältnis", "innere Teilung", "äußere Teilung" wiederholen und mit den Fällen k > 1, -1 < k < 0 und k < -1 in Beziehung bringen lassen.

Beim Lösen der Aufgabe 9) wird das Transformationsprinzip bewußt eingesetzt.

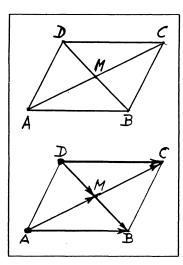
Bei Aufgabe 9a) wird man zunächst eine Planfigur zeichnen, günstige Bezeichungen einführen und dann die Voraussetzungen und die Behauptung des zu beweisenden Satzes herausschreiben:

 V_0 : ABCD ist ein Viereck mit $AC \cap BD = \{M\}$;

 V_1 : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$; V_2 : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$;

Beh.: ABCD ist ein Parallelogramm.

Um die Voraussetzungen und die Behauptung in die Sprache der Vektorrechnung übersetzen zu können, führt man geeignete Pfeile (als Repräsentanten von Vektoren) ein. Hierfür gibt es verschiedene Möglichkeiten. Eine besonders einfache Möglichkeit ist in unserer Planfigur und in folgendem Lösungsgraphen festgehalten:



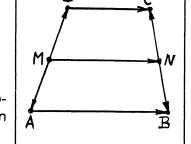
Aufgabe 9b)

V₁: ABCD ist ein Trapez mit AB||CD;

V₂: M ist der Mittelpunkt von \overline{AD} ;

V₃: N ist der Mittelpunkt von BC;

Beh.: MN||AB| und $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD})$.



Nach Einführung günstiger Pfeile lautet die transformierte Behauptung: $\overrightarrow{MN} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$. Die Voraussetzungen lauten dann $\overrightarrow{DC} = q \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MD}$; $\overrightarrow{NB} = -\overrightarrow{NC}$.

Es gilt $\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AB} + \overline{BN}$ und $\overline{MN} = \overline{MD} + \overline{DC} + \overline{CN}$, folglich

 $2 \cdot \overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + (\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN}) = \overrightarrow{\delta} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{\delta}$ (seitenweise Addition und Verwendung von V_2 , V_3) sowie $2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = (1+q) \cdot \overrightarrow{AB} = 2k \cdot \overrightarrow{AB}$, woraus dann sofort die transformierte Behauptung folgt.

Wenn die Schüler die Aufgabe 5c) gelöst haben, dann sollen sie erkennen, daß unser Satz ein Spezialfall des dort abgeleiteten Satzes über Mittellinien eines beliebigen Vierecks ist.

Aufgabe 9c):

V₁: ABCD ist ein Trapez mit AB||CD und AD∩BC = {S};

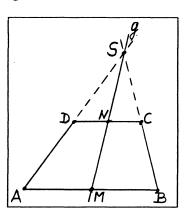
 V_2 : M ist der Mittelpunkt von \overrightarrow{AB} ;

 V_3 N ist der Mittelpunkt von \overrightarrow{CD} ;

Beh.: $M, N, S \in g$

Durch Transformation der Behauptung erhält man das hinreichende Teilziel $\overline{SN} = k \cdot \overline{SM}$. Aus den Voraussetzungen folgt $\overline{SC} = k \cdot \overline{SB}$ und $\overline{SD} = k \cdot \overline{SA}$, also

(1) $\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = k \cdot (\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB})$.



Nach dem Satz über die Seitenhalbierende \overline{SN} im Dreieck DCS (in vektorieller Form) gilt $\overline{SN} = \frac{1}{2}(\overline{SC} + \overline{SD})$. Wegen (1) folgt hieraus (2) $\overline{SN} = \frac{1}{2} k \cdot (\overline{SA} + \overline{SB})$.

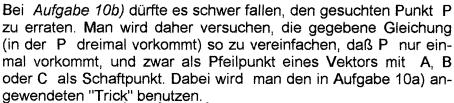
Analog folgt $\overline{SM} = \frac{1}{2}(\overline{SA} + \overline{SB})$. Wegen (2) gilt daher $\overline{SN} = k \cdot \overline{SM}$, und wir haben das hinreichende Teilziel erreicht.

Aufgabe 10a):

Sei M ein beliebiger Punkt im Inneren eines Dreiecks ABC. Dann ailt:

 $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{M}\overrightarrow{A} + \overrightarrow{M}\overrightarrow{B} - 2 \cdot \overrightarrow{M}\overrightarrow{C} = (\overrightarrow{M}\overrightarrow{A} - \overrightarrow{M}\overrightarrow{C}) + (\overrightarrow{M}\overrightarrow{B} - \overrightarrow{M}\overrightarrow{C}) = \overrightarrow{C}\overrightarrow{A} + \overrightarrow{C}\overrightarrow{B} = \overrightarrow{C}\overrightarrow{X}$ Folglich ist $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{C}\overrightarrow{X}$ unabhängig von der Lage von \overrightarrow{M} .

Ferner erkennt man, daß AXBC stets ein Parallelogramm ist und daß diese Beziehung für beliebige Punkte M (auch außerhalb des Dreiecks oder auf seinem Rand) gilt, d.h. daß man den bewiesesen Satz verallgemeinern kann.



Aus PA + PB - 3 PC = AB folgt

 $(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC}) + (\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC}) - \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AB}$

hieraus folgt $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AB}$,

also $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AC} = 2 \cdot \overrightarrow{AC}$.

Folglich erhält man den gesuchten Punkt P durch zweimaliges Abtragen von \overline{AC} auf der Verlängerung von \overline{AC} über C hinaus .



Im gegebenen Sechseck ABCDEF gelte $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{c}$ und $\overrightarrow{AD} \cap FC = \{S\}$.

Dann lautet die Behauptung in vektorieller Form: BE = k·c.

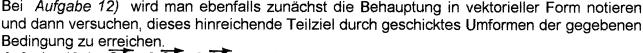
Um dieses hinreichende Teilziel zu erreichen, wird versucht,
BE durch andere Vektoren günstig darzustellen, z.B. in der
Form (*) BE = BC + CD + DE.

Laut Voraussetzung sind DEFS und ABCS Parallelogramme, also gilt DE = SF und SA = - b. Wegen FA||CD

gilt AF = q·c. Wegen SF = SA + AF gilt daher
DE = SA + AF = - b + q·c. Laut Voraussetzung gilt BC = b

und $\overline{CD} = \overline{C}$. Durch Einsetzen in (*) erhält man dann

 $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} - \overrightarrow{b} + q \cdot \overrightarrow{c}$, also $\overrightarrow{BE} = (1+\overrightarrow{q}) \cdot \overrightarrow{c} = k \cdot \overrightarrow{c}$ und hat damit das hinreichende Teilziel erreicht.

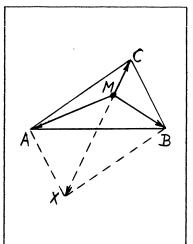


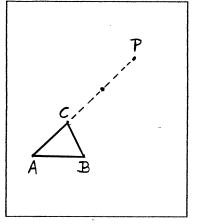
Aufgabe 12a): $\overrightarrow{OC} = 3 \cdot \overrightarrow{OA} - 2 \cdot \overrightarrow{OB}$ nach Voraussetzung; folglich $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = 2 \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})$;

folglich $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = 2 \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})$ folglich $\overrightarrow{AC} = 2 \cdot \overrightarrow{BA} = -2 \cdot \overrightarrow{AB}$;

folglich $A,B,C \in g$ und $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = 1:3$ (vgl. Skizze).

c A B





B

C

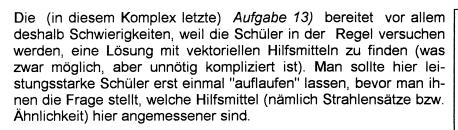
Aufgabe 12b): $\overrightarrow{OC} = \frac{3}{5} \overrightarrow{OA} + \frac{2}{5} \overrightarrow{OB}$ (nach Voraussetzung);

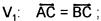
folglich

 $5.\overline{OC} = 3.\overline{OA} + 2.\overline{OB};$ $3.\overline{OC} + 2.\overline{OC} = 3.\overline{OA} + 2.\overline{OB};$ $3.(\overline{OC} - \overline{OA}) = 2.(\overline{OB} - \overline{OC});$ $3.\overline{AC} = 2.\overline{CB};$

CB = - ₹ CA ;

 $A,B,C \in g$ und $\overrightarrow{AB} : \overrightarrow{BC} = 1 : 3$ (vgl. Skizze). folglich



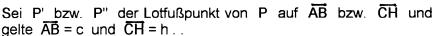


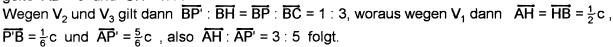
V₂: CH ist Höhe im Dreieck ABC;

 V_3 : $P \in \overrightarrow{BC}$ mit $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$;

 V_4 : AP \cap CH = {S};

Ges.: Verhältnisse \overrightarrow{AS} : \overrightarrow{SP} und \overrightarrow{HS} : \overrightarrow{SC} .





Wegen V_2 und V_4 gilt dann $\overrightarrow{AS}: \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AH}: \overrightarrow{AP}' = 3:5$, also $\overrightarrow{AS}: \overrightarrow{SP} = 3:2$.

Aus V_2 und V_3 folgt \overrightarrow{CP} : \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{CP}'' : $\overrightarrow{P''H}$ = 2 : 1, also $\overrightarrow{P''H}$ = $\frac{1}{3}$ h.

Ferner gilt \overrightarrow{SH} : \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{SA} : \overrightarrow{SP} = 3 : 2. also \overrightarrow{SH} = $\frac{3}{5}\overrightarrow{P}$ \overrightarrow{H} = $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{5}$ h = $\frac{1}{5}$ h, woraus dann das gesuchte Verhältnis HS: SC = 1:5 berechenbar ist.

Will man vektorielle Hilfsmittel einsetzen, dann führt Rückwärtsarbeiten zu folgendem Lösungsplan:

Man führt (mit Blick auf die Voraussetzungen) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{h}$, $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{p \cdot AP}$, $\overrightarrow{HS} = \overrightarrow{q \cdot h}$ ein und versucht, p und q zu berechnen, weil man hieraus die gesuchten Verhältnisse unmittelbar berechnen könnte. Würde man AS und AP kennen, dann könnte man p berechnen. AP ließe sich aus $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{c}$ und \overrightarrow{BP} berechnen ; usw. .

Solche Überlegungen können zu folgender Lösung führen:

Nach Voraussetzung gilt $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{h} - \frac{1}{2}\overrightarrow{C}$, also $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{h} - \frac{1}{6}\overrightarrow{C}$.

 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{C} + \frac{1}{3}\overrightarrow{h} - \frac{1}{6}\overrightarrow{C} = \frac{1}{3}\overrightarrow{h} + \frac{5}{6}\overrightarrow{C}$. Folglich gilt

AS = p·AP = 및 h + 등 등 Folglich gilt

 $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{c} + q \cdot \overrightarrow{h}$ (weil $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{c}$ laut Voraussetzung). sowie

Folglich muß $\frac{9}{3}\vec{h} + \frac{59}{6}\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{c} + q \cdot \vec{h}$ gelten,

 $(\frac{p}{3} - q) \cdot \vec{h} = (\frac{1}{3} - \frac{5p}{6}) \cdot \vec{c}$ folgt. woraus

Da h und c aber verschiedene Richtung haben, kann diese Gleichung nur gelten,

 $\frac{p}{3}$ - q = 0 und $\frac{1}{2}$ - $\frac{5p}{6}$ = 0 gilt. wenn

Hieraus folgt dann $p = \frac{3}{5}$ sowie $q = \frac{p}{3} = \frac{1}{5}$, und wir haben unser hinreichendes Teilziel erreicht. Mit leistungsstarken Schülern sollte man beide Lösungswege erarbeiten und abschließend vergleichen lassen.

Mit Aufgabe 14) beginnt ein neuer Abschnitt. Die Schüler sollen den Merkstoff zu "Punkte und Vektoren im Koordinatensystem" durcharbeiten und die dort vorhandenen Leerstellen ausfüllen $(\sqrt{x^2+y^2}\;;\;tan\phi\;;\;|p|\cdot cos\phi\;;\;|p|\cdot sin\phi\;)$. Neben den Pfeilen lernen die Schüler zwei weitere Darstellungsformen für Vektoren kennen, die der Darstellung des Punktes P des Ortspfeils \overline{OP} in kartesischen bzw. in Polarkoordinaten entsprechen.

Das in *Aufgabe 15*) geforderte Zeichnen der Ortspfeile zu den gegebenen Vektoren dient der Aneignung der neuen Begriffe. Dabei müssen die Schüler auch erkennen, daß $\sqrt{2}$ die Diagonalenlänge eines Quadrats mit der Seitenlänge 1 ist.

Nun sollte man zunächst die *Aufgaben 20) und 21)* lösen lassen, die ebenfalls der Aneignung der neuen Begriffe dienen. Hier wird die Umrechnung der beiden eingeführten Darstellungsformen für Vektoren verlangt. Man überzeuge sich, ob die Schüler mit den im Unterricht behandelten Begriffen $\text{sin}\phi$, $\text{cos}\phi$, $\text{tan}\phi$ vertraut sind und ob sie hinreichende Fertigkeiten im diesbezüglichen Rechnen mit dem ETR besitzen.

Die Tabellen sollte man spaltenweise füllen lassen und vereinbaren, mit welcher Genauigkeit die berechneten Werte anzugeben sind. Desgleichen ist zu vereinbaren, ob 0° $\leq \phi$ < 360° oder -180° < ϕ \leq 180° gelten soll. Eine "Probe" durch Betrachten des zugehörigen Ortspfeils im Koordinatensystem sollte stets durchgeführt werden. Bei leistungsschwächeren Schülern wird man das Lösen dieser Aufgaben auf mehrere Zirkel verteilen, um den Übunggseffekt zu erhöhen.

Wenn man bei *Aufgabe 20)* die Spalte "Quadrant" gefüllt hat, dann wird man nach dem Eintrag von II, III oder IV in der Spalte " ϕ " sofort festhalten, wie der gesuchte Winkel aus dem "zugehörigen Winkel im I.Quadranten" berechnet wird.

Beispiel: Der Ortspfeil zu \vec{b} = (-3; -4) liegt im III. Quadranten, also gilt ϕ = 180° +, wobei die Leerstelle mit derjenigen Winkelgröße zu füllen ist, die zu $|\tan \phi|$ = $\frac{4}{3} \approx 1,3333$ im I.Quadranten gehört, also mit der Winkelgröße 53,1°, was dann zu ϕ = 233° (Angabe auf drei geltende Ziffern genau) und damit zu \vec{b} = [5; 233°] führt. Das damit äquivalente Resultat \vec{b} = [5; -127°] ist für eine "geometrische Probe" u.U. besser geeignet und sollte daher auch mit angegebenen werden. Die weiteren Lösungen findet man im Abschnitt 4.

Bei *Aufgabe 21*) lasse man in die Spalten für "cos φ " und "sin φ " zunächst nur die Vorzeichen der betreffenden Werte eintragen, die mit den Vorzeichen der zugehörigen x , y übereinstimmen müssen. Ferner sollten die Schüler herausfinden, für welche der gegebenen Winkelgrößen die zugehörigen Funktionswerte genau angegeben werden können und wie diese Werte lauten. So gilt z.B. y = $5 \cdot \sin(-120^\circ)$ = $-5 \cdot \sin60^\circ$ = $-5 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} \approx -4,33$. Die Schüler sollen sich überzeugen, daß die mit dem ETR berechneten Werte von $5 \cdot \sin(-120^\circ)$ und $-5 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3}$ tatsächlich übereinstimmen (bzw. in analogen Fällen wegen Rundungsfehlern allenfalls in der letzten Stelle voneinander abweichen können). Mit derartigen Überlegungen, die für das Lösen dieser Aufgabe nicht unbedingt erforderlich sind, soll eine Wiederholung und Festigung des Unterrichtsstoffs erreicht werden.

Die Lösungen zu dieser Aufgabe findet man im Abschnitt 4...

Beim Lösen der *Aufgabe 16*) sollen die Schüler die Rechenregel für das Addieren und das Subtrahieren von Vektoren in kartesischer Darstellung entdecken.

Man erhält D(1;5) und P(3;1) sowie $|\vec{p}| = \sqrt{10}$. Für $\vec{OA} = \vec{a}$ und $\vec{OB} = \vec{b}$ wird $\vec{OD} = \vec{a} + \vec{b}$ sowie $\vec{AB} = \vec{OP} = \vec{b} - \vec{a}$.

Dies führt zur Vermutung

$$(a_1;a_2) \pm (b_1;b_2) = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2)$$
.

Leistungsstarke Schüler kann man auf das Beweisprinzip [Aufspaltung in Basisvektoren $(a_1;a_2) = (a_1;0) + (0;a_2)$ nebst Herleitung der Regel (a;0) + (b;0) = (a+b;0)] hinweisen.

Die Aufgabe 17) dient der Aneignung und Anwendung der entdeckten Regeln. Hier wird man zusätzlich herausarbeiten, daß

$$k \cdot (a_1; a_2) = (k \cdot a_1; k \cdot a_2)$$

gilt. Die zugehörigen Lösungen findet man in Abschnitt 4. .

In Aufgabe 18) werden diese Regeln nicht mehr auf konkrete, sondern auf beliebige (parameterhaltige) Vektoren angewendet.

Es gilt
$$\overrightarrow{m} = \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} [\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}] = \frac{1}{2} [(a_1; a_2) + (b_1; b_2)] =$$

$$= \frac{1}{2} (a_1 + b_1; a_2 + b_2), \text{ also}$$

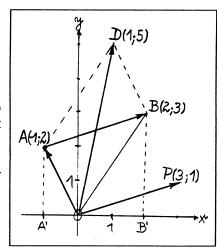
$$\overrightarrow{m} = (\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}).$$
Ferner gilt $\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}| = |(b_1; b_2) - (a_1; a_2)| =$

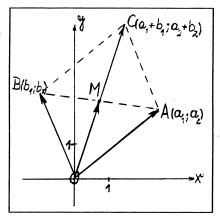
$$= |(b_1 - a_1; b_2 - a_2)|, \text{ also}$$

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Wie bereits früher gezeigt gilt

$$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$
.





In Aufgabe 19) soll das Umrechnen der beiden Darstellungsformen ineinander geübt werden, wobei es jedoch auch darum geht, möglichst geschickt vorzugehen. Man wird sich überlegen, in welcher Reihenfolge man die Teilaufgaben lösen will und welche der beiden Darstellungsformen leichter zu ermitteln ist.

Es ist günstig, zunächst die Vektoren $\overrightarrow{OA_i}$ in der Form $[|a|; \varphi]$ darzustellen. Dann wird man $\overrightarrow{OA_2} = [1; 60^{\circ}] = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ berechnen. Unter Ausnutzung der vorhandenen Symmetrie läßt sich nun sofort die Form (x; y) der restlichen Vektoren $\overrightarrow{OA_i}$ angeben.

nun sofort die Form (x; y) der restlichen Vektoren $\overrightarrow{OA_1}$ angeben. Anschließend wird man die Beziehungen $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4} = -2 \cdot \overrightarrow{OA_1}$ und $\overrightarrow{A_1A_6} = \overrightarrow{OA_5}$ benützen, um die zugehörigen Leerstellen zu füllen.

Ferner gilt $\overline{A_1A_3} = \overline{OA_3} - \overline{OA_1} = (-\frac{1}{2} - 1; \frac{1}{2}\sqrt{3} - 0) = (-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3})$. Aus Symmetriegründen folgt hieraus $\overline{A_1A_5} = (-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{3})$. Analog ermittelt man $\overline{A_2A_6} = \overline{OA_6} - \overline{OA_2} = (0; -\sqrt{3})$.

Um $\overline{A_1A_3}$ in der Form [|a|; ϕ] darzustellen, kann man die in Aufgabe 20) geübte Umformung durchführen und auf diese Weise $\overline{A_1A_3}$ = [$\sqrt{3}$; 150°] erhalten. Zum selben Resultat gelangt man auch durch geometrische Überlegungen. $\overline{A_1A_3}$ ist doppelt so lang wie die Höhe im gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge 1 , folglich gilt | a | = $\sqrt{3}$. Weiterhin ist leicht erkennbar, daß $\stackrel{\checkmark}{\sim} A_3A_1O$ = 30° gilt, woraus man dann ϕ = 180° - 30° = 150° erhält.

Hieraus folgt dann $A_1A_5 = [\sqrt{3}; 210^{\circ}]$

Auf diese Weise kann man mit minimalem Rechenaufwand die Aufgabe lösen.

3.2.2. Komplexe Zahlen

In diesem Abschnitt sollen vor allem zwei Ziele verfolgt werden:

Erläuterung des *Prinzips des deduktiven Aufbaus* mit einem Ausblick auf das *Prinzip des axiomatischen Aufbaus*; Schaffen eines günstigen Zugangs für den deduktiven Aufbau der *Trigonometrie*, wobei bewußt auf den Abschnitt "Rechnen mit Vektoren" zurückgegriffen und der anschaulich-geometrische Aspekt hervorgehoben wird.

Aus diesem Grund werden gleich zu Beginn sowohl die Darstellung einer komplexen Zahl z durch "kartesischen Koordinaten" (x;y) als auch die Darstellung durch "Polarkoordinaten" $[|z|; \phi]$ sowie die Begriffe "Realteil", "Imaginärteil", "Betrag" und "Argument" eingeführt, und es wird die Beziehung zu Vektoren, die durch Ortspfeile dargestellt sind, hervorgehoben.

Dann wird die Addition für die Form (x;y), die Multiplikation für die Form $[|z|; \phi]$ definiert, was eine Deutung als Addition bzw. Drehstreckung von Ortspfeilen gestattet. Für die Multiplikation in der Form (x;y) wird dann ein entsprechender Satz abgeleitet. Bei einem Rückblick auf den gewählten deduktiven Aufbau werden die Schüler darauf hingewiesen, daß man auch die Multiplikation für die Form (x;y) definieren kann, wobei man dann den unserer Definition für die Form $[|z|; \phi]$ entsprechenden Satz ableiten muß.

Minimalvariante:

- 1) Motivierung für das Einführen komplexer Zahlen; Hinweise auf die Geschichte der Mathematik und die Rolle von GAUSS; Wiederholen des Aufbaus der Zahlbereiche.
- Etappenweises Erarbeiten des Merkstoffs unter Anleitung; Aneignung der Begriffe beim Lösen von Aufgabe 4a); Wiederholen der Eigenschaften von Addition und Multiplikation.
- 3) Etappenweises Erarbeiten des Merkstoffs unter Anleitung; Beweis der Sätze S(1), S(3) bis S(6); Aneignen der Sätze S(2), S(6a), S(7), S(8) und S(9) anhand von Beispielen; Erläuterung des Prinzips des deduktiven Aufbaus.
- 4),5),6) Aneignen der Sätze beim Lösen dieser Aufgaben.
- 7) Anwenden beim Lösen linearer Gleichungen; Vergleich mit dem Lösen solcher Gleichungen im Reellen.
- 8),9) Wiederholen der Begriffe "Funktion", "Funktionsgleichung", "Funktionswert"; lineare Funktion und deren geometrische Deutung im Komplexen.
- Deuten von |a b| als Abstand der zugehörigen Punkte in der Zahlenebene; Anwenden dieser geometrischen Deutung bei Lösen von gewissen Betragsgleichungen oder -ungleichungen.
- 16),17d,e,f,g) Aneignen des Fundamentalsatzes der Algebra; Lösen von Kreisteilungsgleichungen; Beziehungen zum Konstruieren von regulären n-Ecken.
- 19),20a,b) Das Rechnen mit komplexen Zahlen als Hilfsmittel beim Lösen geometrischer Aufgaben (Transformationsprinzip).

Maximalvariante:

- 2),3) Selbständiges Erarbeiten des Merkstoffs; Überprüfen der Aneignung anhand der Aufgaben 4) bis 7).
- 8),9) Begriff der linearen komplexen Funktion; geometrische Deutung; Hinweis auf den Begriff "konforme Abbildung".
- 10),11).12) Eigenschaften der durch $w = f(z) = \frac{1}{z}$ dargestellten Funktion; Beziehungen zur Spiegelung am Einheitskreis; Ausblick auf Funktionentheorie im Komplexen.
- 13),14(,15) Selbständiges Lösen der Aufgaben.

- 16),17),18) Fundamentalsatz der Algebra; Ableiten der Formel von MOIVRE und deren Anwendung beim Lösen von Gleichungen.
- 20) Selbständiges Lösen planimetrischer Aufgaben durch "Übersetzen in die Sprache der komplexen Zahlen" (Transformationsprinzip).

Die *Aufgabe 1a)* führt zum Gleichungsystem "xy = 40 und x + y = 14", dessen ganzzahlige Lösungen (x;y) = (4; 10) oder (x;y) = (10; 4) sich leicht erraten lassen. Man kann auch zeigen, daß dieses Gleichungssystem durch Eliminieren von y zur quadratischen Gleichung $x^2 - 14x + 40 = 0$ führt und dabei wiederholen, daß diese Gleichung ganzzahlige Lösungen besitzen muß, weil ihre Diskriminante D = 196 - 160 = 36 eine Quadratzahl ist, und daß man die Lösungen einer derartigen Gleichung bei Verwendung des Vietaschen Wurzelsatzes stets ermitteln kann, ohne die Lösungsformel für quadratische Gleichungen anzuwenden.

Bei der *Aufgabe 1b*) gelangt man auf diese Weise zur quadratischen Gleichung x^2 - 12x +10 = 0 , die wegen D = 144 - 160 = - 16 keine reellen Lösungen besitzen kann. Die formale Anwendung der Lösungsformel führt zu $x_1 = 6 + 2\sqrt{-1}$ oder $x_2 = 6 - 2\sqrt{-1}$, und man erkennt, daß auch hier $x_1 + x_2 = 12$ und $x_1 \cdot x_2 = 40$ gilt, wenn man mit dem undefinierten Term $\sqrt{-1}$ ebenso rechnet, wie man es mit reellen Zahlen gewöhnt ist, und wenn man dabei $(\sqrt{-1})^2 = i^2 = -1$ setzt.

Der AG-Leiter wird hier den Schülern mitteilen, daß dies bereits VIETA erkannt hat und daß vor allem EULER auf diese Weise zu sehr bedeutsamen Entdeckungen in der Analysis gelangte, daß aber erst GAUSS eine exakte Theorie der komplexen Zahlen entwickelte.

An dieser Stelle sollte man eine Wiederholung und Ergänzung des Aufbaus der Zahlbereiche einfügen. Es wird untersucht, welche Umkehroperationen in welchen Zahlbereichen unbeschränkt ausführbar sind. Das Resultat läßt sich in folgender Tabelle festhalten, wobei die Zeile für die Menge C der komplexen Zahlen erst nachträglich gefüllt wird.

	a-b	a:b (b≠0)	\sqrt{a} (a \geq 0)	lga (a > 0)	ูง √a , n∈N	log _b a (a ≠ 0)
N	nein	nein	nein	nein	nein	nein
Z	ja	nein	nein	nein	nein	nein
Q⁺	nein	ja	nein	nein	nein	nein
Q	ja	ja	nein	nein	nein	nein
R	ja	ja	ja	ja	nein	nein
С	ja	ja	ja	ja	ja	ja

Die Schüler sollten wissen, daß die Frage nach der Umkehrbarkeit von Rechenoperationen in einer Menge mit der Frage nach der eindeutigen Lösbarkeit gewisser Gleichungen (nämlich von a + x = b, $a \cdot x = b$, $x^n = a$, $a^x = b$) in dieser Menge äquivalent ist.

Ferner ist hervorzuheben, daß man bei jeder Zahlbereichserweiterung angeben muß, welche Zahlen des neuen Bereichs mit den Zahlen des Ausgangsbereichs identifiziert werden (Prinzip der isomorphen Einbettung). Die aus dem Ausgangsbereich bekannten Operationen und Relationen müssen in dem neuen Bereich erneut definiert werden, und das hat so zu geschehen, daß die neu definierten Operationen oder Relationen dieselben Eigenschaften besitzen wie die aus dem Ausgangsbereich her bekannten Operationen oder Relationen.

Großer Wert sollte auf die geometrische Veranschaulichung von Zahlen durch Punkte gelegt werden, wobei die schrittweise Erweiterung von den natürlichen bis zu den reellen Zahlen als ein schrittweises Ausfüllen der Zahlengeraden durch Punkte veranschaulicht wird. Dem Über-

gang von den reellen Zahlen zu den komplexen Zahlen entspricht dann der Übergang von einer Zahlengeraden zur Gaußschen Zahlenebene.

Bei Aufgabe 2) wird aus der Definition D(1) zunächst die Gültigkeit von $\tan \varphi = \frac{y}{v}$,

 $x = |z| \cdot \cos \varphi$ und $y = |z| \cdot \sin \varphi$ gefolgert.

Nach dem Erarbeiten der Definitionen D(1) bis D(8) sollte man sofort die Aufgabe 4a) sowie die 1.Zeile der Aufgabe 4b) lösen lassen, was der Aneignung dieser Begriffe dient.

Dann ist nachzuweisen, daß die so definierte Addition und Multiplikation komplexer Zahlen die angegebenen Eigenschaften besitzt und daß bei dem durch D(2) festgelegten Übergang zu den reellen Zahlen die so definierten Rechenoperationen mit der Addition bzw. Multiplikation reeller Zahlen übereinstimmen. Aus Zeitgründen kann dies nur anhand von ein bis zwei repräsentativen Beispielen erfolgen.

Abschließend wird in D(9) $i = (0; 1) = [1; 90^{\circ}]$ definiert.

Als Beispiel wählen wir hier den Nachweis der eindeutigen Lösbarkeit der Gleichung a + x = b.

$$\begin{array}{lll} a+x=b & \Leftrightarrow_{D(1)} & (a_1;a_2)+(x;y)=(b_1;b_2) & \Leftrightarrow_{D(4)} & (a_1+x;\ a_2+y)=(b_1;b_2) \\ & \Leftrightarrow_{D(3)} & a_1+x=b_1 \ \ \text{und} \ \ a_2+y=b_2 & \Leftrightarrow & x=b_1-a_1 \ \ \text{und} \ \ y=b_2-a_2 \\ & & (\text{Eigenschaft reeller Zahlen}) \\ & \Leftrightarrow_{D(3)} & (x;y)=(b_1-a_1;\ b_2-a_2) & \Leftrightarrow_{D(4)} & (x;y)=(b_1;b_2)+(-a_1;\ -a_2) \\ & \Leftrightarrow_{D(6)} & (x;y)=(b_1;b_2)-(a_1;a_2) & \Leftrightarrow_{D(1)} & z=b-a \end{array}$$

Auch die anderen Nachweise folgen demselben Prinzip: Man formt unter Verwendung der gegebenen Definitionen so lange äquivalent um, bis man das zugehörige Gesetz für reelle Zahlen anwenden kann; der Einsatz der verwendeten Definitionen in umgekehrter Reihenfolge führt dann in der Regel zur Behauptung und damit zum Ziel.

Um die eindeutige Lösbartkeit der Gleichung $a \cdot z = b$ für $a \neq (0;0)$ nachzuweisen, setze man folgende Beweismittel in folgender Reihenfolge ein: D(1), D(5), D(3b), eindeutige Lösbarkeit der Gleichungen $u \cdot x = v$ und u + x = v für reelle Zahlen, D(3b), D(5), D(7), D(1).

Vor dem in *Aufgabe 3*) geforderten Beweis der Sätze S(1) bis S(6) sollten die Schüler zunächst die Sätze S(1) bis S(6a) verstehen und beim Lösen der *Aufgaben 4*) und 5) anwenden. So gilt z.B.

```
(a + b)(c + d) = [(1,1) + (-2,1)] \cdot [(4,-3) + (0,5)] = (-1,2) \cdot (4,2) = (-1 + 2i) \cdot (4 + 2i) = -4 - 4 + i(8 - 2) = -8 + 6i. Hierbei wurden D(4), S(4), und S(1) verwendet.
```

Bei Aufgabe 5) können sich die Schüler überzeugen, daß die binomischen Formeln natürlich auch für komplexe Zahlen gelten.

Die Lösungen der Aufgaben 4) und 5) findet man in Abschnitt 4.

Beim Beweis der angegebenen Sätze sollen die Schüler stets explizit angeben, welche Definitionen bzw. bereits abgeleiteten Sätze verwendet werden.

Um S(1) abzuleiten, muß man von der in D(9) gegebenen Form $i = [1; 90^{\circ}]$ ausgehen, durch Anwendung von D(5) zu $i^2 = [1; 90^{\circ}] \cdot [1; 90^{\circ}] = [1; 180^{\circ}]$ gelangen, woraus wegen der Folgerungen aus D(1) dann $i^2 = (-1; 0)$ folgt. Wegen D(2) gilt daher $i^2 = -1$, womit der Satz S(1) abgeleitet ist.

Wenn es eine Relation "<" geben würde, mit deren Hilfe sich die Menge der komplexen Zahlen ordnen ließe, dann müßte entweder 0 < i ("i ist positiv") oder i < 0 ("i ist negativ") gelten, und es müßten die für das Umformen von Ungleichungen verwendeten Regeln gelten.

Aus 0 < i würde $0 \cdot i < i \cdot i$ folgen; wegen D(2), D(5) und S(1) gilt $0 \cdot i = 0$ und $i^2 = -1$, also würde 0 < -1 und damit ein Widerspruch folgen.

Aus i < 0 würde (nach der Regel für das seitenweise Multiplizieren mit einer negativen Zahl) $i \cdot i > 0$ i , also -1 > 0 und damit ebenfalls ein Widerspruch folgen.

Folglich ist unsere Gegenannahme falsch, und damit ist S(2) bewiesen.

Für $y \ge 0$ gilt wegen D(9) und D(2): i·y = [1; 90°]·[|y|; 0°]. Nach D(5) folgt hieraus i·y = [|y|; 90°], wegen D(1) gilt daher i·y = (0;y). Für y < 0 folgt analog i·y = [1; 90°]·[|y|; 180°] = [|y|; 270°] = (0;y). Damit ist S(3) bewiesen.

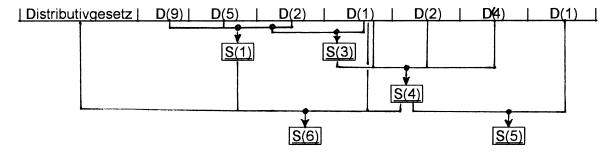
Wegen D(2) und S(3) gilt $x + i \cdot y = (x;0) + i \cdot (0;y)$, wegen D(4) also $x + i \cdot y = (x;y)$, woraus wegen D(1) dann $z = x + i \cdot y$ (die Summendarstellung von z) und somit S(4) folgt.

Aus D(1) folgt $x = |z| \cdot \cos \varphi$ und $y = |z| \cdot \sin \varphi$. Wegen S(4) erhält man hieraus durch Einsetzen und Umformen $z = x + i \cdot y = |z| \cdot \cos \varphi + i \cdot |z| \cdot \sin \varphi = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ die in S(5) festgehaltene trigonometrische Darstellung einer komplexen Zahl z.

Besonders wichtig ist die Ableitung der Regel S(6) für das Multiplizieren komplexer Zahlen in kartesischer Darstellung.

Wegen D(1) gilt $z_1 \cdot z_2 = (x_1; y_1) \cdot (x_2; y_2)$, wegen S(4) also $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 + i \cdot y_2)$. Nach dem Distributivgesetz folgt hieraus $z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 + i^2 \cdot y_1 y_2 + i \cdot (x_1 y_2 + x_2 y_1)$. Wegen S(1) und D(1) folgt hieraus $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2; x_1 y_2 + x_2 y_1)$, w.z.b.w.

Den bis hierher durchgeführten deduktiven Aufbau kann man durch folgenden Graphen festhalten:



Der Satz S(6a) läßt sich aus D(1), D(8), S(6), D(2) und D(1) ableiten. Die Beweise der restlichen Sätze S(7), S(8) und S(9) kann man im Zusammenhang mit den Aufgaben 16) und 17) führen lassen.

Bei Aufgabe 6) sollten die Schüler selbst entdecken, wie man durch eine geschickte Umformung (nämlich durch Erweitern) im Nenner eines Bruchs eine reelle Zahl erzeugen kann. Dabei wird man die Analogie zum Rationalmachen eines Nenners hervorheben. So gilt z.B.:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

Beim Lösen von linearen Gleichungen in Aufgabe 7) wird im allgemeinen auch das in Aufgabe 6) entdeckte Verfahren angewendet:

Aufgabe 7c): Durch äquivalentes Umformen erhält man:

$$a(z + b) = (c + d)z$$
;
 $az + ab = (c + d)z$;
 $(c + d - a)z = ab$;
 $z = \frac{ab}{c + d - a} = \frac{(1+i)(-2+i)}{3+i} = \frac{-3-i}{3+i} = -1$.

Vor der Behandung der *Aufgaben 8) und 9)* wird man den Unterschied zwischen einer Funktionsgleichung w = f(z) (als Aussageform), der zugehörigen Funktion f (als Erfüllungsmenge) und dem zugehörigen "Funktionswert" (als Term) wiederholen.

Durch Rückgriff auf D(5), wo die Multiplikation komplexer Zahlen in der Form $[|z|; \phi]$ definiert wird, wird nochmals hervorgehoben: Gilt $a = \overrightarrow{OP}$ und $z = [|z|; \phi]$ sowie $a \cdot z = \overrightarrow{OP}$, dann entsteht \overrightarrow{OP} aus \overrightarrow{OP} durch eine Drehung um O mit dem Drehwinkel ϕ nebst anschließender Streckung im Verhältnis 1: |z|.

Setzt man O = (0;0), P = (1;0), Q = (2;1) und wählt $a = (1;1) = [\sqrt{2}; 45^{\circ}]$, dann gilt bei der Abbildung $w = a \cdot z$ für die Bildpunkte O' = O = (0;0), P' = (1;1), Q' = (1;3).

Nun wird man den Schülern mitteilen, daß man beweisen kann, daß diese Abbildung geradentreu und orientierungserhaltend ist, woraus dann folgt, daß bei dieser Abbildung die Dreiecksfläche OPQ in die Dreiecksfläche OP'Q' übergeht und daß OP'Q' durch eine Drehstreckung aus OPQ entsteht.

Oft werden Original und Bild bei einer Abbildung durch eine komplexe Funktion in derselben Zahlenebene dargestellt (vgl. nebenstehende Figur). Manchmal ist es vorteilhafter, zwei Zahlenebenen

zu verwenden: Eine z-Ebene, in der die Originale festgehalten werden, und eine w-Ebene, wo die zugehörigen Bilder bei der Abbildung w = f(z) festgehalten werden.

Die durch y = f(x) = ax dargestellte reelle Funktion liefert eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Zahlengeraden "x-Achse" auf die Zahlengerade "y-Achse".

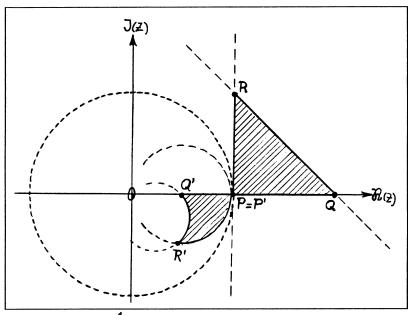
Die durch $w = f(z) = a \cdot z$ festgehaltene komplexe Funktion f liefert eine umkehrbar eindeutige Abbildung der z-Ebene auf die w-Ebene, die anschaulich als Drehstreckung gedeutet werden kann (während eine derartige Deutung für reelle Funktionen nicht möglich ist).

Die Aufgaben 11) und 12) gestatten es, etwas ausführlicher auf komplexe Funktionen und die durch sie vermittelten Abbildungen einzugehen.

Nach dem Ausfüllen der Funktionswerttabelle (vgl. Abschnitt 4.) lasse man die Punkte P(1;0), Q(2;0), R(1;1) und deren Bilder P'(1;0), $Q'(\frac{1}{2};0)$, $R'(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ bei der Abbildung $w=f(z)=\frac{1}{z}$ in die Zahlene-

bene einzeichnen.

Der "Hinweis" in Aufgabe 11) sowie die *Aufgabe 12*) erleichtern das Lösen von Aufgabe 11) beträchtlich.



Die Schüler sollen vermuten, daß die durch $w=\frac{1}{z}$ vermittelte Abbildung durch Nacheinanderausführung der Spiegelung am Einheitskreis und der Spiegelung an der reellen Achse erhalten werden kann. Wie die Schüler in der AG Klasse 9 erfahren haben, ist die Spiegelung am Kreis nicht geradentreu, sondern nur kreistreu i.w.S. Als Bild der Dreiecksfläche PQR erhält man im allgemeinen das Bild der Fläche eines Kreisbogendreiecks. Da die beiden verknüpften Spiegelungen beide den Orientierungssinn ändern, ist unsere Abbildung orientierungserhaltend.

An dieser Stelle kann man den Schülern auch die Aufgabe stellen, zu untersuchen, welche Abbildungen durch w = f(z) = z + b, w = f(z) = az mit |a| = 1 sowie durch $w = f(z) = r \cdot z$ mit reellem r vermittelt werden.

Hieraus folgt, daß durch die lineare komplexe Funktion f, die durch w = f(z) = az + b dargestellt wird, stets eine orientierungserhaltende Ähnlichkeitsabbildung vermittelt wird, die für den Spezialfall |a| = 1 eine orientierungserhaltende Bewegung ist. Geradenspiegelungen können durch eine derartige Funktion nicht vermittelt werden.

Bei Aufgabe 13) sollen die Schüler möglichst geschickt vorgehen.

Wegen $a = [2; 25^{\circ}]$ gilt $a^2 = [4; 50^{\circ}]$, wegen $b = [3; 210^{\circ}]$ und $d = [\frac{1}{3}; 50^{\circ}]$ gilt daher

$$\frac{a^2}{b \cdot d} = [4; -210^\circ] = [4; 150^\circ] = (-2 \cdot \sqrt{3}; 2)$$
.

Bei Aufgabe 14) erhält man durch einfache Rechnungen

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1)$$
;
 $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.

Folglich gilt $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, d.h.:

Das konjugiert Komplexe eines Produkts ist gleich dem Produkt der konjugiert Komplexen der Faktoren.

Die Schüler sollen untersuchen, ob ein analoger Satz auch für Summen gilt und welche diesbezüglichen Sätze für die Beträge komplexer Zahlen gelten.

Es gilt $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ und $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, aber $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ (Dreiecksungleichung).

Bei Aufgabe 15) ist die gesuchte geometrische Bedeutung von $|z_1 - z_2|$ der Abstand der zugehörigen Punkte in der Zahlenebene.

Nach Übersetzung in die Sprache der Geometrie (Transformationsprinzip) lautet die

 $Aufgabe\ 15d)$: Ermittle die Menge aller Punkte der Zahlenebene, deren Abstand vom Punkt a gleich r (mit r > 0) ist. Der gesuchte geometrische Ort ist offensichtlich der Kreis um a mit dem Radius r.

Analog erkennt man, daß bei Aufgabe 15g) der zu |z-a|=|z-b| gehörende geometrische Ort die Mittelsenkrechte der Strecke ist, deren Endpunkte zu a bzw. b gehören.

Bevor man sich mit Aufgabe 16) und dem Beweis der Sätze S(7), S(8) und S(9) beschäftigt, sollten die Schüler versuchen, einige Teilaufgaben der *Aufgabe 17*) selbständig zu lösen. Auf diese Weise besteht die Möglichkeit, daß sie den Fundamentalsatz als Vermutung selbst finden und auch das Prinzip zur Herleitung der Formel von MOIVRE selbst entdecken.

Der Satz S(7) über das Potenzieren komplexer Zahlen folgt unmittelbar aus D(5). Offensichtlich ist es zweckmäßig, auch beim Lösen der Gleichung $z = a^n$ die trigonometrische Form der Darstellung komplexer Zahlen zu wählen.

Zu ermitteln ist die Lösungsmenge der Gleichung

(1)
$$z^n = |a| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$
.

Nach S(5) läßt sich jede Lösung dieser Gleichung in folgender Form darstellen:

$$z = |z| \cdot (\cos \psi + i \cdot \sin \psi)$$
.

Nach S(7) gilt dann

2h)

(2) $z^n = |z|^{n} \cdot (\cos n\psi + i \cdot \sin n\psi)$. $|z|^n = |a| \text{ und } n \cdot \psi = \varphi + k \cdot 360^\circ$.

Aus (1),(2) folgt wegen D(3b)

 $|z| = \sqrt[n]{|a|}$ und $\psi = \frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{360^{\circ}}{n}$.

Hieraus folgt dann

Für k = 0. 1. ..., n-1 erhält man daher genau n verschiedene Lösungen der Gleichung (1), nämlich $z_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot \left[\cos(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{360^{\circ}}{n}) + i \cdot \sin(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{360^{\circ}}{n})\right] \text{ für } k = 0, 1, ..., n-1 .$

Die Aufgabe 16) sollte man mit einer zusammenfassenden Wiederholung des Merkstoffs zu "Komplexe Zahlen" verbinden. Beim Besprechen des Fundamentalsatzes der Algebra und der Kreisteilungsgleichungen sollte abermals die Rolle von GAUss hervorgehoben werden. Es gelang ihm bereits mit 17 Jahren, das klassische Problem der Konstruktion regulärer n-Ecke zu lösen und speziell zu zeigen, daß das reguläre 17-Eck allein mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. Dabei gilt als sicher, daß er diese Leistung mit Hilfsmitteln der Theorie der komplexen Zahlen erreichte, über die er bereits zu diesem Zeitpunkt in vollem Umfang verfügte.

Beim Lösen der *Aufgabe 17*) sollen die Schüler das Verfahren entdecken, wie man den Graphen der Lösungsmenge einer *Kreisteilungsgleichung* ermittelt. Zunächst bestimmt man die *"Fundamentallösung"* z_0 der Gleichung , die zu k=0 in der Formel von MOIVRE gehört. Dann zeichnet man den zu z_0 gehörenden Punkt sowie den Kreis um (0;0) mit dem Radius $|z_0|$, auf dem dieser Punkt liegt. Abschließend zeichnet man die restlichen (n-1) Punkte, die diesen Kreis in n gleiche Teile teilen.

Es wird vereinbart, die Lösungsmenge von $z^n=1$ mit L_n zu bezeichnen und die Lösungen "n-te Einheitswurzeln" zu nennen. Die Schüler sollen die Beziehungen $L_2 \subset L_4 \subset L_8 \subset \ldots$ und $L_3 \subset L_6 \subset \ldots$ entdecken. Mit leistungsstarken Schülern sollte man den in der AG Klasse 9 eingeführten Begriff "Gruppe" wiederholen und zeigen lassen, daß die n-ten Einheitswurzeln bezüglich der Multiplikation eine Gruppe bilden. Dabei sollte stets auf die graphische Deutung Wert gelegt werden.

In Aufgabe 18) wird verlangt, gegebene Polynome in Linearfaktoren zu zerlegen.

Da z^2 = -1 die Lösungsmenge L = { i; -i } besitzt, gilt z^2 + 1 = (z - i)(z + i) . Die Lösungsmengen, die bei den Aufgaben 18b), 18c) bzw. 18d) benötigt werden, wurden in den Aufgaben 17h), 17c) bzw. 17b) ermittelt. Bei Aufgabe 18d) muß zunächst wie folgt umgeformt werden: $2z^3 + (\sqrt{2}; -\sqrt{2}) = 2 \cdot [z^3 + (\frac{1}{2}\sqrt{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{2})]$.

Hier sollte man zusätzlich noch die "inverse" Aufgabe stellen, zu gegebenen Nullstellen das zugehörige Polynom zu ermitteln. Dabei kann man dann auch den Fall mehrfacher Nullstellen mit erfassen. Zu den vier Nullstellen $\{1; 1; i; -i\}$ gehört das folgende Polynom vierten Grades: $z^4 - 3z^3 + 3z^2 - 1 = (z - 1)^2 (z - i)(z + i)$. Bei der zugehörigen reellen Gleichung

 x^4 - $3x^3$ + $3x^2$ - 1 = 0 kann man mit Hilfe des Vietaschen Wurzelsatzes die ganzzahlige Lösung 1 ermitteln, erkennt aber nicht sofort, daß dies eine "doppelte" Lösung ist. Erst nach Abspaltung des zugehörigen Linearfaktors und Umformung der Gleichung in

 $(x^3 - x^2 - x + 1)(x - 1) = 0$ kann man analog erkennen, daß auch das auftretende Polynom dritten Grades die Nullstelle 1 besitzt und daß man daher den Linearfaktor (x - 1) nochmals abspalten kann, was dann zur Gleichung $(x^2 + 1)(x - 1)^2 = 0$ führt. Im Reellen ist eine weitere Faktorzerlegung nicht mehr möglich. Erst beim Übergang zu komplexen Zahlen erkennt man, daß diese Gleichung vierten Grades genau vier Lösungen besitzt.

Bei Aufgabe 19) sollen die Schüler das "Rechnen mit Pfeilen (als Repräsentanten von Vektoren)" wiederholen und lernen, wie man Pfeilen in der Zahlenebene komplexe Zahlen eindeutig zuordnen kann.

Zunächst werden in die Figur die zu den komplexen Zahlen z_1 und z_2 gehörenden Ortspfeile $\overline{OP_1}$ und $\overline{OP_2}$ eingezeichnet.

Dann wird abgeleitet, daß $\overline{P_1P_2} = z_2 - z_1$, allgemein $\overline{P_iP_k} = z_k - z_i$ gilt. Da $P_1P_2PP_3$ ein Parallelogramm ist, gilt $\overline{P_2P} = \overline{P_1P_3} = z_3 - z_1$.

Ferner gilt $\overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P} = (z_2 - z_1) + (z_3 - z_1) = -2z_1 + z_2 + z_3$.

Da im Parallelogramm der Diagonalenschnittpunkt S die Diagonalen halbiert, gilt $P_1S = \frac{1}{2}P_1P$, also $P_1S = -z_1 + \frac{1}{2}z_2 + \frac{1}{2}z_3$.

Bevor man sich der Anwendungsaufgabe 20) zuwendet, sollte man nochmals das *Transformationsprinzip* wiederholen und deutlichmachen, daß man eine planimetrische Aufgabe manchmal nicht nur in die Sprache der Vektorrechnung, sondern auch *in die Sprache der komplexen Zahlen übersetzen* kann.

Man sollte folgende tabellarische Übersicht mit den Schülern erarbeiten:

	Planimetrie	Vektorrechnung	komplexe Zahlen		
A B	ABQP ist ein Parallelo- gramm AB PQ und AB = PQ	AB = PQ (A ≠ P)	(b - a) = (q - p)		
P	ABQP ist ein Trapez AB PQ und AB = k·PQ	$\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{PQ}$ (k > 0)	(b - a) = k·(q - p) (k∈R)		
B 7	P∈AB und ĀP : ĀB = k : 1 A,B,P ∈ g	Ā₱=k·Ā₿	p = a + k(b - a) (k∈R)		
Q-B-P	$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$		(q - p) = i·(b - a)		

Die Aufgaben 20b) bis 20d) dienen der Anwendung des Transformationsprinzips. Zu diesem Zweck werden in Aufgabe 20a) den für die Lösung benötigten Pfeilen die zugehörigen komplexen Zahlen zugeordnet.

Wegen $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1} =$ = (c - a) + ?? muß man zunächst $\overrightarrow{CC_1}$ durch die gegebenen komplexen Zahlen a, b, c ausdrücken.

Da CBB_1C_1 ein Quadrat ist, geht der Pfeil CC_1 aus dem Pfeil CB durch eine (positive) 90°-Drehung hervor.

Dies halten wir durch

$$\overrightarrow{CC_1} = i \cdot \overrightarrow{CB} = i \cdot (b - c)$$
 fest.

Folglich gilt

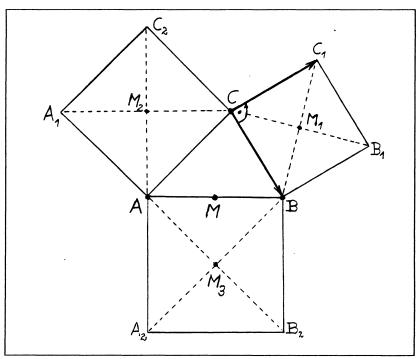
$$\overrightarrow{AC_1} = (c - a) + i \cdot (b - c)$$
.

Analog findet man

$$\frac{BC_2}{BC_1} = (c - b) + i \cdot (c - a)$$
 und $\frac{BC_1}{BC_1} = (c - b) + i \cdot (b - c)$.

Da M_1 der Diagonalenschnittpunkt des Quadrats CBB_1C_1 ist, gilt

$$\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC_1}$$



Folglich müssen wir zunächst $\overrightarrow{BC}_1 = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC}_1 = (c - b) + i \cdot (b - c)$ berechnen.

Hieraus erhält man dann $\overline{AM_1} = (b - a) + \frac{1}{2}[(c - b) + i \cdot (b - c)] = \frac{1}{2}[(-2a + b + c) + i \cdot (b - c)]$

Analog erhält man $\overline{BM_2} = \frac{1}{2}[(a - 2b + c) + i \cdot (c - a)]$ und $\overline{CM_3} = \frac{1}{2}[(a + b - 2c) + i \cdot (a - b)]$.

Ferner gilt laut Voraussetzung $\overline{MM_1} = \overline{MB} + \overline{BM_1} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC_1} = \frac{1}{2}\overline{AC_1}$. Da wir $\overline{AC_1}$ bereits berechnet haben, erhalten wir $\overline{MM_1} = \frac{1}{2}[(c - a) + i \cdot (b - c)]$.

Analog erhält man $\overline{MM_2} = \frac{1}{2}[(c - b) + i \cdot (c - a)]$.

Schließlich gilt $M_1M_2 = M_1M + MM_2 = MM_2 - MM_1 = \frac{1}{2}[(c - b) - (c - a) + i \cdot (c - a - b + c)]$, also $M_1M_2 = \frac{1}{2}[(a - b) + i \cdot (2c - a - b)]$.

Um Aufgabe 20b) zu lösen, übersetzen wir die Behauptungen aus der Sprache der Geometrie in die Sprache der komplexen Zahlen.

Die Strecken $\overrightarrow{AC_1}$ und $\overrightarrow{BC_2}$ wären gleich lang und würden aufeinander senkrecht stehen, wenn $\overrightarrow{BC_2}$ = i $\overrightarrow{AC_1}$ gelten würde.

Tatsächlich gilt i $\overrightarrow{AC_1}$ = i·(c - a) + i²·(b - c) = (c - b) + i·(c - a) = $\overrightarrow{BC_2}$. Analog überzeugt man sich, daß i· $\overrightarrow{MM_1}$ = $\overrightarrow{MM_2}$ uind i· $\overrightarrow{M_1M_2}$ = $\overrightarrow{CM_3}$ gilt.

Von höherem Schwierigkeitsgrad ist die Aufgabe 20c).

Wir legen die Figur so in die Zahlenebene, daß der Schnittpunkt O der Geraden AB_1 und BA_1 mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammenfällt und daß der Punkt C auf der imaginären Achse liegt.

Vor.:
$$AB_1 \cap BA_1 = \{ O \} = \{ (0;0) \} ;$$

(weitere Beziehungen vgl. Figur);

Beh.: O ∈ CH

Durch Rückwärtsarbeiten kann man erkennen, daß die Pfeile AB und OC aufeinander senkrecht stehen müßten, wenn O auf der Höhe CH liegen soll.

Diese hinreichende Feststellung übersetzen wir in die Sprache der komplexen Zahlen. Es müßte

 $\overrightarrow{AB} = r \cdot \overrightarrow{OC}$ gelten, was gleichbedeutend ist mit

(*)
$$(b - a) = r \cdot i \cdot c$$
,

wobei r eine reelle Zahl ist und a, b, c die den Punkten A, B, C zugeordneten komplexen Zahlen sind.

Durch Vorwärtsarbeiten gelangt man von der Vor-

aussetzung zu $O \in AB_1$ und $O \in BA_1$, was gleichbedeutend ist mit

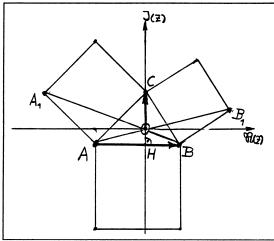
$$\overrightarrow{OB_1} = p \cdot \overrightarrow{OA}$$
 und $\overrightarrow{OA_1} = q \cdot \overrightarrow{OB}$, also mit den ableitbaren Feststellungen

(1)
$$b + i(b - c) = p \cdot a$$
 und (2) $a + i(c - a) = q \cdot b$ mit reellen Zahlen p, q.

Nun müssen wir versuchen, von (1) und (2) zur hinreichenden Feststellung (*) zu gelangen. Mit Blickrichtung auf (*) bietet sich die seitenweise Subtraktion von (1) und (2) nebst anschließendem Auflösen nach (b - a) an, in der Erwartung, daß dann auf der rechten Seite ein Vielfaches von i·c steht.

Seitenweise Subtraktion der beiden Gleichungen führt zu $(b - a) + i \cdot (a + b - 2c) = pa - qb$. Wie man sieht, führt dies jedoch nicht gleich ans Ziel.

Eine weitere Lösungsidee besteht darin, (1),(2) als Gleichungssystem mit den Variablen a, b aufzufassen und dieses Gleichungssystem nach a, b aufzulösen, d.h. zunächst einmal sowohl a als auch b durch c (oder sogar gleich durch i·c) auszudrücken und anschließend dann (b - a) zu berechnen.

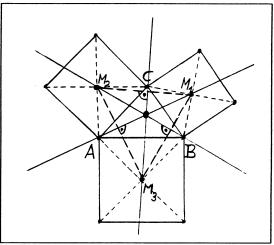


Es ist nicht zu erwarten, daß leistungsschwächere Schüler diese Umformungen selbst finden, und das ist bei dieser Aufgabe auch nicht entscheidend. Wesentlich ist nur, daß sie durch Rückwärtsarbeiten und Vorwärtsarbeiten verbunden mit dem Übersetzen in die Sprache der komplexen Zahlen zur hinreichenden Feststellung (*) und den ableitbaren Feststellungen (1), (2) gelangen und wissen, daß man durch geschickten Umgang mit Gleichungen von (1), (2) zu (*) gelangen kann.

Etwas leichter aber immer noch von relativ hohem Schwierigkeitsgrad ist die *Aufgabe 20d*).

Um den ersten Teil der Behauptung abzuleiten, empfiehlt sich das $R\ddot{u}ckw\ddot{a}rtsarbeiten$. Die Geraden AM_1 , BM_2 und CM_3 würden durch einen Punkt gehen, wenn sich zeigen ließe, daß es sich um Transversalen in einem Dreieck handelt, die diese Eigenschaft besitzen. Einer genauen Zeichnung ist zu entnehmen, daß diese Geraden vermutlich auf den Höhen des Dreiecks $M_1M_2M_3$ liegen.

Wie wir in Aufgabe 20b) gezeigt haben, gilt $CM_3 \perp M_1M_2$. Analog läßt sich zeigen, daß auch $AM_1 \perp M_2M_3$ und $BM_2 \perp M_1M_3$ gilt, womit dann das



oben genannte hinreichende Teilziel erreicht und damit ein Lösungplan gefunden ist.

Der zweite Teil der Behauptung läßt sich leicht durch Vorwärtsarbeiten erreichen, wenn man die Resultate der Aufgaben 20a) verwendet. Es gilt

 $\overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{BM_2} + \overrightarrow{CM_3} = \frac{1}{2}[(-2a+b+c) + i\cdot(b-c)] + \frac{1}{2}[(a-2b+c) + i\cdot(c-a)] + \frac{1}{2}[(a+b-2c) + i\cdot(a-b)] = (0;0),$ woraus dann $\overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{BM_2} + \overrightarrow{CM_3} = \overrightarrow{o}$ folgt, w.z.b.w.

3.2.3. Trigonometrie

In diesem Abschnitt geht es neben einer Wiederholung und Vertiefung des Unterrichtsstoffs vor allem darum, ein weiteres Beispiel für den deduktiven Aufbau mathematischer Theorien zu behandeln.

Ausgehend von der Definition der trigonometrischen Funktionen und der Regel für die Multiplikation komplexer Zahlen in trigonometrischer Darstellung werden die goniometrischen Formeln (1) bis (12) sowie die trigonometrischen Sätze (13) bis (16) abgeleitet.

Ein weiterer Schwerpunkt liegt auf der Anwendung dieser Formeln und Sätze beim Ermitteln der Lösungsmengen von Gleichungen und Ungleichungen sowie bei Lösen planimetrischer Beweis- und Bestimmungsaufgaben.

Minimalvariante:

- 5) Wiederholung der Definition der trigonometrischen Funktionen aus dem Unterrichtsstoff; geometrische Deutung durch Strecken am Einheitskreis.
- 1) Etappenweise Aneignung des Merkstoffs zu "Transformation von Funktionsgraphen" und zu "Einige Eigenschaften von Funktionen" unter Anleitung.
- 2a) bis d) Strecken, Stauchen und Superposition von Funktionsgraphen.
- 3) Graphische Methode zum Ermitteln der Anzahl der Lösungen einer goniometrischen Gleichung sowie von genauen Werten oder von Näherungswerten für diese Lösungen.
- Aneignung des Merkstoffs zu "Einige goniometrische Formeln" unter Anleitung; Ableitung einiger dieser Formeln; Graph des deduktiven Aufbaus.
- 7),10a,b) Anwendung der Additionstheoreme beim Berechnen von Funktionswerten; Wiederholung der "genauen Funktionswerte" trigonometrischer Funktionen; Übungen im Umformen von Termen mit Wurzeln.
- 11) Übungen zum Umformen von Termen beim Ermitteln von Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen.
- 12a)bis h) Anwendung von goniometrischen Formeln beim Lösen von goniometrischen Gleichungen.
- 14) Wiederholung der Methode indirekter Beweise.
- 19a) Wiederholung des Begriffs "periodisch"; Nachweis der Periodizität einer gegebenen Funktion.
- 20) Aneignung des Merkstoffs zu "Einige trigonometrische Sätze" unter Anleitung.
- 21).22) Ableitung des verallgemeinerten Sinussatzes und des Tangenssatzes.
- Wiederholung der Sätze über Berührungsradius, Tangentenabschnitte und Zentrale eines Tangentenpaars; Ableitung des Satzes (15b) über den Inkreisraius eines Dreiecks.
- 25) Ableitung der Heronischen Inhaltsformel aus der Formel (15c).
- Anwendung der angegebenen trigonometrischen Sätze auf das Berechnen von Inhalt, Inkreisradius, Umkreisradius und Höhenlänge eines durch seine Seitenlängen gegebenen Dreiecks.

Maximalvariante:

- 1),2),3),4) Selbständige Aneigung des Merkstoffs nebst Anwendung auf das graphische Lösen von goniometrischen Gleichungen
- 6),7),8) Selbständige Aneigung des Merkstoffs; Ableiten der goniometrischen Formeln; Anwendung auf das Vereinfachen von Termen.
- 9),10c) Wiederholung der Berechnung der Seitenlänge eines regulären Zehnecks; Anwendung auf das Berechnen der genauen Funktionswerte von cos36°, sin36° und tan36°.

- 12),13) Selbständiges Lösen von goniometrischen Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen.
- 14) bis 17) Selbständiges Lösen von Beweisaufgaben zu Eigenschaften von goniometrischen Termen, Gleichungen und Ungleichungen (direkte und indirekte Beweise).
- 18),19) Selbständiges Lösen von Aufgaben zur Periodizität von Funktionen.
- 20) bis 25) Selbständige Aneignung des Merkstoffs; Ableiten der angegebenen Sätze.
- 27) bis 31) Selbständiges Lösen von Beweisaufgaben über Eigenschaften von Dreiecken (direkte und indirekte Beweise).
- 32) Selbständiges Lösen einer Bestimmungsaufgabe über reguläre Fünfecke. An das selbständige Lösen der Aufgaben (wobei auch arbeitsteilig vorgegangen werden kann) schließt sich jeweils eine Kontrolle und eine gemeinsame Auswertung an, bei der gewonnene Erkenntnisse über den Einsatz heuristischer Vorgehensweisen im Vordergrund stehen.

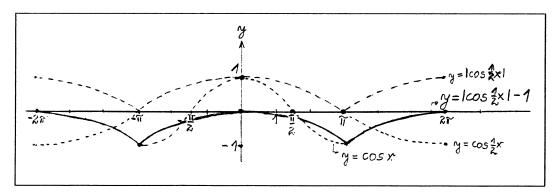
Im Zusammenhang mit einer *Wiederholung des Unterrichtsstoffs* (Definition von $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ am Einheitskreis; Definition von $\tan \varphi$ und $\cot \varphi$; Bogenmaß und Gradmaß nebst Umrechnung; Graphen dieser trigonometrischen Funktionen) behandle man *Aufgabe 5*), bei der erfahrungsgemäß die Deutung von $\tan \varphi$ als Länge einer Strecke, die auf einer Tangente an den Einheitskreis liegt, nicht allen Schülern bekannt ist.

Bei der in *Aufgabe 1)* geforderten Erarbeitung des Merkstoffs zu "*Transformation von Funktionsgraphen*" wurden die angegebenen Spiegelungen und Verschiebungen bereits in der AG Klasse 9 eingeführt. Neu sind lediglich die Dehnungen und Stauchungen von Funktionsgraphen.

Beim Erarbeiten des Merkstoffs "Einige Eigenschaften von Funktionen" wird man zunächst auf die Eigenschaften von Potenzfunktionen und deren geometrische Interpretation bei den zugehörigen Graphen eingehen. Hierbei kann man leicht sehen, wieso die Begriffe "gerade" bzw. "ungerade" für Eigenschaften von Funktionen gewählt wurden. Beim diesbezüglichwen Behandeln der trigonometrischen Funktionen wird man vor allem die hier neu aufgetretene Eigenschaft der Periodizität in den Vordergrund stellen.

Die Aufgabe 2) dient dem Üben im Transformieren von Funktionsgraphen. Mit leistungsstarken Schülern wird man auch das Transformieren der gegebenen Definitionsbereiche üben. Zunächst wird stets der Graph der zugehörigen "Grundfunktion" gezeichnet, wobei man stets die "charakteristischen Punkte" hervorhebt und zuerst transformiert, bevor man dann den Graph der transformierten Funktion zeichnet. Bei mehreren, nacheinander ausgeführten "Grundtransformationen" ist stets deren Reihenfolge von vornherein anzugeben und zu begründen.

Für Aufgabe 2b) wird dies durch folgende Figur demonstriert:



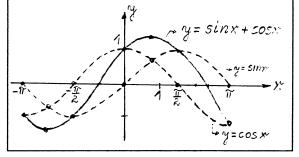
Da der Graph symmetrisch zur y-Achse ist, ist die zugehörige Funktion gerade. Ferner sollen die Schüler die hier vorkommenden Monotonieintervalle. die obere und die untere Schranke sowie die Nullstellen angeben.

Um Fehler aufzuspüren, sollte man stets mindestens eine "Stichprobe" durchführen. So stimmt z.B. der berechnete Funktionswert $f(0) = |\cos 0| - 1 = 1 - 1 = 0$ mit dem Funktionswert überein, den man der Figur entnimmt.

Bei Aufgabe 2c) wendet man die Methode der Superposition von Funktionsgraphen an. Neben den Extrema und Nullstellen spielen hier die Schnittpunkte der Graphen als "charakteristische Punkte" eine wichtige Rolle.

Einer genau gezeichneten Figur kann man die Vermutung entnehmen, daß

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cdot \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cdot \cos(x - \frac{\pi}{4})$$
 gilt. Leistungsstarke Schüler kann man sofort auffor-



dern, im "Merkstoff" nach denjenigen goniometrischen Formeln (nämlich den Additionstheoremen für sin(x + y) und cos(x + y)) zu suchen, mit deren Hilfe man diese Vermutung bestätigen kann.

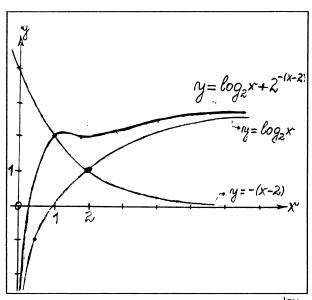
Bei Aufgabe 2d) erhält man durch Superposition der Graphen von $y = 2^x$ und $y = 2^x$ eine Kettenlinie. Die zugehörige Funktion ist gerade, nach unten beschränkt und besteht aus 2 Monotoniebögen.

Von höherem Schwierigkeitsgrad ist Aufgabe 2e). Dem durch Superposition gewonnenen Funktionsgraphen ist zu entnehmen, daß die zugehörige Funktion weder gerade noch ungerade und auch weder nach oben noch nach unten beschränkt ist.

Man wird entdecken und begründen lassen, daß sowohl für $x \to -0$ als auch für $x \to +\infty$ der Graph von $y = \log_2 x$ eine Asymptote des gesuchten Funktionsgraphen ist.

Eine Schwierigkeit liegt darin, daß man durch Superposition den Verlauf der Kurve im Intervall $\langle 1;2 \rangle$ nicht ermitteln kann. Man erkennt lediglich, daß f(1) = f(2) = 2 gilt.

Um die wahrscheinlich vorhandenen relativen Extrema zu ermitteln wird man daher hinreichend viele Funktionswerte aus diesem



Intervall mit dem ETR berechnen lassen. Hierzu wiederhole man die Beziehung $log_2x = \frac{lgx}{lg2}$ Auf diese Weise erhält man folgende Tabelle:

	COC VV													
X	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	
f(x)	1,99155	2,00000	2,00357	2,00413	2,00301	2,00115	1,99917	1,99758	1,99667	1,99670	1,99777	2,00000	2,00342	

Dieser Tabelle ist zu entnehmen, daß in der Umgebung von 1,2 ein relatives Maximum, in der Umgebung von 1,7 ein relatives Minimum existiert.

Bei Aufgabe 3) wird man zunächst nochmals wiederholen lassen:

Um eine Gleichung F(x) = 0 graphisch zu lösen, bringe man sie in eine Form f(x) = g(x), für die sich die Graphen von y = f(x) und y = g(x) möglichst einfach zeichnen lassen.

Beim Zeichnen der Funktionsgraphen spielen die "charakteristischen Punkte" (das sind häufig spezielle Gitterpunkte) eine wichtige Rolle.

Die Abszissen der Schnittpunkte dieser beiden Funktionsgraphen liefern die gesuchten Lösungen der Gleichung.

Die graphische Methode kann sichere Aussagen über die genaue Anzahl der Lösungen liefern. Manchmal gelingt es auch, "genaue" Lösungen abzulesen. In der Regel gewinnt man auf diese Weise jedoch nur Näherungslösungen.

Um den erforderlichen *Einzigkeitsnachweis* zu führen, weise man mit Hilfe der Monotonieeigenschaften der vorkommenden Funktionen nach, daß es außerhalb des betrachteten Ausschnitts des Koordinatensysstems keine weiteren Schnittpunkte geben kann.

Um (für vermutlich "genaue" Lösungen) den notwendigen Existenznachweis zu liefern, muß man stets eine Probe machen.

Bei $Aufgabe\ 3a)$ wird man zunächst die Nullstellen x=3k von $\sin\frac{\pi}{3}x$ ermitteln. Hieraus gewinnt man die charakteristischen Punkte (0,0), (3;0) und $(\frac{3}{2},4)$ von $y=4\cdot\sin\frac{\pi}{3}x$.

Als charakteristische Punkte von y = |6x - 5| eignen sich die Punkte $(0;5), (\frac{5}{6};0)$ und (1;1).

Wegen der Monotonieeigenschaften dieser beiden Funktionen besitzt unsere Gleichung genau zwei Lösungen.

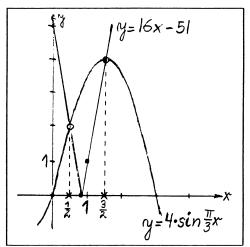
Wie man durch eine Probe leicht bestätigt, haben die beiden Schnittpunkte die Koordinaten $(\frac{1}{2};2)$ und $(\frac{3}{2};4)$. Folglich lautet die gesuchte Lösungsmenge $L = \{\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\}$.

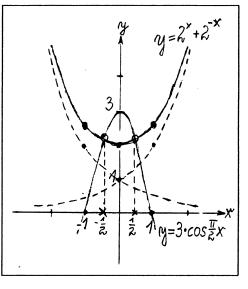
Bei Aufgabe $3d_1$) geht man von der gegebenen Gleichung zur Gleichung $3 \cdot \cos \frac{\pi}{2} x = 2^x + 2^{-x}$ über. Die durch

 $y = 3 \cdot \cos \frac{\pi}{2} x$ dargestellte Funktion besitzt die charakteristischen Punkte (-1;0), (0;3) und (1;0). Wie bereits in Aufgabe 2d) ermittelt wurde, besitzt die durch

 $y = 2^x + 2^{-x}$ dargestellte Funktion die charakteristischen Punkte (-1; 2,5), (0;2) und (1; 2,5). Offensichtlich existieren genau zwei Schnittpunkte, deren Abszissen vermutlich nur näherungsweise abgelesen werden können. Da beide betrachteten Funktionen gerade sind, müssen auch die Abszissen der Schnittpunkte symmetrisch zur y-Achse liegen.

Wenn man für den abgelesenen Näherungswert 0,5 mit Hilfe des ETR eine Probe macht, dann fällt auf, daß die Funktionswerte genau übereinstimmen. In der Tat gilt $3 \cdot \cos \frac{\pi}{2}$ 0,5 = $3 \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ und $2^{0.5} + 2^{-0.5} = \sqrt{2} + 1/\sqrt{2}$





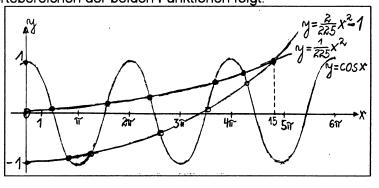
 $=\frac{3}{2}\sqrt{2}$. Also haben wir (was hier nicht zu erwarten war) die Lösungen sogar genau ermitteln können. Es gilt L = $\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}$.

Ersetzt man $y = 3 \cdot \cos \frac{\pi}{2}x$ durch $y = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{2}x$ bzw. durch $y = \cos \frac{\pi}{2}x$, dann erkennt man leicht, daß für *Aufgabe 3d*₂) L = { 0 } und für *Aufgabe 3 d*₃) L = 0 gilt. Die Lösungen der restlichen Aufgaben findet man in Abschnitt 4.

Bei Aufgabe 4) führt ebenfalls die graphische Lösungsmethode zu einem Lösungsplan.

Da beide betrachteten Funktionen gerade sind, reicht es aus, eine (zur y-Achse symmetrische) Parabel zu finden, die den Funktionsgraph von y = cosx in genau 5 Punkten schneidet. Es ist leicht zu erkennen, daß es unendlich viele Parabeln mit dieser Eigenschaft gibt. Aus den Monotonieeigenschaften und den Wertebereichen der beiden Funktionen folgt:

Wählt man in $y = f(x) = ax^2 + b$ eine Konstante mit $-1 \le b < 1$ und den Koeffizienten a dann so, daß f(15) = 1 gilt, dann hat die zugehörige Parabel mit dem Graphen von $y = \cos x$ genau 10 Schnittpunkte. Anstelle der Zahl 15 kann man auch eine andere Zahl zwischen 4π und 6π wählen. Zwei einfache Beispiele für eine derartige Funktion sind $y = \frac{1}{225}x^2$ oder $y = \frac{2}{225}x^2 - 1$.



Im Zusammenhang mit *Aufgabe 6*) führe man eine Wiederholung des Unterrichtsstoffs durch. Die Schüler sollen zeigen, wie man die speziellen Funktionswerte der trigonometrischen Funktionen für 0°. 30°. 45°. 60°, 90°, die Quadrantenbeziehungen sowie die Formeln

(1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ und (2) $\tan x \cdot \cot x = 1$ aus den Definitionen der trigonometrischen Funktionen ableitet. Als ein weiteres Beispiel für den deduktiven Aufbau einer mathematischen Theorie soll die Trigonometrie dienen

Dann bespreche man die im "Merkstoff" angegebenen goniometrischen Formeln (2) bis (12). Leistungsschwächere Schüler sollten die Gültigkeit der Formeln anhand speziell gewählter Funktionswerte überprüfen. Dies dient auch dem Einprägen der oben genannten Funktionswerte. Man mache darauf aufmerksam, daß es die Formeln (6a) bis (6d) auch gestatten, gewisse Produkte aus verschiedenen trigonometrischen Funktionen durch die Summe oder die Differenz einer trigonometrischen Funktion auszudrücken, was der Vereinfachung goniometrischer Terme dienen kann.

Um Aufgabe 6a) zu lösen, verwenden wir die von uns deduktiv aufgebaute Theorie der komplexen Zahlen.

Seien z_1 und z_2 zwei komplexe Zahlen mit $|z_1| = |z_2| = 1$.

Dann gilt nach S(5):

$$z_1 = \cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1$$

und
$$z_2 = \cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2$$
.

Da für komplexe Zahlen die bekannten Rechenregeln gelten und da laut S(1) $i^2 = -1$ gilt, erhält man $z_1 \cdot z_2 = [\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2] + i \cdot [\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2].$

Andererseits gilt nach D(5) $z_1 \cdot z_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$.

Nach D(3a) folgen hieraus (durch Vergleich von Realteil und Imaginärteil) die Additionstheoreme (3) und (4).

Analog lassen sich auch die Formeln (8), (8a) sowie (11a), (11b) ableiten.

Bei Aufgabe 6b) sollte man zunächst einen Grobplan erstellen und an der Wandtafel festhalten. Beim Ableiten der einzelnen Formeln kann man dann arbeitsteilig vorgehen.

Zunächst ist hervorzuheben, daß man in der Regel durch Substitutionen und Anwendung bereits abgeleitetete Regeln ans Ziel gelangt.

Durch die Substitution y := -y und die Quadrantenrelationen $\cos(-y) = \cos y$; $\sin(-y) = -\sin y$, die wir mit (Q) abkürzen wollen, gelangt man zu Formel (4a)

Analog kann man (4a) aus (4) ableiten. Dies halten wir abkürzend wie folgt fest:

$$(3),(4) \quad \underline{y} := -\underline{y} / (Q) \rightarrow (3a),(4a)$$

Der Grobplan zur Ableitung der restlichen Formeln sieht wie folgt aus:

```
(3), (4) Def. tan; Folgem aus der Behauptung (5) (2) (5a)

(4), (4a) +/- (6a), (6b) x+y:=u: x-y=v / u:=x: v:=y (7), (7a)

(3), (3a) +/- (6c), (6d) x+y:=u: x-y=v / u:=x: v:=y (7b), (7c)

(4) y:=x (8) (1); Def. tan; Folgern aus der Behauptung (8a)

(3) y:=x (9) (1) (9a), (9b)

(9) (1); Def. tan; Folgern aus der Behauptung (9c)

(5) y:=x (10) (2) (10a)

(4) y:=x: (8) \cdot (9) \cdot (1) (11a)

(3) y:=x: (8) \cdot (9) \cdot (1) (11b)

(9a) x:=x/2 (12b)
```

. ,

Einige dieser Ableitungen wollen wir hier betrachten.

(9b) x := x/2 (12a)

Ersetzt man in (5) den tanx bzw. tany laut Definition durch sinx und cosx bzw. durch siny und cosy, dann gelangt man durch Umformen zu $tan(x + y) = \frac{sinx \cdot cosy + cosx \cdot siny}{cosx \cdot cosy - sinx \cdot siny}$. Wegen (3)

und (4) folgt hieraus $tan(x + y) = \frac{sin(x + y)}{cos(x + y)}$. Durch Umkehren der Reihenfolge der Umformungen erhält man die gesuchte Ableitung.

Durch Einsetzen von (2) und Umformen gelangt man von (5) zu (5a).

Aus (4) und (4a) folgt durch beidseitige Addition sofort (6a). Die Substitution x + y := u, x - y := v ist äquivalent mit $x := \frac{u + v}{2}$, $y := \frac{u - v}{2}$. Aus (6a) folgt daher durch diese Substitution $\sin u + \sin v = 2 \cdot \sin \frac{u + v}{2} \cdot \cos \frac{u - v}{2}$. Durch die Substitution u := x, v := y erhält man hieraus dann die Formel (7).

Von (4) ausgehend führt die Substitution y := x sofort zu (8).

Die Formeln (7a), (7b), (7c) werden analog abgeleitet.

Um (8a) abzuleiten, geht man von der Behauptung aus, verwendet die Definition von tanx und formt um, wobei auch (1) benötigt wird. So erhält man

formt um, wobei auch (1) benötigt wird. So erhält man
$$\frac{2 \cdot \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2 \cdot \frac{\sin x}{\cos x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin 2x.$$

Die Substituion y := x führt von (3) unmittelbar zu (9), und die Ableitung von (9c) aus (9) verläuft analog wie die Ableitung von (8a) aus (8). Leicht ist die Ableitung von (9a) und (9b) aus (9) unter Verwendung von (1).

Problemlos ist auch die Ableitung von (10) aus (5) und die von (10a) aus (10).

Bei der Herleitung von (11a) sollte man folgende 2 Lösungswege besprechen und miteinander vergleichen:

```
Die Substitution y := 2x führt von (4) zu sin(x + 2x) = sinx \cdot cos2x + cosx \cdot sin2x; sin3x = sinx(cos^2x - sin^2x) + cosx \cdot 2 \cdot sinx \cdot cosx; [Einsetzen von (8), (9)]. sin3x = sinx \cdot cos^2x - sin^3x + 2 \cdot sinx \cdot cos^2x; [Umformung]. sin3x = 3 \cdot sinx \cdot cos^2x - sin^3x; [Umformung].
```

```
sin3x = 3 \cdot sinx(1 - sin^2x) - sin^3x; [Einsetzen von (1)]. sin3x = 3 \cdot sinx - 4 \cdot sin^3x; [Umformung].
```

Eine andere Ableitung verwendet das Rechnen mit komplexen Zahlen als Hilfsmittel. Wählt man speziell |z| = 1, dann gilt

```
z^3 = (\cos\phi + i \sin\phi)^3 = (\cos^3\phi - 3 \cdot \cos\phi \cdot \sin^2\phi) + i \cdot (3 \cdot \cos^2\phi \cdot \sin\phi - \sin^3\phi), wegen (1) also z^3 = (4 \cdot \cos^3\phi - 3 \cdot \cos\phi) + i \cdot (3 \cdot \sin\phi - 4 \cdot \sin^3\phi).
```

Ferner gilt $z^3 = \cos 3\varphi + i \cdot \sin 3\varphi$.

Durch Vergleich der Realteile und Imaginärteile erhält man hieraus die Formeln (11b) und (11a) und man erkennt, daß dieser Lösungsweg wesentlich kürzer und auch leichter zu finden ist wie der eingangs angegebene Lösungsweg.

Die Ableitung von (12b) aus (9a) und von (12a) aus (9b) bereitet keine Schwierigkeiten.

Recht leicht ist die Aufgabe 7) . Man gelangt durch Anwendung des Additionstheorems (4) und Kenntnis spezieller Funktionswerte wie folgt ans Ziel:

```
\sin \phi + \sin(\phi + 120^\circ) + \sin(\phi + 240^\circ) = \sin \phi + (\sin \phi \cdot \cos 120^\circ + \cos \phi \cdot \sin 120^\circ) + (\sin \phi \cdot \cos 240^\circ + \cos \phi \cdot \sin 240^\circ) = \sin \phi - \frac{1}{2} \sin \phi + \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \cos \phi - \frac{1}{2} \sin \phi - \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \cos \phi = 0
```

In *Aufgabe 8)* werden die abgeleiteten goniometrischen Formeln für das Vereinfachen von Termen verwendet. Dabei ist stets nach einem möglichst einfachen Lösungsweg zu suchen.

Bei *Aufgabe 8a*) führt der Einsatz von (7) und (8) sowie die Definition von cotx zum vereinfachten Term $\cot \frac{\alpha + \beta}{2}$.

Bei *Aufgabe 8b)* führen die Additionstheoreme (3) und (4) sowie die Kenntnis spezieller Funktionswerte zum vereinfachten Term $\cos \alpha$.

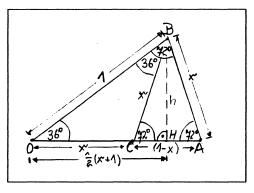
Bei Aufgabe 8c) liegt es nahe, ebenfalls die Additionstheoreme einzusetzen, was schließlich zum vereinfachten Term $\sqrt{2} \cdot \cos \alpha$ führt.

Es ist jedoch günstiger, Formel (7b) zu verwenden, was schneller ans Ziel führt: $\cos(\alpha + 45^\circ) + \cos(\alpha - 45^\circ) = 2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos 45^\circ = \sqrt{2} \cdot \cos\alpha$.

Aufgabe 9): Jedes reguläre Zehneck setzt sich aus 10 gleichschenkligen Dreiecken ABO mit einem Winkel von 36° an der Spitze und Basiswinkeln von 72° zusammen. Die Tatsache, daß 72 = 2·36 gilt, kann zur Idee führen, die Winkelhalbierende des Winkels ≮OBA einzuzeichnen, die OA in C schneiden möge.

Man erkennt leicht, daß die Dreiecke CAB und ABO ähnlich sind und daß $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CO} = x$ und $\overrightarrow{CA} = 1 - x$ gilt, wenn o.B.d.A $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} = 1$ angenommen wird.

Hieraus folgt dann (1 - x) : x = x : 1, also $x^2 + x - 1 = 0$, wegen x > 0 also $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.



An dieser Stelle sollte man die Problematik der elementaren Konstruktionen (allein mit Zirkel und Lineal), die algebraische Methode zum Lösen von Konstruktionsaufgaben und die klassischen Probleme der Würfelverdopplung, der Quadratur des Kreises, der Winkeldreiteilung und der Konstruktion regulärer n-Ecke wiederholen. Unser Ergebnis zeigt, daß sich reguläre Zehnecke und damit auch reguläre Fünfecke allein mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen.

Bei Aufgabe 10) sollte man wiederholen, daß die Menge der irrationalen Zahlen in die Teilmengen der algebraischen und der transzendenten Zahlen zerfällt, daß eine Zahl genau dann algebraisch heißt, wenn sie Lösung einer algebraischen Gleichung ist und daß transzendente Zahlen keine Lösungen einer algebraischen Gleichung sein können.

Unter den Funktionswerten von trigonometrischen Funktionen treten (relativ selten) ganze oder rationale Zahlen auf. Die meisten dieser Funktionswerte sind irrational.

Die in dieser Aufgabe zu berechnenden Funktionswerte sind algebraisch. Da nur Quadratwurzeln auftreten, sind sie sogar elementar konstruierbar.

Bei *Aufgabe 10a*) führen die Additionstheoreme zum Ziel. Es gilt $\sin 15^\circ = \sin (45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} (\sqrt{6} - \sqrt{2})$. Analog erhält man $\cos 15^\circ = \frac{1}{4} (\sqrt{6} + \sqrt{2})$.

Laut Definition und durch Umformung erhält man hieraus $tan15^{\circ} = 2 - \sqrt{3}$. Die Schüler sollten die Gültigkeit dieser Beziehungen m.H. des ETR nachprüfen.

Bei Aufgabe 10b) könnte man analog vorgehen. Wesentlich geschickter ist es, über die Beziehungen sin75° = cos15°, cos75° = sin15° und tan75° = cot15° = $2 + \sqrt{3}$ ans Ziel zu gelangen, wobei man Aufgabe 10a) als Hilfsaufgabe verwendet.

Bei Aufgabe 10c) wird die Aufgabe 9) als Hilfsaufgabe eingesetzt. Wegen $\overrightarrow{CH} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{OC} = x$ sowie $\overrightarrow{CA} = 1 - x$ gilt $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2} (x + 1)$, woraus wegen $x = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1)$

dann $\overline{AH} = \cos 36^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$ folgt.

CH = sin36° läßt sich dann mit Hilfe des Pythagoräischen Lehrsatzes oder der Formel (1) ermitteln, was dann die Berechnung von tan36° ermöglicht.

Man erhält $\sin 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\cdot\sqrt{5}}$ und $\tan 36^\circ = \frac{1}{4}\cdot(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{10 - 2\cdot\sqrt{5}})$.

Bei Aufgabe 11) sollen die Schüler die leeren Felder der Tabelle in einer geschickten Reihenfolge ausfüllen.

Zuerst lassen sich die Felder tan/cot und cot/tan fast ohne jede Rechnung mit Hilfe der goniometrischen Formel (2) ausfüllen. Dasselbe trifft für das Feld cos/sin zu, wenn man Formel (1) verwendet. Bei Verwendung des so gewonnenen Terms lassen sich die Felder tan/sin und cot/sin mit Hilfe der zugehörigen Definition leicht ausfüllen, und dasselbe trifft für die Felder tan/cos und cot/cos zu, wenn man den Term im Feld sin/cos verwendet.

Die ersten Schwierigkeiten treten beim Ausfüllen des Feldes sin/tan auf. Hier ist es zweckmäßig, vom bereits gefüllten Feld tan/sin auszugehen, dem man die Beziehung $tan\phi = tan/tan$

 $\frac{\sin\phi}{\sqrt{1-\sin^2\phi}}$ entnimmt. Löst man diese Gleichung nach $\sin\phi$ auf, dann erhält man $\sin\phi=\frac{\tan\phi}{\sqrt{1+\tan^2\phi}}$

und kann das Feld sin/tan ausfüllen. Beim Ausfüllen der noch leeren Felder sin/cot, cos/tan und cos/cot kann man analog vorgehen.

Die Resultate findet man in Abschnitt 4.

Beim Lösen der goniometrischen Gleichungen und Ungleichungen in *Aufgabe 12*) sollen die Schüler stets möglichst geschickt vorgehen und vor allem stets entscheiden, ob die graphische Methode nützlich sein kann. Wenn Umformungen nötig sind, dann sollte stets überlegt werden, welche der Formeln am besten geeignet ist. Da bei goniometrischen Gleichungen im allgemeinen nicht nur äquivalent umgeformt wird, ist in solchen Fällen der Existenznachweis in Form einer Probe nötig. Bei den Gleichungen sei der Lösungsgrundbereich $0^{\circ} \le x \le 360^{\circ}$, bei der Ungleichung $0 \le x \le 2\pi$.

Bei Aufgabe 12a) lohnt es, zunächst durch beidseitiges Wurzelziehen zur Gleichung

 $|\cos x| = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ überzugehen und diese Gleichung dann graphisch zu lösen.

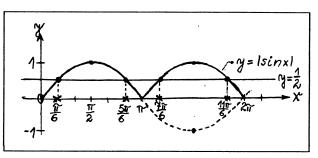
So erhält man L = { 30°; 150°, 210°; 330° }.

Eine Probe bestätigt die Richtigkeit.

Analog wird bei der Ungleichung in Aufgabe 12b) vorgegangen.

Nach dem Übergang zu $\frac{1}{2} \le |\sin x| \le 1$ kann man zunächst die zugehörige Gleichung graphisch lösen und anschließend die Lösungsmenge der Ungleichung ablesen.

Man erhält hier $\;L=\langle\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\rangle\cup\langle\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\rangle\;$.



Um in *Aufgabe 12c*) die Lösungsmenge von $\sin(2x + 10^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $0^\circ \le x \le 360^\circ$ zu ermitteln, wird man nicht das Additionstheorem (4), sondern die Definition der Funktion sin verwenden. So erhält man

Eine Probe bestätigt die Richtigkeit der Lösungen.

Bei Aufgabe 12d) gelingt es, mit Hilfe von Formel (1) den Term cos²x zu eliminieren, was zu der folgenden quadratischen Gleichung in sinx führt:

$$\sin^2 x + \frac{3}{2} \sin x - 1 = 0$$
.

Hieraus folgt $\sin x = \frac{1}{2}$ oder $\sin x = -2$.

Da der letztgenannte Fall wegen $\sin x \ge -1$ nicht eintreten kann, folgt hieraus

$$(x = 30^\circ + k \cdot 360^\circ \ \ oder \ \ x = 150^\circ + k \cdot 360^\circ) \ \ und \ \ 0^\circ \le x \le 360^\circ \, ,$$
 also
$$L = \{ \ 30^\circ ; \ 150^\circ \, \} \, .$$

Bei Aufgabe 12e) führt die Anwendung des Additionstheorems (3) in eine Sackgasse. Dafür bietet sich die Formel (7b) als Hilfsmittel an.

Wegen $\cos x + \cos(x + 60^\circ) = 2 \cos(x + 30^\circ) \cos 30^\circ = \sqrt{3} \cos(x + 30^\circ)$ ist die gegebene Gleichung äquivalent mit $\sqrt{3} \cos(x + 30^\circ) = \frac{3}{2}$. Das weitere Vorgehen gleicht dem in Aufgabe 12c) und führt zu $L = \{0^\circ, 300^\circ\}$

Bei Aufgabe 12f) führt wiederum das Additionstheorem nicht zum Ziel, wohl aber die Formel (6b). Man erhält $\cos x \cdot \sin(x - 30^\circ) = \frac{1}{2} [\sin(2x - 30^\circ) - \sin 30^\circ] = \frac{1}{2} \sin(2x - 30^\circ) - \frac{1}{4}$.

Folglich ist die gegebene Gleichung äquivalent mit $\frac{1}{2}$ sin(2x - 30°) - $\frac{1}{4}$ = $\frac{1}{4}$, also mit sin(2x - 30°) = 1. Dies führt zu L = { 60°; 240° }.

Die in Aufgabe 12g) gegebene Gleichung $\cos 2x + \cos x = 0$ läßt sich auf graphischem Weg lösen. Wenn man dies nicht erkennt, dann wird man durch Verwendung der Formel (9b) zur Gleichung $2\cos^2 x - 1 + \cos x = 0$ übergehen, die mit $(\cos x = -1 \text{ oder } \cos x = \frac{1}{2})$ äquivalent ist. Wegen $0^\circ \le x \le 360^\circ$ führt dies zu $L = \{60^\circ; 180^\circ; 300^\circ\}$.

Bei Aufgabe 12h) liegt es nahe, zunächst zur äquivalenten Gleichung $(\cos^2 x + \sin^2 x) - 4 \cdot \sin^2 x = 0$ und somit zu $4 \cdot \sin^2 x - 4 \cdot \sin x + 1 = (2 \cdot \sin x - 1)^2 = 0$ überzugehen, woraus dann $\sin x = \frac{1}{2}$ und somit L = $\{30^\circ, 150^\circ\}$ folgt.

Bei Aufgabe 12i) ist es zweckmäßig, die Formeln (8), (11a) und (1) zu verwenden und dann den so entstandenen Term in Faktoren zu zerlegen. Dies führt zu folgenden Umformungen:

```
\begin{split} & \sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0 \; ; \\ & \sin x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + 3 \cdot \sin x - 4 \cdot \sin^3 x = 0 \; ; \\ & \sin x \cdot (4 + 2 \cdot \cos x - 4 \cdot \sin^2 x) = 0 \; ; \\ & 2 \cdot \sin x \cdot [2 + \cos x - 2(1 - \cos^2 x)] = 0 \; ; \\ & 2 \cdot \sin x \cdot (2 \cdot \cos^2 x + \cos x) = 0 \; ; \\ & 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot (2 \cdot \cos x + 1) = 0 \; ; \\ & (\sin x = 0 \quad \text{oder} \quad \cos x = 0 \quad \text{oder} \quad \cos x = -\frac{1}{2}) \; \text{und} \quad 0^\circ \le x \le 360^\circ \; . \\ & L = \{ \, 0^\circ; \, 180^\circ; \, 360^\circ \, \} \, \cup \{ \, 90^\circ; \, 270^\circ \, \} \, \cup \{ \, 120^\circ; \, 140^\circ \, \} \; ; \\ & L = \{ \, 0^\circ; \, 90^\circ; \, 120^\circ; \, 180^\circ; \, 240^\circ; \, 270^\circ; \, 360^\circ \, \} \; . \end{split}
```

Bei der in *Aufgabe 12k*) gegebenen Gleichung sin2x - tanx = 0 kann man die Anzahl der Lösungen auf graphischem Weg ermitteln, und da die Schnittpunkte der beiden Kurven offensichtlich die Ordinaten 0, 1 oder -1 haben, könnte man auch die zugehörigen Abszissen ermitteln und so zur Lösungsmenge

```
L = { 0°; 45°; 135°; 180°; 225°; 315°; 360° } gelangen.
```

Durch Umformen kommt man wie folgt zum Ziel:

```
y=tan x y=sinx
-1 45° 30° 13° 25° 27° 35° 360°
```

```
 2 \cdot \sin x \cdot \cos x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0 ;   2 \cdot \sin x \cdot \cos^2 x - \sin x = 0 ;   \sin x \cdot (2 \cdot \cos^2 x - 1) = 0 ;   (\sin x = 0 \text{ oder } |\cos x| = \frac{1}{2} \sqrt{2} \text{ ) und } 0^\circ \le x \le 360^\circ ;   L = \{ \ 0^\circ; \ 180^\circ; \ 360^\circ \} \cup \{ \ 45^\circ; \ 135^\circ; \ 225^\circ; \ 315^\circ \} = \{ \ 0^\circ; \ 45^\circ; \ 135^\circ; \ 180^\circ; \ 225^\circ; \ 315^\circ; \ 360^\circ \}
```

Bei der in Aufgabe 13a) gegebenen Gleichung führt Umformen mit Hilfe einer goniometrischen Formel nicht ans Ziel. Betrachtet man dagegen die Wertebereiche der vorkommenden Terme, dann erkennt man, daß wegen

$$sin(x - y) + 1 \le 2$$
 und $2 \cdot cos(2x - y) + 1 \le 3$

die Gleichung nur dann Lösungen besitzen kann, wenn

$$\sin(x - y) = 1$$
 und $\cos(2x - y) = 1$

gilt. Da alle Paare (x;y) reeller Zahlen zu ermitteln sind, die die gegebene Gleichung erfüllen, müssen die Lösungen im Bogenmaß angegeben werden.

Folglich gilt $x - y = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$ und $2x - y = 2n\pi$, was äquivalent ist mit

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2(n - m)\pi$$
 und $y = -\pi + 2(n - 2m)\pi$.

Folglich gilt
$$L = \{ (x;y) \mid x = (2n - 2m - \frac{1}{2})\pi \text{ und } y = (2n - 4m - 1)\pi \}$$
.

Natürlich darf man hier nicht - wie dies von Schülern bisweilen getan wird - m = n = k setzen, weil dadurch Lösungen verlorengehen würden und der Einzigkeitsnachweis unkorrekt wäre.

Eine Probe bestätigt die Richtigkeit der Lösungen.

Bei Aufgabe 13b) liegt es nahe, durch Anwenden der goniometrischen Formel (7b) zum äquivalenten Gleichungssystem

$$cosx + cosy = 1$$
 und $cosx \cdot cosy = \frac{1}{4}$

überzugehen.

Nun sollten die Schüler erkennen, daß wegen der Vietaschen Wurzelsätze cosx und cosy die Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 - z + \frac{1}{4} = (z - \frac{1}{2})^2 = 0$ sind, daß also

$$\cos x = \frac{1}{2}$$
 und $\cos y = \frac{1}{2}$

und folglich $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2m\pi$ und $y = \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi$ gilt.

Man erhält also $L = \{ (x,y) \mid x = (2m \pm \frac{1}{3})\pi \text{ und } y = (2n \pm \frac{1}{3})\pi \}$.

Auch hier darf nicht m = n = k gesetzt werden, und auch hier ist eine Probe erforderlich.

Die Aufgaben 14) bis 18) sind Beweisaufgaben. Hier sollte man die Gelegenheit nützen, zusammenfassend auf heuristische Vorgehensweisen beim Finden von direkten oder indirekten Beweisen einzugehen.

Da bei Aufgabe 14) ein indirekter Beweis zu führen ist, wird man von der Gegenannahme sinx + cosx = 1,5 ausgehen und durch Umformen dieser Gleichung versuchen, zu einem Widerspruch zu gelangen.

Beidseitiges Quadrieren liegt nahe, weil dadurch der Term (sin²x + cos²x) entsteht, der sich durch 1 ersetzen läßt, was zu einer starken Vereinfachung der Gleichung führt.

So erhält man $\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 2,25$,

wegen Formel (1) und (8) also $1 + \sin 2x = 2,25$

sowie $\sin 2x = 1,25$,

was im Widerspruch zu $\sin 2x \le 1$ steht.

Um bei Aufgabe 15) nachzuweisen, daß sin10° eine Lösung der Gleichung $8x^3 - 6x + 1 = 0$ ist, wird man einen direkten Beweis führen. In Beantwortung der Hilfsmittelfrage beim VA/RA kann man auf die Idee kommen, daß die goniometrische Formel sin3x = $3 \cdot \sin x - 4 \cdot \sin^3 x$ ein brauchbares Hilfsmittel ist. Diese Formel liefert

$$sin30^\circ = 3\cdot sin10^\circ - 4\cdot sin^310^\circ \,,$$
 also
$$8\cdot sin^310^\circ - 6\cdot sin10^\circ + 2\cdot sin30^\circ = 0 \,,$$
 wegen
$$2\cdot sin30^\circ = 1 \, \text{ also } \, 8\cdot sin^310^\circ - 6\cdot sin10^\circ + 1 = 0 \,,$$
 w.z.b.w.

Da in *Aufgabe 16*) eine Ungleichheitsaussage zu beweisen ist, liegt es nahe, durch *Folgern aus der Behauptung* zu versuchen, zu einer vereinfachten Ungleichung zu gelangen, die von der Voraussetzung aus erreichbar ist und von der aus man die Behauptung ableiten kann. Durch Einsatz der Formeln (8), (11a) und (1) erhält man:

$$sinx + \frac{1}{2}sin2x + \frac{1}{3}sin3x
= sinx + \frac{1}{2}2sinx \cdot cosx + \frac{1}{3}(3sinx - 4sin^3x)
= sinx \cdot [1 + cosx + 1 - \frac{4}{3}sin^2x]
= sinx \cdot [2 + cosx - \frac{4}{3}(1 - cos^2x)]
= \frac{1}{3}sinx \cdot [4cos^2x + 3cosx + 2].$$

Da man die Umformungen auch in umgekehrter Richtung ausführen kann, ist nur noch zu zeigen:

Wenn
$$0 < x < \pi$$
, dann $\frac{1}{3} \sin x [4 \cos^2 x + 3 \cos x + 2] > 0$.

Für die Diskriminante des quadratischen Ausdrucks gilt $D = 3^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = -23$, also hat dieser Term keine reellen Nullstellen, und er ist wegen 4 > 0 stets positiv. Im angegebenen Intervall trifft dies aber auch für sinx zu.

Folglich ist im angegebenen Intervall auch das Produkt stets positiv, woraus durch Umformung unsere Behauptung folgt, w.z.b.w.

Bei der relativ schwierigen Aufgabe 17) führt ein analoges Vorgehen zum Ziel. Allerdings ist hier die Auswahl der Formeln, die zu einer geeigneten Vereinfachung der Behauptung führen, nicht so einfach zu finden. Es ist zu zeigen:

Wenn
$$x + y + z = \pi$$
, dann $\cos 2x + \cos 2y - \cos 2z \le \frac{3}{2}$.

Zunächst wird man feststellen, daß aus der Voraussetzung folgt, daß x, y, z die Innenwinkel eines Dreiecks sind. Diese ableitbare Feststellung bringt uns jedoch nicht weiter.

Wichtiger ist die Feststellung, daß man mit Hilfe der Voraussetzung die Variable z aus der Behauptung eliminieren kann, was zweifellos eine Vereinfachung bedeutet.

Es gilt $\cos 2z = \cos(2\pi - 2(x+y)) = \cos 2(x+y).$

Wegen (9b) folgt hieraus $\cos 2z = 2 \cos^2(x+y) - 1$.

Daß hier nicht eine der Formeln (9), (9a) oder (9c) eingesetzt wurde, ist einsichtig, weil dann ja außer cos noch sin oder tan auftauchen würde.

Der Versuch, nun auch auf cos2x und cos2y die Formel (9b) anzuwenden, führt in eine Sackgasse. Bei der Suche nach einer brauchbaren Formel kann man auf (7b) stoßen.

Es gilt $\cos 2x + \cos 2y = 2 \cdot \cos(x+y) \cdot \cos(x-y)$.

Folglich ist zu zeigen, daß $2 \cdot \cos(x+y) \cdot \cos(x-y) - 2 \cdot \cos^2(x+y) + 1 \le \frac{3}{2}$ gilt.

Das Vorkommen eines doppelten Produkts und eines Quadrats kann zur entscheidenden Lösungsidee führen, auf der linken Seite ein vollständiges Quadrat abzuspalten. Die so umgeformte Behauptung ist äquivalent mit

$$-2[\cos(x+y) - \frac{1}{2}\cos(x-y)]^2 + \frac{1}{2}\cos^2(x-y) + 1 \le \frac{3}{2}.$$

Da der erste Summand nicht positiv sein kann und da $\frac{1}{2}\cos^2(x-y) \le \frac{1}{2}$ gilt, folgt hieraus

$$\cos 2x + \cos 2y - \cos 2z \le 0 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$
,

womit ein Lösungsplan gefunden ist.

In der Lösungsdarstellung muß man natürlich von der Voraussetzung ausgehend die Behauptung ableiten, wobei jeder Beweisschritt zu begründen ist.

Der in *Aufgabe 18*) zu beweisende Satz dürfte den Schülern keinesfalls als selbstverständlich erscheinen. In Aufgabe 2c) haben sie festgestellt, daß die durch $f(x) = \sin x + \cos x$ dargestellte Funktion f periodisch ist, desgleichen erweist sich $f(x) = \cos 2x + \cos x$ als periodisch, u.s.w., so daß die Vermutung entstehen kann, daß man durch Superposition von periodischen Funktionen stets wieder eine periodische Funktion erhält. Nun wird aber behauptet, daß die durch $f(x) = \cos \sqrt{2}x + \cos x$ dargestellte Funktion nicht periodisch ist, weil $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist.

Der Inhalt des zu beweisenden Satzes wird klar, wenn man erkennt, daß die Periodenlänge der durch Superposition entstandenden Funktion das kleinste gemeinsame Vielfache der Periodenlängen der Funktionen ist, die überlagert wurden.

Da ein indirekter Beweis gefordert wird, liegt es nahe, die Behauptung mit Hilfe der Definition der Periodizität so umzuformulieren, daß eine negierte Existenzaussage entsteht. Die Gegenannahme ist dann eine Existenzaussage, aus der ein Widerspruch zur Voraussetzung abzuleiten ist.

Vor.: a ist eine irrationale Zahl;

Beh.: $f(x) = \cos ax + \cos x$ ist nicht periodisch,

d.h. es gibt kein $t \neq 0$, so daß für alle x gilt: f(x+t) = f(x).

GA: Es gibt ein $t \neq 0$, so daß für alle x gilt: cosa(x+t) + cos(x+t) = cosax + cosx.

Wenn man zeigen kann, daß es ein spezielles x gibt, für das diese Eigenschaft nicht zutrifft, dann ist man am Ziel. Dieser Nachweis gelingt z.B. für den speziellen Wert x = 0. Beweis (indirekt):

GA \Rightarrow (1) Es gibt ein t, so daß für x = 0 gilt: cosat + cost = cos0 + cos0 = 2;

- (1) \Rightarrow (2) Es gibt ein t, so daß cosat = 1 und cost = 1; [weil cosx \leq 1].
- (2) \Rightarrow (3) Es gibt ein t, so daß at = $2m\pi$ und t = $2n\pi$ mit m,n \in Z; [Eigenschaft von cos]

(3)
$$\Rightarrow$$
 (4) $a = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in Z$; [Umformung].
(4), Vor. \Rightarrow \not ; [Definition "irrationale Zahl"].

Von recht hohem Schwierigkeitsgrad ist die *Aufgabe 19*). Man kann den Schwierigkeitsgrad senken, indem man die *Entscheidungsaufgabe* in eine Beweisaufgabe umwandelt, d.h. wenn man den Schülern verrät, daß f_1 eine periodische Funktion , f_2 dagegen keine periodische Funktion ist.

Bei Aufgabe 19a) muß man also ein $t \neq 0$ finden, so daß für alle x die Beziehung $f_1(x+t) = f_1(t)$ gilt. Dies wäre der Fall, wenn diese Beziehung sowohl für den Zähler als auch für den Nenner des Bruchs gelten würde.

Man müßte also ein t finden, für das $\sin[(x+t)\sqrt{2}] = \sin(x\sqrt{2})$ gilt. $t = \pi \cdot \sqrt{2}$ leistet das Gewünschte, weil $\sin[(x+\pi \cdot \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}] = \sin[x \cdot \sqrt{2} + 2\pi] = \sin(x \cdot \sqrt{2})$.

Desgleichen gilt für den Nenner $1 + \sin^2[(x + \pi \cdot \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}] = 1 + \sin^2[x \cdot \sqrt{2} + 2\pi] = 1 + \sin^2(x\sqrt{2})$. Damit ist der geforderte Nachweis erbracht.

Bei *Aufgabe 19b*) wird man in Analogie zu Aufgabe 18) versuchen, einen indirekten Beweis zu führen. Die dort verwendete Idee, speziell für x = 0 nachzuweisen, daß es kein $t \neq 0$ geben kann, für das $f_2(x+t) = f_2(x)$ gilt, führt auch hier zum Ziel, allerdings ist der Widerspruch zur Irrationaliät von $\sqrt{2}$ nicht ganz so einfach abzuleiten.

Angenommen, f_2 wäre periodisch. dann gäbe es eine reelle Zahl $t \neq 0$ so, daß für alle reellen x die Gleichung $f_2(x+t) = f_2(x)$ gelten würde. Daraus folgte $f_2(t) = f_2(0)$, also sint = 0, also gäbe es eine ganze Zahl m mit $t = m\pi$, wobei $m = \frac{t}{\pi} \neq 0$ wäre.

Weiter folgte
$$f_2(\pi \cdot \sqrt{2} + 2m\pi) = f_2(\pi \cdot \sqrt{2})$$
 d.h. $\frac{\sin(\pi \cdot \sqrt{2})}{1 + \sin^2(2m\pi \cdot \sqrt{2})} = \sin(\pi \cdot \sqrt{2})$,

wegen $\sin(\pi \cdot \sqrt{2}) \neq 0$ also $1 = 1 + \sin^2(2m\pi \cdot \sqrt{2})$ und daher $\sin(2m\pi \cdot \sqrt{2}) = 0$.

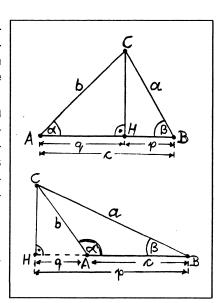
Folglich gäbe es eine ganze Zahl n mit $2m\pi \cdot \sqrt{2} = n\pi$, also $\sqrt{2} = \frac{n}{2m}$ im Widerspruch gegen die Irrationalität von $\sqrt{2}$.

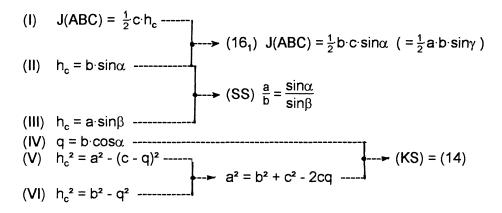
Damit ist bewiesen, daß f₂ nicht periodisch ist.

Bevor man in *Aufgabe 20*) den Merkstoff zu "Einige trigonometrische Sätze" durcharbeiten läßt, wiederhole man den einschlägigen Unterrichtsstoff einschließlich der Beweise für den einfachen Sinussatz (SS), den Kosinussatz (14) und die trigonometrische Inhaltsformel (16₁).

Auch in diesem Abschnitt steht wieder der deduktive Aufbau einer mathematischen Theorie im Vordergrund. Es ist hervorzuheben, daß bei diesen drei Beweisen stets eine Fallunterscheidung bezüglich der Art des betrachteten Dreiecks (spitzwinklig, rechtwinklig, stumpfwinklig) erforderlich ist, wobei wir uns hier auf den Fall "spitzwinklige Dreiecke" beschränken wollen.

Unser Ausgangspunkt sind die Definitionen von sin und cos, die Inhaltsformel für Dreiecke sowie der Satz des Pythagoras. Der Graph des deduktiven Aufbaus läßt sich wie folgt festhalten:





Bevor man die trigonometrischen Sätze herleiten läßt, sollte man mit Aufgabe 27) auf deren Anwendungen eingehen, wo ein Dreieck mit a = 5, b = 6, c = 7 betrachtet wird.

Die Schüler sollen entscheiden, in welcher Reihenfolge die gesuchten Größen J, r, R und h aus den gegebenen Größen a, b, c am geschicktesten hergeleitet werden können und welche Hilfsgrößen man dabei berechnen muß. Dabei stellen wir die zusätzliche Forderung, daß jede der gesuchten Größen durch die gegebenen Größen stets genau, d.h. durch Verwendung von Wurzeln (und nicht näherungsweise durch trigonometrische Funktionswerte) ausgedrückt werden soll.

Um J zu berechnen, werden wir die Heronische Inhaltsformel (16₄) verwenden. Aus a, b, c wird zunächst u = 18, hieraus dann p = 9, p - a = 4, p - b = 3, p - c = 2 berechnet, was dann zu $J = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 6 \cdot \sqrt{6}$ führt.

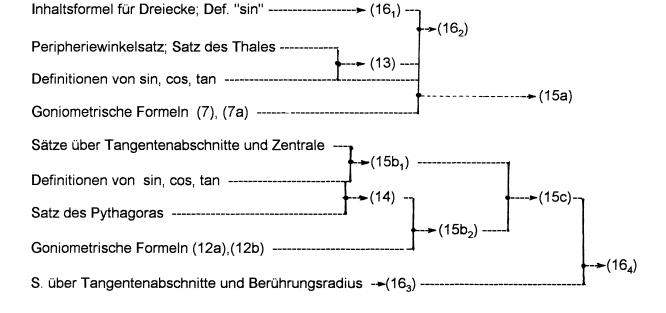
Hieraus erhält man m.H. von (16₃) sofort $6 \cdot \sqrt{6} = r \cdot 9$, also $r = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{6}$.

Wegen $J = \frac{1}{2}7 \cdot h = 6 \cdot \sqrt{6}$ gilt dann $h = \frac{12}{7} \cdot \sqrt{6}$.

Nun ist es günstig, zunächst siny mit Hilfe von (16₁) als Hilfsgröße zu berechnen. Wegen $J = \frac{1}{2}5.6 \cdot \sin \gamma = 6.\sqrt{6}$ erhält man $\sin \gamma = \frac{2}{5}.\sqrt{6}$.

Wegen (13) gilt dann $2 \cdot R \cdot \sin \gamma = 7$, woraus $R = \frac{35}{24} \cdot \sqrt{6}$ folgt.

Die angegebenen trigonometrischen Sätze lassen sich wie folgt ableiten:



Leistungsschwächeren Schülern sollte man diesen *Graph des deduktiven Aufbaus* vorgeben, was eine starke Senkung des Schwierigkeitsgrades der nachfolgenden Beweisaufgaben bedeutet. Leistungsstarke Schüler sollten ohne diese Hilfe auskommen

Um in $Aufgabe\ 21)$ den verallgemeinerter Sinussatz abzuleiten, betrachten wir ein Dreieck ABC mit seinem Umkreis k(M;R).

Sei C' der Schnittpunkt des Umkreises mit dem Strahl \overrightarrow{AM} . Dann gilt \overrightarrow{AC} = 2R , und nach dem Satz des Thales gilt \checkmark ABC' = 90°.

Für γ < 90° gilt nach dem Peripheriewinkelsatz \ll AC'B = γ , laut Definition also sin γ = c : 2R .

Für γ > 90° gilt nach dem Sehnenvierecksatz

$$\angle AC'B = 180^{\circ} - \gamma$$
, folglich $\sin(180^{\circ} - \gamma) = \sin \gamma = a : 2R$.

Für
$$\gamma = 90^{\circ}$$
 wird $c = 2R$, also $\sin 90^{\circ} = c : 2R = 1$.

Die anderen beiden Teile des verallgemeinerten Sinussatzes ergeben sich durch Vertauschung der Bezeichnungen .

Wegen $a = 2R \cdot \sin \alpha$ und $b = 2R \cdot \sin \beta$ und den goniometrischen Formeln (7) und (7a) gilt

$$a + b = 2R(\sin\alpha + \sin\beta) = 4R \cdot \sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

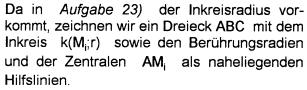
und

$$a - b = 2R(\sin\alpha - \sin\beta) = 4R \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

woraus durch Umformung und Verwendung der Definition von tan der Tangenssatz folgt:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Damit ist Aufgabe 22) gelöst.



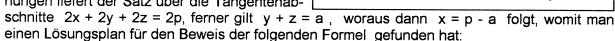
Da die Zentrale den Winkel α halbiert und $\mathbf{M_i}\mathbf{T_c}$ auf AB senkrecht steht, gilt im Dreieck

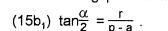
$$AT_cM_i$$
 $tan\frac{\alpha}{2} = r : \overline{AT_c}$.

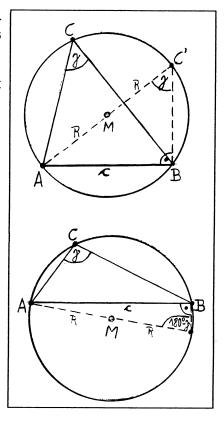
Durch $R\ddot{u}ckw\ddot{a}rtsarbeiten$ gelangt man zum hinreichenden Teilziel \overrightarrow{AT}_c = p - a , wobei

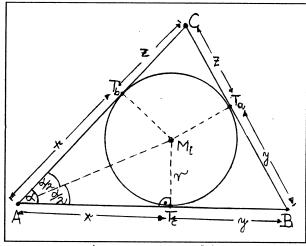
u = 2p gilt.

Mit den der Figur zu entnehmenden Bezeichnungen liefert der Satz über die Tangentenab-









Die Formel (15b₂) sollte man nur mit leistungsstarken Schülern ableiten.

Bei Verwendung der Formeln (12a) und (12b) erkennt man, daß sich $\tan \frac{\alpha}{2}$ berechnen ließe,

wenn man $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$ und $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$ durch a, b, c, p ausdrücken könnte.

Nach dem Kosinussatz gilt $\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. Durch Umformen läßt sich zeigen, daß hieraus $\frac{1-\cos\alpha}{2}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}$ und $\frac{1+\cos\alpha}{2}=\frac{p(p-a)}{bc}$ folgt .

Folglich gilt.
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$
 und $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$, woraus dann $(15b_2)$ $\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ folgt.

Aus (15b₁) und (15b₂) folgt $r = (p - a) \cdot \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{p(p - a)}} = \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)(p - c)}{p}}$. Damit ist Formel (15c) abgeleitet und *Aufgabe 24*) gelöst.

Nach Formel (16₁) gilt $J(ABC) = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin \gamma$, nach Formel (13) gilt $a = 2 \cdot R \cdot \sin \alpha$ und $b = 2 \cdot R \cdot \sin \beta$.

Hieraus erhält man durch Einsetzen und Umformen die Formel (16_2) : $J(ABC) = 2 \cdot R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$. Damit ist *Aufgabe 25*) gelöst.

Für ein Dreieck ABC mit dem Inkreis k(M₁;r) gilt

$$J(ABC) = J(ABM_i) + J(BCM_i) + J(ACM_i) = \frac{1}{2}c \cdot r + \frac{1}{2}a \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r = \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot r$$
, also Formel (16₃): $J(ABC) = p \cdot r$.

Hieraus und aus (15c) folgt dann $J(ABC) = p \cdot \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ Damit ist die Heronische Inhaltsformel abgeleitet und die *Aufgabe 26*) gelöst.

Bei Aufgabe 28) sollte man zunächst vermuten lassen, daß in keinem Dreieck die angegebene Beziehung gelten kann.

Dann lasse man die Beweisaufgaben 29) bis 32) durchlesen und entscheiden, bei welchen dieser Aufgaben ein direkter bzw. ein indirekter Beweis angemessen ist. Es wird wiederholt, daß negierte Existenzaussagen meist indirekt bewiesen werden, Allaussagen dagegen direkt. Bei allen diesen Aufgaben ist die Suche nach geeigneten Hilfsmitteln entscheidend.

Bei der Suche nach einem indirekten Beweis in Aufgabe 28) erweist sich der verallgemeinerte Sinussatz als das geeignete Hilfsmittel.

Aus der Gegenannahme $\sin\alpha + \sin\beta = \sin\gamma$ folgt nach dem verallgemeinerten Sinussatz $\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} = \frac{c}{2R}$, also a + b = c, im Widerspruch zur Dreiecksungleichung.

Bei der Suche nach einem direkten Beweis in Aufgabe 29) erweist sich der Kosinussatz als geeignetes Hilfsmittel.

Es gilt
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$
,
 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$,
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$,
also $bc \cdot \cos \alpha + ac \cdot \cos \beta + ab \cdot \cos \gamma = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) > 0$.

also $pc \cdot \cos \alpha + ac \cdot \cos \beta + ab \cdot \cos \gamma = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$

Nach Division durch abc erhält man hieraus

$$\frac{\cos\alpha}{a} \,+\, \frac{\cos\beta}{b} \,+ \frac{\cos\gamma}{c} \,> 0 \ , \ w.z.b.w.$$

Von höherem Schwierigkeitsgrad ist die Aufgabe 30).

Aus der Gegenannahme (a + b) $\cos \gamma + c = 0$ folgt $\cos \gamma = -\frac{c}{a+b}$.

Dies kann auf den Kosinussatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$ als Hilfsmittel hinweisen. Durch Einsetzen gewinnt man hieraus $c^2 = a^2 + b^2 + \frac{2abc}{a+b}$

Die entscheidende Lösungsidee besteht darin, wieder c = a + b als Widerspruch anzusteuern. Man faßt daher obige Gleichung als quadratische Gleichung in c auf und hofft, daß c = a + b die einzige positive Lösung dieser Gleichung ist.

Tatsächlich besitzt die Gleichung $c^2 - \frac{2ab}{a+b}c - (a^2+b^2) = 0$ die Lösungen $c_1 = a+b$ sowie $c_2 = -\frac{a^2+b^2}{a+b}$, wie man mit Hilfe der Vietaschen Wurzelsätze erraten und nachweisen kann, denn es gilt $c_1 \cdot c_2 = -(a^2 + b^2)$ und $c_1 + c_2 = \frac{2ab}{a+b}$

Damit ist ein Widerspruch gefunden, und man ist am Ziel.

Bei Aufgabe 31) bietet sich die trigonometrische Inhaltsformel als naheliegendes Hilfsmittel

Aus $J = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \gamma$ und $J = \frac{1}{2}ac \cdot \sin \beta$ und $J = \frac{1}{2}bc \cdot \sin \alpha$ folgt $J^3 = \frac{1}{8}a^2b^2c^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$.

Wegen $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma<1$ folgt hieraus $J^3<\frac{1}{8}a^2b^2c^2$ und daher $J<\frac{1}{2}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$, w.z.b.w.

Bei Aufgabe 32) besteht die entscheidende Lösungsidee darin, die in der Behauptung vorkommenden Größen durch a, b, c auszudrücken in der Hoffung, durch ein derartiges Folgern aus der Behauptung zu einer allgemeingültigen oder zu einer ableitbaren Feststellung zu ge-

Aus u = a + b + c und $J = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha$ und $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$ folgt $J = \frac{abc}{4R}$, also $\frac{1}{R \cdot J} = \frac{4}{abc}$.

Folglich gilt $\frac{u^3}{R \cdot J} = \frac{4(a+b+c)^3}{abc}$. Es würde $\frac{u^3}{R \cdot J} \ge 108$ gelten, wenn $\frac{4(a+b+c)^3}{abc} \ge 108$ gelten würde. Dies ist aber gleichbedeutend mit $(a + b + c)^3 \ge 27abc$.

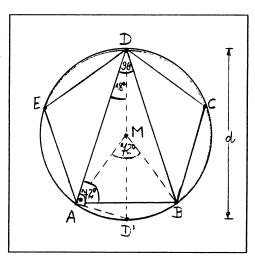
Diese hinreichende Feststellung erweist sich als ableitbar. Nach dem Satz über das arithmetische und das geometrische Mittel gilt für positive Zahlen a, b, c stets

 $\frac{a+b+c}{2} \ge \sqrt[3]{abc}$. Damit haben wir einen Beweisplan gefunden.

Bei Aufgabe 33) gibt es verschiedene Lösungswege. Die Schüler sollten diese Aufgabe selbständig lösen und anschließend über die angewendeten Lösungsstrategien diskutieren.

Nach dem Zeichnen einer Planfigur (in der die gestrichelten Hilfslinien noch nicht enthalten sind) kann man in Befolgung des Rückführungsprinzips nach bereits gelösten Aufgaben suchen, die sich als Hilfsaufgaben eignen könnten. Aufgaben über reguläre Fünfecke wurden in der AG9 gelöst, und auch die Aufgabe 9) dieses Abschnitts , in der die Seitenlänge eines regulären Zehnecks in Abhängigkeit vom Umkreisdurchmesser ermittelt wird, könnte nützliche Informationen liefern.

Es liegt nahe, die Radien MA und MB als Hilfslinien



einzuzeichnen und durch *Vorwärtsarbeiten* ∢ BMA = 72° und ∢ BDA = 36° zu berechnen. Vielleicht kommt man schon hier auf die Idee, den Durchmesser DD als nützliche Hilfslinie einzuführen.

Beim anschließenden *Rückwärtsarbeiten* sollte man zunächst die *Hilfsmittelfrage* stellen. Es bieten sich folgende drei Hilfsmittel an:

- (I) $J(\overrightarrow{ABD}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} \cdot \sin 36^{\circ}$, wegen $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$ also $J(\overrightarrow{ABD}) = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD^{2}} \cdot \sin 36^{\circ}$;
- (II) $J(ABD) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DH}$, was zum Einzeichnen des Hilfspunkts H führt, der auf dem Durchmesser \overrightarrow{DD} liegt;
- (III) J(ABD) = J(ABM) + J(BDM) + J(MDA) mit $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{DM} = \frac{1}{2} \cdot d$.

Beim 1.Lösungsweg ist man auf die hinreichende Hilfsgröße AD gestoßen. Spätestens jetzt muß man die Hilfslinien DD' und AD' finden, um zu erkennen, daß ∢D'AD = 90° (nach dem Satz des Thales) sowie ∢ADD' = 18° (aus Symmetriegründen) gilt, woraus dann folgt, daß ĀD = d·cos18° gilt.

Hieraus folgt dann (I) $J(ABD) = \frac{1}{2} \cos^2 18^\circ \sin 36^\circ d^2$.

Beim 2.Lösungsweg ist man auf die hinreichenden Hilfsgrößen \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{DH} gestoßen, wobei $\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{AH}$ gilt.

Dies führt weiterhin zur hinreichenden Hilfsgröße ≪BAD = ≪HAD = 72° oder zur hinreichenden Hilfsgröße ≪BDA = ≪HDA = 18°, wobei man als Hilfsmittel die Definition von sin und cos im rechtwinkligen Dreieck DAH verwendet.

Man erhält $\overrightarrow{AH} = \cos 72^{\circ} \overrightarrow{AD} = \sin 18^{\circ} \overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{DH} = \sin 72^{\circ} \overrightarrow{AD} = \cos 18^{\circ} \overrightarrow{AD}$.

Hieraus folgt $J(ABD) = \cos 72^{\circ} \cdot \sin 72^{\circ} \cdot \overrightarrow{AD}^{2} = \sin 18^{\circ} \cdot \cos 18^{\circ} \cdot \overrightarrow{AD}^{2}$.

Wegen $\overrightarrow{AD} = d \cdot \cos 18^{\circ}$ folgt hieraus dann

(II) $J(ABD) = sin18^{\circ} \cdot cos^{3}18^{\circ} \cdot d^{2}$.

Beim 3.Lösungsweg ist man auf die hinreichenden Hilfsgrößen J(ABM), J(AMD) und J(BMD) gestoßen, wobei J(AMB) = J(BMD) gilt.

Weiteres Rückwärtsarbeiten führt zur trigonometrischen Inhaltsformel als Hilfsmittel und damit zu den hinreichenden Hilfsgrößen ≪AMB = 72° und ≪AMD = ≪BMD = 144°.

Es gilt $J(ABM) = \frac{1}{2} \frac{1}{4} d^2 \cdot \sin 72^\circ$ und $2 \cdot J(AMD) = \frac{1}{4} d^2 \cdot \sin 144^\circ = \frac{1}{4} d^2 \cdot \sin 36^\circ$.

Hieraus folgt (III) $J(ABD) = \frac{1}{8} (\sin 72^{\circ} + 2 \cdot \sin 36^{\circ}) \cdot d^{2}$.

Um Rechenfehler aufzuspüren, empfiehlt es sich, für den Inhalt mit dem ETR einen Näherungswert zu berechnen und an einer genau gezeichneten Figur (mit günstig gewähltem d) nachzuprüfen, ob das erhaltene Resultat stimmen kann.

Man erhält bei allen drei Lösungswegen J(ABD) ≈ 0,266 d².

Man kann auch noch die Aufgabe stellen, zu untersuchen, ob sich der Inhalt mit Hilfe von Wurzeln genau ausdrücken läßt.

Da wir in Aufgabe 10c) bereits $\cos 36^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$ und $\sin 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}$ berechnet haben, wird man mit Hilfe von Formel (12a) $\cos^2 18^\circ = \frac{1}{2}(1+\cos 36^\circ) = \frac{1}{8}(5+\sqrt{5})$ berechnen, woraus man dann mit Hilfe von (I) durch einige Umformungen zu

$$J(ABD) = \frac{1}{28}(5 + \sqrt{5}) \cdot \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2 \cdot \sqrt{5}} \cdot d^2 = \frac{1}{32}\sqrt{10(5 + \sqrt{5})} \cdot d^2 \text{ gelangt.}$$

Auch hier wird man mit dem ETR einen Näherungswert berechnen; wie erwartet erhält man wiederum $J(ABD) \approx 0,266 \cdot d^2$.

Bei der Auswertung wird man feststellen, daß der 1. und der 3.Lösungsweg etwas günstiger sind als der 2.Lösungsweg.

3.3. Zahlentheorie

Dieses Stoffgebiet dient nur zur Wiederholung, es wird hier kein neuen Stoff vermittelt. Die Bestimmungsaufgaben 1) bis 8), die Beweisaufgaben 9a) bis 9f) und die Entscheidungsaufgaben 10a) bis 10e) sind jeweils nach dem Schwierigkeitsgrad geordnet. Wir wollen daher hier auf die Angabe einer Minimalvariante und einer Maximalvariante verzichten und beschränken uns auf die Angabe möglicher

Ziele:

Heuristische Vorgehensweisen

- Einführen geschickter Bezeichnungen (Variablen); Beziehungen durch Gleichungen festhalten
- Vorwärtsarbeiten und Rückwärtsarbeiten beim Lösen von Beweis- und Bestimmungsaufgaben
- Transformationsprinzip (Übersetzen in die Sprache der Kongruenzen)
- Rückführungsprinzip (Suche nach und Rückführung auf Hilfsaufgaben)
- Untersuchung spezieller Fälle, um zu Vermutungen zu kommen, die man dann beweist

Logische Grundlagen

- Einzigkeitsnachweis und Existenznachweis beim Lösen von Bestimmungsaufgaben
- Direkte Beweise, indirekte Beweise und Angabe von Beispielen zum Beweisen oder Widerlegen von All- oder Existenzaussagen
- Prinzip der vollständigen Fallunterscheidung

Sachkenntnisse und Fertigkeiten

- Binomische Formeln und höhere Potenzen von Binomen
- Diskriminante von quadratischen Termen
- Fermatsche Zahlen; pythagoräische Zahlentripel
- Äguivalentes Umformen von Termen und Gleichungen
- Ermitteln von Nullstellen von Polynomen mit Hilfe der Vietaschen Wurzelsätze; Abspalten von Linearfaktoren durch Partialdivision

Setzt man in Aufgabe 1) a = x, dann gilt laut Aufgabenstellung b = x + 1, c = x + 2 sowie d = x + 3 und die Gleichung $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$ geht über in

$$3x^3 + 9x^2 + 15x + 9 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

Nach Umformung, Erraten einer ganzzahligen Lösung m.H. des *Vietaschen Wurzelsatzes* sowie Abspalten des zugehörigen Linearfaktors erhält man hieraus

$$2x^3 - 12x - 18 = 2(x - 3)(x^2 + 3x + 3) = 0$$

Die Diskriminante des quadratischen Terms ist D = 9 - 12 = -3 < 0, folglich ist x = 3 die einzige reelle Lösung dieser Gleichung dritten Grades.

Daher kann nur das Quadrupel (a;b;c;d) = (3;4;5;6) die gegebene Gleichung erfüllen. Eine *Probe* zeigt, daß tatsächlich $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ gilt.

Um in Aufgabe 2) alle Paare (x;y) aus ganzen Zahlen zu ermitteln, die die Gleichung $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ erfüllen, ist es günstig, diese Gleichung durch äquivalentes Umformen in die Form $y = 2 + \frac{4}{x-2}$ zu bringen.

Wenn y eine ganze Zahl sein soll, dann muß (x-2) ein Teiler von 4 sein, d.h. es muß

 $(x-2) \in \{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 4\}$ und folglich $x \in \{-2, 0, 1, 3, 4, 6\}$ gelten. Für x = 0 ist $\frac{1}{x}$ nicht definiert. Berechnet man für die anderen x die zugehörigen y, dann erkennt man, daß nur folgende Paare (x,y) die gestellten Bedingungen erfüllen können : (-2,1), (1,-2), (3,6), (4,4), (6,3).

Eine Probe bestätigt, daß diese Paare tatsächlich alle gestellten Bedingungen erfüllen.

Folglich gilt $L = \{ (-2;1), (1;-2), (3;6), (4;4), (6;3) \}$.

Ein weniger effektiver Lösungsweg besteht darin, die Lösungen aus obiger Gleichung durch systematisches Probieren zu ermitteln. Auch andere Formen der Gleichung eignen sich für ein derartiges Vorgehen, etwa die Form (x - 2)(y - 2) = 4.

Bei Aufgabe 3) führt das Betrachten des Bruchs $\frac{n-1}{n^2+1}$ für die speziellen Fälle n=2,3,4,5 sofort zur Erkenntnis, daß für ungerades n sowohl der Zähler als auch der Nenner gerade werden und der Bruch daher in diesen Fällen stets durch 2 gekürzt werden kann. Ferner kann man so zu der Vermutung gelangen, daß dieser Bruch für alle geraden n nicht gekürzt werden kann.

Ein besonders eleganter 1. Lösungsweg nützt die Tatsache aus, daß dieser Bruch genau dann gekürzt werden kann, wenn dies für seinen Kehrwert zutrifft.

Durch Partialdivision erhält man $\frac{n^2+1}{n-1}=n+1+\frac{2}{n-1}$. Unser Bruch läßt sich daher genau dann kürzen bzw. nicht kürzen, wenn dies für den Bruch $\frac{2}{n-1}$ zutrifft. Wie man leicht erkennt, ist dies genau dann der Fall, wenn n eine ungerade Zahl ist und n>1 gilt.

In einem 2.Lösungsweg wird das Rechnen mit Kongruenzen als Hilfsmittel eingesetzt. Wenn k (>1) der gemeinsame Faktor von Zähler und Nenner des gegebenen Bruches ist, durch den gekürzt werden kann, dann gilt

$$n - 1 \equiv 0$$
 (k), also $n \equiv 1$ (k) und somit (1) $n^2 \equiv 1$ (k),

sowie $n^2 + 1 \equiv 0$ (k), also (2) $n^2 \equiv -1$ (k).

Aus (1) und (2) folgt $1 \equiv -1$ (k), woraus dann k = 2 folgt. Also kann unser Bruch höchstens durch 2 gekürzt werden wa

Also kann unser Bruch höchstens durch 2 gekürzt werden, was nur für ungerade n der Fall ist. Damit ist der geforderte Nachweis erbracht.

Ein 3. Lösungsweg führt etwas ungeschickter zum Ziel, wenn man auf das Rechnen mit Kongruenzen verzichtet und statt dessen mit Gleichungen arbeitet.

Von n - 1 = k·r und n² + 1 = k·s mit k,r,s \in N und k > 1 ausgehend gelangt man durch Umformung zu k·r² + 2r + $\frac{2}{k}$ = s . Da diese Gleichung außer dem Bruch nur ganze Zahlen enthält, kann sie nur dann erfüllt werden, wenn k = 2 und damit n = 2k+1 gilt.

Vergleichsweise kompliziert ist auch der folgende 4. Lösungsweg:

Wir knüpfen an die eingangs gefundene *Fallunterscheidung* " n ungerade oder n gerade (mit n>1) " an. Den erstgenannten Fall hatten wir bereits erledigt. Im zweitgenannten Fall sind Zähler und Nenner ungerade, also der Bruch mit Sicherheit nicht durch 2 kürzbar.

Nun wird durch einen *indirekten Beweis* nachgewiesen, daß es keinen gemeinsamen Primfaktor p von Zähler und Nenner geben kann, für den p > 2 gilt.

Der Bruch $\frac{n-1}{n^2+1}$ läßt sich in unserem Fall in der Form $\frac{2m-1}{4m^2+1}$ darstellen.

Ist p ein Primfaktor von (2m-1), dann ist p auch ein Primfaktor von $(2m-1)^2 = 4m^2-4m+1$; dann ist die Differenz von $(4m^2+1)$ und von $(4m^2-4m+1)$ durch p teilbar, weil beide Terme durch p teilbar sind.

Da sich diese Differenz zu 4m vereinfachen läßt, ist p ein Teiler von m; d.h. p teilt 2n und damit auch n.

Andererseits ist p ein Teiler des Zählers (n - 1). Als Teiler von n und (n - 1) müßte p auch deren Differenz, also 1 teilen. Dies ist aber wegen p > 2 nicht möglich.

Damit ist die Annahme widerlegt, daß es einen gemeinsamen Primfaktor von Zähler und Nenner gibt.

Bei Aufgabe 4) wird man zunächst durch Probieren auf die Lösung (x;y) = (1;1) stoßen, die die Primzahl p = 5 liefert. Weitere Lösungen sind durch Probieren nicht zu ermitteln.

Die Hilfsmittelfrage beim RA kann zur Idee führen, den Term in Faktoren zu zerlegen, um auf diese Weise zunächst alle derartigen Primzahlen p zu ermitteln.

Das Anwenden der binomischen Formeln führt zu

 $p = x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 = [(x^2 + 2y^2) + 2xy] \cdot [(x^2 + 2y^2) - 2xy] = [(x + y)^2 + y^2] \cdot [(x - y)^2 + y^2]$. Die Zahl p kann nur dann Primzahl sein, wenn der kleinere der beiden Faktoren die Zahl 1 ist, wenn also $(x - y)^2 + y^2 = 1$ gilt. Dies ist jedoch genau dann der Fall, wenn x = y = 1 gilt. Folglich ist die oben angegebene Lösung die einzige Lösung, und es gilt $L = \{(1,1)\}$

Im Zusammenhang mit Aufgabe 5) sollte man folgendes wiederholen:

Die Zahlen der Form $F(n) = 2^{2^n} + 1$ heißen Fermatsche Zahlen. FERMAT äußerte die falsche Vermutung, daß alle diese Zahlen Primzahlen seien. EULER hat diese Vermutung widerlegt, indem er zeigte, daß 641|F(5) gilt. Man vermutet sogar, daß es nur folgende fünf Fermatschen Primzahlen gibt (während alle anderen Fermatschen Zahlen keine Primzahlen sind):

$$F(0) = 3$$
, $F(1) = 5$, $F(2) = 17$, $F(3) = 257$, $F(4) = 65537$.

GAUSS hat bewiesen, daß genau diejenigen regulären p-Ecke allein mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind, bei denen die Primzahl p eine Fermatsche Primzahl ist.

Durch Anwendung einer binomischen Formel erhält man

$$2^{256} - 1 = (2^{128} + 1)(2^{128} - 1) = (2^{128} + 1)(2^{64} + 1)(2^{64} - 1) = \dots = F(4) \cdot F(3) \cdot F(2) \cdot F(1) \cdot F(0)$$
. Damit sind nicht nur 4, sondern sogar 5 Primfaktoren von $(2^{256} - 1)$ ermittelt.

Bei Aufgabe 6) liegt es nahe, $x = \frac{p}{q}$ mit teilerfremden $p,q \in Z$ und q > 0 zu setzen, so daß

die gegebene Bedingung in die Form $(\frac{p}{q})^2 + \frac{p}{q} + 6 = n^2$ mit $n \in \mathbb{N}$ gebracht werden kann.

Diese Gleichung ist äquivalent mit $p^2 = q \cdot (-p - 6q + n^2q)$, und aus dieser Gleichung folgt, daß p^2 durch q teilbar ist. Wäre q durch eine Primzahl teilbar, so müßte diese folglich in p^2 und damit in p enthalten sein, im Widerspruch zu der vorausgesetzen Teilerfremdheit. Daher gilt q = 1 und man erkennt: Wenn eine rationale Zahl x die gestellte Bedingung erfüllt, dann muß diese Zahl sogar eine ganze Zahl p sein, und es muß gelten:

(*)
$$p^2 + p + 6 = n^2$$
.

Mit Hilfe der *graphischen Methode* kann man feststellen, daß es höchstens zwei verschiedene ganze Zahlen p geben kann, die diese Bedingung erfüllen. Der Graph von $y = p^2 + p + 6$ mit $p \in Z$ ist eine Menge von Punkten, die auf der zu $y = x^2 + x + 6$ mit $x \in R$ gehörenden nach oben offenen Parabel liegt. Analog erkennt man, daß die zu $y = n^2$ gehörenden Punkte auf der "Normalparabel" liegen . Da diese beiden Parabeln höchstens zwei Punkte gemeinsam haben können, ist unsere obige Behauptung abgeleitet, und man kann versuchen, die beiden Lösungen p = 5 und p = -6 zu erraten, wobei man (nach einer entsprechenden Probe) am Ziel wäre.

Man kann aber auch durch folgende *geschickte Umformungen* ans Ziel gelangen: Die Gleichung (*) ist äquivalent mit

$$(p + \frac{1}{2})^2 = n^2 - \frac{23}{4}$$
,
 $23 = 4n^2 - (2p + 1)^2$,
 $23 = (2n - 2p - 1)(2n + 2p + 1)$.

Damit ist die Primzahl 23 in zwei ganzzahlige Faktoren zerlegt, deren Summe eine nichtnegative Zahl, nämlich 4n , ist. Folglich scheidet von den beiden einzigen ganzzahligen Zerlegungen $23 = 1.23 = (-1)\cdot(-23)$ die zweite aus, und es gilt

entweder 2n - 2p - 1 = 1 und 2n + 2p + 1 = 23oder 2n - 2p - 1 = 23 und 2n + 2p + 1 = 1

Im ersten Fall folgt n-p=1 und n+p=11 und daraus p=5, im zweiten Fall folgt n-p=12 und n+p=0 und daraus p=-6.

Folglich können nur die Zahlen x = 5 oder x = -6 die gestellte Bedingung erfüllen.

Tatsächlich ist sowohl 25 + 5 + 6 = 36 als auch 36 - 6 + 6 = 36 das Quadrat einer natürlichen Zahl.

In Aufgabe 7) gelangt man durch Betrachtung der Definitionsbereiche und der Wertebereiche der vorkommenden Terme zunächst zur Feststellung

```
(1) 0 \le x \le 1985 und 0 \le y \le 1985.
```

Relativ leicht zu erkennen sind die "trivialen" Lösungen (0;1985) und (1985;0). Um nachzuweisen, daß keine weiteren Lösungen existieren, sind einige nicht ganz einfach zu findende *Umformungen* nötig.

Die gegebene Gleichung ist äquivalent mit

$$\sqrt{y} = \sqrt{1985} - \sqrt{x} ,$$

$$y = 1985 - 2 \cdot \sqrt{1985x} + x ,$$

$$2 \cdot \sqrt{1985x} = 1985 + x - y ,$$

$$(2) \quad 4 \cdot 1985x = (1985 + x - y)^{2} .$$

Wegen der Primfaktorzerlegung 1985 = 5·397 und da 4·1985x nach (2) eine Quadratzahl ist, muß x durch die Primfaktoren 5 und 397 jeweils in ungerader, also von 0 verschiedener Potenz teilbar und somit durch 1985 teilbar sein.

Wegen (1) ist dies nur möglich für x = 0 oder x = 1985, wozu die Werte y = 1985 bzw. y = 0 gehören.

Eine *Probe* bestätigt die Richtigkeit der Lösungen.

Als relativ leicht erweist sich die in *Aufgabe 8*) enthaltene zweite Teilaufgabe, die letzte Ziffer von 3^{100} zu ermitteln. Derartige Aufgaben wurden in der AG Klasse 8 gelöst, wo das *Rechnen mit Kongruenzen als Hilfsmittel* eingeführt wurde. Wegen $3^{2n} \equiv 1$ (10) und 100 = 4·25 endet diese Zahl auf eine 1.

Das Ermitteln der Anzahl der Ziffern dieser Zahl dürfte den Schülern schwerer fallen. Entscheidend ist hier die Erkenntnis, daß das *Rechnen mit Logarithmen* wohl das einzige *Hilfsmittel* ist, das hier zum Ziel führt.

Aus lg3 = 0,4771 folgt $3 = 10^{0,4771}$ sowie $3^{100} = 10^{477,1}$, woraus dann folgt, daß die Zahl 3^{100} genau 478 Ziffern besitzt.

In Aufgabe 9) sind 6 Beweisaufgaben zusammengefaßt.

Bei der relativ leichten *Aufgabe 9a)* sollten sich die Schüler durch *Betrachten einiger spezieller Fälle* zunächst überzeugen, daß die Summe der Quadrate zweier unmittelbar aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen bei Division durch 3 tatsächlich nur die Reste 1 oder 2 bzw. die absolut kleinsten Reste 1 und -1 läßt.

Hier liegt es nahe, durch ein Übersetzen in die Sprache der Kongruenzen verbunden mit einer Fallunterscheidung ans Ziel zu gelangen.

```
Vor.: s = n^2 + (n+1)^2 mit n \in \mathbb{N};
Beh.: 3 \uparrow s.
Beweis:
Stets gilt n \equiv 0 (3) oder n \equiv 1 (3) oder n \equiv -1 (3) , folglich s \equiv 0 + 1 \equiv 1 (3) oder s \equiv 1 + 4 \equiv 2 (3) oder s \equiv 1 + 0 \equiv 1 (3),
```

woraus folgt, daß stets $s \neq 0$ (3) und damit 3 \uparrow s folgt, w.z.b.w.

Bei Aufgabe 9b) sollte man hervorheben, daß beim Festhalten von Voraussetzungen und Behauptung eines zu beweisenden Satzes oft eine geschickte Formulierung eine entscheidende Rolle spielt.

Die Schüler neigen dazu, drei aufeinanderfolgende Zahlen in der Form n, n+1, n+2 darzustellen. Für die durchzuführenden Umformungen ist die Darstellung durch n-1, n, n+1 jedoch wesentlich günstiger.

```
Vor.: s = (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 mit n \in \mathbb{N}; Beh.: 9|s.
```

Beim Vorwärtsarbeiten gelangt man durch Umformen zu $s = 3n(n^2 + 2)$.

Durch Rückwärtsarbeiten erkennt man dann, daß sich unsere Behauptung aus der hinreichenden Feststellung 3|n(n² + 2) ableiten ließe.

Auf diese Weise sind wir auf die *Hilfsaufgabe* gestoßen, nachzuweisen, daß stets 3|n(n² + 2) gilt.

Diese Hilfsaufgabe läßt sich wiederum durch eine Fallunterscheidung sowie das Übersetzen in die Sprache der Kongruenzen lösen.

Bei Aufgabe 9c) spielen geschickte Termumformungen die entscheidende Rolle. In einem 1.Lösungsweg kommt man durch geschicktes Ausklammern zum Ziel. Es gilt

```
z = a^5 + 3a^4b - 5a^3b^2 - 15a^2b^3 + 4ab^4 + 12b^5
= a \cdot (a^4 - 5a^2b^2 + 4b^4) + 3b \cdot (a^4 - 5a^2b^2 + 4b^4)
= (a + 3b)(a^4 - 5a^2b^2 + 4b^4)
= (a + 3b)(a^2 - b^2)(a^2 - 4b^2)
= (a + 3b)(a - b)(a + b)(a - 2b)(a + 2b),
also (1) z = (a - 2b)(a - b)(a + b)(a + 2b)(a + 3b).
```

Damit ist gezeigt, daß sich z als Produkt aus fünf ganzen Zahlen darstellen läßt, von denen keine zwei einander gleich sind,

Bei einem 2.Lösungsweg geht man nach Division durch b^5 und der Substitution $\frac{D}{a} = u$ zum Term ($u^5 + 3u^4 - 5u^3 - 15u^2 + 4u + 12$) über. Nach dem *Vietaschen Wurzelsatz* kann dieser Term als ganzzahlige Nullstellen nur ± 1 , ± 2 , ± 3 , ± 4 , ± 6 , ± 12 besitzen. Wie man leicht nachprüft, besitzt dieser Term 5.Grades die fünf ganzzahligen Nullstellen ± 1 , ± 2 , -3. Durch Rücksubstitution erhält man hieraus die Gleichung (1).

Der geforderte Beweis ist bereits erbracht, wenn man die Gleichung (1) angibt und durch Ausmultiplizieren nachweist, daß dieser Term dem gegebenen Term äquivalent ist.

Von einem höheren Schwierigkeitsgrad ist die Aufgabe 9d).

Nach Klärung des Begriffs "pythagoräisches Zahlentripel" wird man zunächst nach einem speziellen Beispiel suchen. Wegen 3² + 4² = 5² läßt sich das Zahlenpaar (3;4) von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen durch die Zahl 5 zu einem pythagoräischen Zahlentripel ergänzen.

Dies legt es nahe, allgemein nach natürlichen Zahlen x zu suchen, für die $x^2 + (x+1)^2 = z^2$ mit einer natürlichen Zahl z gilt. Diese naheliegende Lösungsidee führt jedoch in eine Sackgasse.

Entscheidend ist die Erkenntnis, daß durch obige Gleichung auch gezeigt ist, daß sich das Paar (4;5) durch die Zahl 3 zu einem pythagoräischen Zahlentripel ergänzen läßt. Das spezielle Beispiel $5^2 + 12^2 = 13^2$ ist von demselben Typ.

Also wird man nach natürlichen Zahlen x suchen, für die mit einer gewissen natürlichen Zahl $n \ge 1$ die folgende Gleichung gilt:

$$x^2 + (x + n)^2 = (x + n + 1)^2$$

Dies führt zur quadratischen Gleichung x² - 2x - 2n - 1 = 0 mit der positiven Lösung

$$x = 1 + \sqrt{2(1+n)}$$
.

Da x eine natürliche Zahl sein soll, muß $n + 1 = 2z^2$ gelten, woraus dann

$$x = 1 + 2z$$
 und $n = 2z^2 - 1$ mit $z = 1, 2, 3, ...$

folgt.

Wie man sich leicht überzeugt, gilt tatsächlich

$$(1 + 2z)^2 + (2z + 2z^2)^2 = (1 + 2z + 2z^2)^2$$

Damit ist gezeigt, daß es unendlich viele Paare (2z²+2z; 2z²+2z+1) von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gibt, die sich durch die natürliche Zahl (2z+1) zu einem pythagoräischen Zahlentripel ergänzen lassen.

Da nach Aufgabenstellung ein Einzigkeitsnachweis nicht gefordert ist, reicht die Angabe der letzten Gleichung nebst Probe für eine vollständige Lösung aus.

Bei Aufgabe 9e) ist es günstig, durch das Betrachten spezieller Beispiele zu einer Vermutung zu gelangen, wie diese Summe aus drei Quadratzahlen aussehen kann.

Man erkennt sofort, daß nicht für alle natürlichen Zahlen n die Zahl (3n+1) eine Quadratzahl ist, und daß auch nicht alle Quadratzahlen sich in der Form (3n+1) darstellen lassen.

Die erhaltenen Resultate kann man wie folgt in einer Tabelle festhalten:

n	m² = 3n + 1	n + 1	Darstellung als Summe dreier Quadrate
0	1 = 12	1	$0^2 + 0^2 + 1^2$
1	4 = 2 ²	2	$1^2 + 1^2 + 0^2$
5	16 = 4²	6	$1^2 + 1^2 + 2^2$
8	$25 = 5^2$	9	$2^2 + 2^2 + 1^2$
16	49 = 7 ²	17	$2^2 + 2^2 + 3^2$

Dieser Tabelle ist folgende Vermutung zu entnehmen:

Es gilt
$$n + 1 = a^2 + a^2 + (a+1)^2$$
 oder $n + 1 = a^2 + a^2 + (a-1)^2$

sowie
$$(a + a + (a+1))^2 = 3n + 1$$
 oder $(a + a + (a-1))^2 = 3n + 1$.

Ferner ist zu erkennen, daß für $3n + 1 = m^2$ niemals m durch 3 teilbar sein kann, weil sonst ja auch m^2 durch 3 teilbar wäre, was der Voraussetzung widerspricht.

Folglich können nur die beiden folgenden Fälle eintreten:

Behauptung folgt.

Damit ist gezeigt, daß sich unter den gegebenen Voraussetzungen die Zahl (n + 1) stets als Summe von drei Quadratzahlen darstellen läßt.

Wenn man auf diese Weise einen Lösungsweg gefunden hat, dann ist es nicht schwer, die Lösung in kürzerer Form etwa folgendermaßen darzustellen:

Aus der Voraussetzung 3n + 1 =
$$m^2$$
 folgt (1) $n = \frac{m^2 - 1}{3} = \frac{(m+1)(m-1)}{3}$.

Da n eine natürliche Zahl ist, ist genau einer der beiden Fakltoren (m+1) bzw. (m-1) durch 3 teilbar, d.h. es gilt stets entweder m = 3k + 1 oder m = 3k - 1.

Setzt man dies in (1) ein, dann erhält man
$$n = \frac{9k^2 + 6k}{3}$$
 bzw. $n = \frac{9k^2 - 6k}{3}$, woraus dann $n + 1 = 3k^2 + 2k + 1 = k^2 + k^2 + (k+1)^2$ bzw. $n + 1 = 3k^2 - 2k + 1 = k^2 + k^2 + (k-1)^2$ und damit die

Auch bei der etwas schwierigeren Aufgabe 9f) dürfte es notwendig sein, durch Betrachten spezieller Beispiele zunächst zu einer Vermutung zu gelangen.

n	k	n·(n - 1)k-1	Darstellung als Summe S(n;k)
3	3	$3.2^2 = 12$	$12 = 2 + 4 + 6 = (2^2-2) + 2^2 + (2^2+2)$
3	4	$3.2^3 = 24$	$24 = 6 + 8 + 10 = (2^3-2) + 2^3 + (2^3+2)$
3	5	3.24 = 48	$48 = 14 + 16 + 18 = (2^{4}-1) + 2^{4} + (2^{4}+1)$
4	3	$4.3^2 = 36$	$36 = 6 + 8 + 10 + 12 = (3^2-3) + (3^2-1) + (3^2+1) + (3^2+3)$
4	4	$4.3^3 = 108$	$108 = 24 + 26 + 28 + 30 = (3^{3}-3) + (3^{3}-1) + (3^{3}+1) + (3^{3}+3)$
5	3	$5.4^2 = 80$	$80 = 12 + 14 + 16 + 18 + 20 = (4^2-4) + (4^2-2) + 4^2 + (4^2+2) + (4^2+4)$

Dieser Tabelle kann man folgende Vermutungen entnehmen:

- 1.: Die Anzahl der Summanden von S(n;k) ist stets gleich n .
- 2.: 1. Summand $s_1 = (n-1)^{n-1} (n-1)$; s_1 ist stets gerade;
 - 2. Summand $s_2 = (n-1)^{n-1} (n-3)$; $s_2 = s_1 + 2$;
 - (n-1). Summand $s_{n-1} = (n-1)^{n-1} + (n-3)$;
 - n. Summand $s_n = (n-1)^{n-1} + (n-1)$;
- 3. Es gilt $S(n;k) = n(n-1)^k = s_1 + s_2 + ... + s_{n-1} + s_n$ für $n,k \in \mathbb{N}$ und n > 2 und k > 2.

Für gerades n wird (n-1) ungerade, folglich auch (n - 1)n-1 ungerade und damit s₁ gerade.

Für ungerades n wird (n-1) gerade, folglich auch (n - 1)n-1 gerade und damit s₁ gerade.

Damit ist gezeigt, daß s_1 stets gerade ist, woraus dann folgt, daß S(n;k) eine Summe von aufeinanderfolgenden geraden Zahlen ist.

Es gilt $s_1 + s_n = s_2 + s_{n-1} = \dots = 2 \cdot (n-1)^{n-1}$, woraus sich dann $S(n;k) = n \cdot (n-1)^{n-1}$ folgern läßt. Damit ist alles gezeigt.

In Aufgabe 10) wurden 6 Entscheidungsaufgaben zusammengefaßt. Im Vergleich zu Beweisaufgaben enthalten sie die zusätzliche Schwierigkeit, daß man zunächst vermuten muß, ob die gegebene Aussage wahr oder falsch ist, um sich dann entscheiden zu können, ob man (bei wahren Allaussagen) nach eine direkten Beweis, (bei falschen Allaussagen) nach einem Gegenbeispiel, (bei wahren Existenzaussagen) nach einem Beispiel oder (bei falschen Existenzaussagen) nach einem indirekten Beweis suchen soll. Dabei ist die in Klammern angegebene Zuordnung nicht in jedem Fall bindend. So ist es z.B. zweckmäßig, die in Aufgabe 10b) gegebene wahre Allaussage indirekt zu beweisen.

Bei Entscheidungsaufgaben ist es in der Regel günstig, mit dem Betrachten spezieller Beispiele zu beginnen, um so einen Anhaltspunkt zu bekommen, ob die betreffende Aussage wahr oder falsch ist. Wenn man Glück hat, findet man auf diese Weise gleich ein Beispiel oder ein Gegenbeispiel und ist am Ziel.

Durch das Betrachten spezieller Beispiele gelangt man zur Vermutung, daß die in Aufgabe 10a) gegebene Allaussage wahr ist.

Bei der Suche nach einem *direkten Beweis* liegt es nahe, zunächst die in der Behauptung gegebene Gleichung *äquivalent umzuformen*. Auf diese Weise gelangt man zum hinreichenden Teilziel $n = \frac{1}{6}m(m^2 + 3m + 2)$.

Weiteres Rückwärtsarbeiten führt dann zum hinreichenden Teilziel 6|(m² + 3m + 2).

Den restlichen Weg zu einem Lösungsplan wird man durch Vorwärtsarbeiten zurücklegen. Hierbei bietet sich das Rechnen mit Kongruenzen als Hilfsmittel an, wobei man in bekannter Weise eine Fallunterscheidung durchführt.

Es ist also zu zeigen, daß stets $s = m^2 + 3m + 2 \equiv 0$ (6) gilt.

Stets gilt $m \equiv 0$ (6) oder $m \equiv \pm 1$ (6) oder $m \equiv \pm 2$ (6) oder $m \equiv 3$ (6).

Im erstgenannten und im letztgenannten Fall kann man sofort das hinreichende Teilziel und damit dann auch die Behauptung ableiten.

In den anderen beiden Fällen gilt

 $m^2 + 3m + 2 = 1 \pm 3 + 2 = 0$ (6) bzw. $m^2 + 3m + 2 = 4 \pm 6 + 2 = 0$ (6).

Damit hat man einen Lösungsplan gefunden.

In Aufgabe 10b) ist eine Allausage gegeben, die vermutlich wahr ist. Voraussetzung und Behauptung haben allerdings eine Form, die wenig Chancen für ein erfolgreiches VA oder RA bieten.

Dies kann zur Idee führen, zur *Kontraposition* des zu beweisenden Satzes überzugehen, die (nach Anwendung der Morganschen Regel \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q) wie folgt lautet:

Wenn 3ta oder 3tb, dann 3t(a2+b2)

Diese Kontraposition läßt sich direkt beweisen, indem man das Rechnen mit Kongruenzen als Hilfsmittel verwendet und wie dabei üblich eine Fallunterscheidung durchführt.

Statt dessen kann man aber auch den gegebenen Satz indirekt beweisen, indem man von der Gegenannahme (3†a oder 3†b) ausgehend eine Widerspruch zur Voraussetzung $3|(a^2+b^2)$ erzeugt, wobei man genau so vorgehen kann, wie bei dem direkten Beweis der Kontraposition. Aus (3†a oder 3†b) folgt [$a = \pm 1$ (3) oder $b = \pm 1$ (3)], also [$a^2 = 1$ (3) oder $b^2 = 1$ (3)]. Wie man durch Betrachten aller möglichen Fälle erkennt, folgt hieraus $a^2 + b^2 \neq 0$ (3), also

3†(a²+b²), im Widerspruch zur Voraussetzung.

Bei der in *Aufgabe 10c*) gegebenen Existenzaussage könnte man auf das Untersuchen spezieller Beispiele verzichten. Da die Gleichung $x^2 + 10ax + 5b + 3 = 0$ mit $a,b \in Z$ genau dann ganzzahlige Lösungen besitzt, wenn ihre *Diskriminante D* eine Quadratzahl ist, wird man sich sofort der Frage zuwenden, ob $D = (10a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (5b + 3) = 4 \cdot (25a^2 - 5b - 3)$ für gewisse $a,b \in Z$ eine Quadratzahl sein kann.

Dies trifft genau dann zu, wenn $25a^2 - 5b - 3 = 5(5a^2 - b) - 3$ eine Quadratzahl ist.

Nachdem die Suche nach einem Beispiel, das die Wahrheit unserer Existenzaussage nachweisen würde, erfolglos verläuft, wird man versuchen, diese Aussage zu widerlegen.

Bei der Suche nach Eigenschaften von Quadratzahlen, die uns hier helfen könnten, kann man auf folgenden (in der AG Klasse 8 behandelten) *Hilfssatz* stoßen: Die letzte Ziffer einer Quadratzahl lautet stets 0, 1, 4, 9, 6 oder 5, niemals 2, 3, 7 oder 8.

Wir wären daher am Ziel und hätten die Falschheit unserer Existenzaussage nachgewiesen, wenn wir zeigen könnten, daß $D^* = 5(5a^2 - b) - 3$ für $D^* \ge 0$ stets auf eine der "verbotenen" Ziffern endet (weil D^* mit $D^*<0$ ja keine Quadratzahl sein könnte).

Dieser Nachweis kann durch folgende Fallunterscheidung erbracht werden:

Ist (5a² - b) eine gerade Zahl, dann endet D* auf 7;

ist (5a2 - b) eine ungerade Zahl, dann endet D* auf 2.

Damit ist alles gezeigt.

Bei der in *Aufgabe 10d*) gegebenen Existenzaussage gelingt es nicht, ein Beispiel zu finden, das ihre Wahrheit nachweisen würde. Also wird man versuchen, durch einen *indirekten Beweis* ihre Falschheit nachzuweisen.

Angenommen, es gelte für $a,b \in \mathbb{N}$ und $a \neq b$ die Beziehung $\frac{a^2+b^2}{ab} = k$ mit ganzzahligem k.

Durch *aquivalentes Umformen* würde hieraus $(\frac{a}{b})^2 - k \cdot \frac{a}{b} + 1 = 0$ folgen.

Folglich müßte $x = \frac{a}{b}$ eine positive rationale Lösung der Gleichung $x^2 - k \cdot x + 1 = 0$ sein, es müßte also $x = \frac{1}{2}(k + \sqrt{k^2 - 4})$ gelten.

Für k = 2 wäre dann x = 1, also a = b im Widerspruch zur Voraussetzung.

Für $k \neq 2$ läßt sich zeigen, daß dann x keine rationale Zahl wäre, was ebenfalls der Voraussetzung widersprechen würde.

Damit ist alles gezeigt.

Bei Aufgabe 10e) wird man zunächst die Analogie zur Aufgabe 10d) feststellen und hervorheben, daß Aufgabe 10d) nicht als Spezialfall der Aufgabe 10e) angesehen werden kann, weil es keine Interpretation von a, b, c gibt, bei der Aufgabe 10e) in Aufgabe 10d) übergehen würde. (Hier wird oft übersehen, daß die Interpretation c = 0 nicht statthaft ist, weil c als Faktor im Nenner vorkommt).

Dies legt den Analogieschluß nahe, daß es auch hier kein Tripel (a;b;c) von paarweise verschiedenen natürlichen Zahlen gibt, die die gegebene Bedingung erfüllen, und daß man daher nach einem indirekten Beweis zur Widerlegung dieser Existenzaussage suchen muß.

Man sollte hier die Schüler zunächst diesen naheliegenden Irrweg gehen lassen, bevor man hervorhebt, daß *Analogieschlüsse* (bei der Lösungssuche zwar äußerst nützlich, manchmal aber eben auch) *falsch sein können*.

Bei der Suche nach einem Beispiel, das die Wahrheit unserer Existenzaussage nachweist, kann man auf das Beispiel (a;b;c) = (1;2;5) stoßen, bei dem $\frac{a^2+b^2+c^3}{abc} = \frac{1^2+2^2+5^2}{1\cdot 2\cdot 5} = \frac{30}{10} = 3$ gilt.

3.4. Logik und Kombinatorik

Die hier gestellten Aufgaben haben mit dem Unterrichtsstoff kaum etwas zu tun, sie gehören vorwiegend zur "Wettbewerbsmathematik" und sollen der Auflockerung der Zirkel dienen und für Abbwechslung sorgen.

Als Ziel wollen wir hierbei lediglich die Vermittlung und Anwendung des Dirichletschen Schubfachprinzips stellen, das für das Lösen der Aufgaben 3), 4) und 5) benötigt wird.

Bei Aufgabe 1) wird man zunächst feststellen, daß es beim Schach für jede gewonnene Partie 1 Punkt, für jede Remis-Partie 1/2 Punkt und für jede verlorene Partei 0 Punkte gibt

Folglich kann jeder der 30 Spieler maximal 29 Punkte erreichen, wenn er jedes seiner Spiele gewinnt.

Da 60% von 29 gleich 17,4 sind, muß jeder Spieler nach der getroffenen Vereinbarung mindestens 17,5 Punkte erzielen, um die nächste Runde des Turniers zu erreichen.

Die 30 Spieler spielen insgesamt $\frac{30.29}{1.2}$ = 435 Partien, so daß insgesamt 435 Punkte vergeben werden. Wegen 435:17,5 = 24,8 > 24 können sich daher nicht mehr als 24 von den 30 Spielern plazieren.

Nun ist noch ein *Existenznachweis* zu führen, daß tatsächlich der Fall eintreten kann, daß sich 24 Spieler plazieren.

Wenn 24 Spieler gegeneinander unentschieden spielen, dann erhält jeder von ihnen für diese Spiele 11,5 Punkte.

Wenn jeder dieser 24 Spieler gegen die restlichen 6 Spieler gewinnt, dann erhält jeder von ihnen weitere 6 Punkte.

Wegen 11,5 + 6 = 17,5 erzielt daher jeder dieser 24 Spieler die benötigten 17,5 Punkte.

Abschließend wird nochmals hervorgehoben:

Um nachzuweisen, daß m die maximale Anzahl von Elementen ist, die eine gewisse Bedingung erfüllen, ist zweierlei zu zeigen: Es kann keine Anzahl n > m von Elementen geben, die diese Bedingung erfüllen; es können tatsächlich m Elemente angegeben werden, die diese Bedingung erfüllen. (Vor allem der letztgenannte Nachweis wird häufig von Schülern nicht als notwendig erkannt.)

Aufgabe 2): Aus der Voraussetzung folgt, daß jedes der Telefone genau 15 Anschlüsse besitzt. Folglich gibt es genau 77·15 Anschlüsse, und dies ist eine ungerade Anzahl.

Da die Verbindung eines Telefons A zu einem Telefon B gleichzeitig eine Verbindung von B zu A ist, müßte die Gesamtanzahl der Anschlüsse eine gerade Zahl sein.

Damit ist gezeigt., daß man 77 Telefone niemals so miteinander verbinden kann, daß jedes Telefon mit genau 15 anderen Telefonen verbunden ist.

Es wird abschließend hervorgehoben, daß hier ein indirekter Beweis für eine negierte Existenzaussage geführt wurde, bei der man einen Widerspruch zwischen zwei aus Voraussetzung und Gegenannahme abgeleiteten Feststellungen herleitet.

Beim Lösen der Aufgaben 3), 4) und 5) spielt das *Dirichletsche Schubfachprinzip* eine entscheidende Rolle. Dieses Prinzip besagt:

Werden mehr als n Elemente in n Schubfächer verteilt, so muß - unabhängig von der Verteilung - mindestens ein Schubfach mehr als ein Element enthalten.

Mit diesem Prinzip kann man Aufgaben aus allen Bereichen der Mathematik lösen, und unter diesen Aufgaben gibt es neben sehr leichten auch sehr schwierige Aufgaben.

Eine Aufgabe läßt sich mit dem Schubfachprinzip lösen, wenn in der Aufgabenstellung eine Menge beschrieben wird, in der zwei oder mehr Elemente gleich sein oder eine gewisse Bedingung erfüllen sollen. Dabei kommt im Aufgabentext häufig die Formulierung "mindestens" vor.

Im allgemeinen sind Existenzaussagen über endliche Mengen mit dem Schubfachprizip beweisbar. Häufig muß der Aufgabentext erst so umformuliert werden, daß diese äußeren Merkmale sichtbar werden.

Wenn man weiß, daß eine Aufgabe mit dem Schubfachprinzip lösbar ist, dann kommt es "nur" darauf an, die "Elemente" und die "Schubfächer" geschickt zu bestimmen. Gerade hierin besteht jedoch in der Regel die Hauptschwierigkeit einer solchen Aufgabe.

Wenn die Schüler mit dem Schubfachprinzip noch nicht vertraut sind, dann sollte man dieses Prinzip zunächst mit Hilfe einiger einfacher Aufgaben einführen. Hierfür sind folgende Aufgaben geeignet:

(1) Beweise: In einer Schule mit 400 Schülern gibt es mindestens zwei, die am gleichen Tag Geburtstag haben.

Für welche kleinere Schülerzahl bleibt diese Aussage noch richtig?

- (2) Gibt es eine (hinreichend große) Schüleranzahl, für die man behaupten kann, daß mit Sicherheit an zwei verschiedenen Tagen jeweils mehr als ein Schüler Geburtstag hat? (Nein)
- (3) Beweise: Unter n+1 ganzen Zahlen kann man stets mindestens zwei finden, deren Differenz durch n teilbar ist.

(Hinweis: Man betrachte die Reste der n+1 Zahlen bei Division durch die Zahl n.)

(4) Eine Schießscheibe habe die Form eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 2. Sie werde fünfmal getroffen.

Zeige, daß es dann stets mindestens zwei Einschußlöcher gibt, deren Abstand kleiner oder gleich 1 ist.

(Hinweis: Man zerlege das gegebene Dreieck in vier kongruente Dreiecke mit der Seitenlänge 1.)

Bei *Aufgabe 3)* wäre man am Ziel, wenn es gelingen würde zu zeigen, daß bei jeder Auswahl von 101 verschiedenen Zahlen aus den natürlichen Zahlen von 1 bis 200 stets mindestens ein Zahlenpaar der Form (n, 2^{t.}n) vorkommen muß.

Unter den Zahlen von 1 bis 200 kommen genau 100 ungerade Zahlen vor.

Wir nehmen an, daß unter den 101 ausgewählten Zahlen m ungerade Zahlen und folglich (101 - m) gerade Zahlen vorkommen.

Nun bilden wir zu jeder dieser geraden Zahlen der Form 2^{t.}n diejenige ungerade Zahl n , die entsteht, wenn man die gerade Zahl durch die größtmögliche Zweierpotenz dividiert.

Auf diese Weise hat man m ausgewählte und (101 - m) erzeugte ungerade Zahlen, insgesamt also 101 ungerade Zahlen erhalten.

Wählt man diese 101 ausgewählten bzw. erzeugten ungeraden Zahlen als "Element" und die unter den Zahlen von 1 bis 200 vorkommenden 100 ungeraden Zahlen als "Schubfächer", dann müssen sich unter den 101 ungeraden Zahlen mindestens zwei gleiche befinden, von denen die eine das 2^t-fache der anderen ist, w.z.b.w.

Anschließend sollte man darauf hinweisen, daß sich die durch einen Schubfachschluß erhaltenen Aussagen häufig verschärfen lassen, daß der Beweis der so verschärften Aussage in der Regel aber wesentlich komplizierter wird. Wir haben hier die Tatsache vernachlässigt, daß es auch in der Menge der ungeraden Zahlen bereits Paare geben kann, bei denen die eine Zahl ein Vielfaches der anderen ist.

Würde man den Fall betrachten, daß aus den Zahlen von 1 bis 20 genau 11 Zahlen auszuwählen sind, dann ließe sich m.H. des Schubfachschlusses analog ableiten, daß sich unter den ausgewählten Zahlen mindestens zwei befinden, deren eine ein ganzzahliges Vielfaches der anderen ist.

Unter den Zahlen von 1 bis 20 befinden sich jedoch nur maximal 8 paarweise teilerfremde Zahlen, nämlich die 8 Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Also könnte man sogar nachweisen, daß sich bereits unter 9 ausgewählten Zahlen mindestens zwei befinden müssen, die nicht teilerfremd sind.

Aufgabe 4):

Seien n₁, n₂, n₃, ..., n₁₀₀₀ die 1000 gegebenen beliebigen ganzen Zahlen.

Dann kann man folgende 1000 Summen bilden (wobei wir die Zahl n_1 als Summe mit einem Summanden auffassen) : n_1 , $n_1+n_2+n_3$, ..., $n_1+n_2+...+n_{1000}$.

Wie betrachten die Reste dieser Summen bei Division durch 1000.

Es gibt insgesamt genau 1000 verschiedene Reste bei Division durch 1000. Folglich muß es unter den 1000 Resten der betrachteten Summen entweder den Rest 0 geben, oder es müssen zwei Summen denselben Rest lassen (Schubfachschluß!).

Im erstgenannten Fall trifft unsere Behauptung zu.

Im zweitgenannten Fall bilden wir die Differenz der beiden Summen mit gleichem Rest . Die Differenz dieser beiden Summen ist wieder eine Summe, und diese Summe hat den Rest 0 . Damit ist alles gezeigt.

Aufgabe 5):

Wir zerlegen das Quadrat mit der Seitenlänge 1 durch seitenparallele Geraden in 25 kongruente Quadrate mit der Seitenlänge $\frac{1}{5}$.

Da sich im großen Quadrat nach Voraussetzung 51 Punkte befinden, gibt es (mindestens) ein kleines Quadrat, das (mindestens) 3 Punkte (im Inneren oder auf dem Rand) enthält (Schubfachschluß!).

Der Umkreis dieses kleinen Quadrats hat einen Radius von $\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{10}\sqrt{2} < \frac{1}{7}$

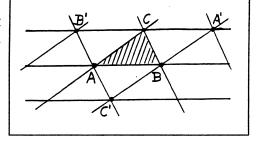
Folglich liegt unser kleines Quadrat, und damit auch die drei Punkte in ihm, in einem (zum Umkreis konzentrischen) Kreis mit dem Radius $\frac{1}{7}$.

Aufgabe 6)

Da nur endlich viele Punkte gegeben sind, bilden sie auch nur endlich viele Dreiecke. Also gibt es unter ihnen ein Dreieck mit maximalem Flächeninhalt (Extremalprinzip!).

Sei ABC das Dreieck mit maximalem Flächeninhalt. Dann haben alle Dreiecke ABX eine Fläche, die nicht größer als die von Dreieck ABC ist. Also ist die zu X gehörende Höhe auf \overrightarrow{AB} nicht größer als zu zu C gehörende Höhe auf \overrightarrow{AB} .

Also liegen alle Punkte in einem Streifen um die Geraden AB, AC, BC mit einem Abstand jeweils von h_C , h_B , h_A



Es entstehen also die Punkte A', B' und C'.

Es ist leicht zu sehen, daß die Dreiecke ABC, AC'B, CBA' und B'AC kongruent sind. Da alle Punkte im Dreieck A'B'C' liegen, existiert eine gesuchte Dreiecksfläche mit einem Flächeninhalt, der nicht größer als 4 ist.

Um eine Antwort auf die in *Aufgabe 8)* gestellte Frage zu finden, empfiehlt es sich, die möglichen Resultate der aufeinanderfolgenden Teilungen nacheinander zu betrachten.

Wenn man bei der 1. Teilung von den gegebenen 7 Papierstücken n_1 Papierstücke in jeweils 7 Teile teilt, dann hat man $(7 - n_1)$ nicht zerteilte und $7n_1$ neue Papierstücke, insgesamt also $a_1 = (7 + 6n_1)$ Papierstücke erhalten.

Wenn man bei der 2. Teilung von den so erhaltenen a_1 Papierstücken n_2 Papierstücke in jeweils 7 Teile teilt, dann hat man $(a_1 - n_2)$ bei dieser Teilung nicht zerteilte und $7n_2$ neue Papierstücke, insgesamt also $a_2 = a_1 + 6n_2 = 7 + 6(n_1 + n_2)$ Papierstücke erhalten.

Nun erkennt man leicht, daß man nach der k-ten Teilung insgesamt $a_k = 7 + 6n$ Papierstücke erhält. Folglich muß stets $a_k \equiv 1$ (6) gelten. Da 1994 $\equiv 2$ (6) gilt, kann man aus 7 Papierstücken durch eine derartige Teilung niemals 1994 Papierstücke herstellen.

Diese Überlegung läßt sich noch wie folgt vereinfachen:

Man erhält beim Zerteilen eines Papierstücks in 7 Teile stets 6 Teile mehr, als vorher vorhanden waren. Wenn insgesamt n derartige Teilungen vorgenommen wurden, dann hat man 6n Teile mehr, als anfangs vorhanden waren. Da anfangs 7 Papierstücke vorhanden waren, erhält man nach insgesamt n derartigen Teilungen folglich z = 7 + 6n Stücke, was mit $z \equiv 1$ (6) äquivalent ist.

Nun sollte man die Schüler auffordern, die Aufgabenstellung zu verallgemeinern .

Wenn man in der geschilderten Weise einige von a gegebenen Papierstücken in n Teile teilt, dann kann man genau dann genau z Papierstücke erhalten, wenn $z \equiv a$ (n-1) gilt.

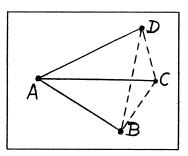
Für unsere spezielle Aufgabe gibt es noch andere einfache Lösungswege. Da bei jedem derartigen Teilvorgang stets eine gerade Anzahl neuer Stücke entsteht und da 7 eine ungerade Zahl , 1994 aber eine gerade Zahl ist, kann man durch einen derartigen Teilungsvorgang aus 7 Papierstücken niemals 1994 Stücke herstellen.

Aufgabe 9)

Von jedem der gegebenen 6 Punkte gehen 5 Verbindungsstrecken zu den übrigen Punkten aus. Greifen wir uns z.B. den Punkt A heraus, so gibt es nach Voraussetzung mindestens 3 Strecken, die gleich gefärbt sind. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß dies die Farbe "rot" ist und daß die anderen Endpunkte dieser rot gefärbten Strecken die Punkte B, C, D sind.

Nun gibt es genau zwei Möglichkeiten:

(a) Färben wir eine oder mehrere der Verbindungsstrecken \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{BD} oder \overrightarrow{CD} rot, dann entsteht mindestens ein vollständig rot gefärbtes Dreieck ABC, ABD oder ACD.



(b): Wird keine dieser drei Verbindungsstrecken rot gefärbt, sondern alle drei grün, dann entsteht das vollständig grün gefärbte Dreieck BCD.

Da einer dieser beiden Fälle eintreten muß, läßt es sich nicht vermeiden, daß ein gleich gefärbtes Dreieck entsteht.

Es liegt nahe, für die 5 vom Eckpunkt A ausgehenden Strecken folgende Fallunterscheidung durchzuführen:

(a) Alle diese Strecken haben die gleiche Farbe; (b) Vier dieser Strecken haben die gleiche Farbe; (c) Drei dieser Strecken haben die gleiche Farbe.

Dabei erkennt man, daß man sich auf die Betrachtung des oben behandelten Falls (c) beschränken kann.

3.5. Geometrie

Auch in der Geometrie werden in dieser Klassenstufe weder neuer Stoff noch neue Verfahren eingeführt. Der Wiederholung kommt hier allerdings ein wesentlich höherer Stellenwert zu als etwa in der Zahlentheorie. Man kann hierbei die Gelegenheit nutzen, eine Gesamtwiederholung des elementargeometrischen Unterrichtsstoffs durchzuführen, die erfahrungsgemäß im Unterricht der Klassen 10 bis 12 in der Regel zu kurz kommt.

Die Aufgaben wurden so gewählt, daß die benötigten Hilfsmittel von den Sätzen über Winkel an geschnittenen Geraden in der Klasse 6 bis zur Ähnlichkeitslehre in der Klasse 8 reichen, und es wird auch auf die nicht zum Unterrichtsstoff zählenden Sätze von Menelaos und von Ceva zurückgegriffen.

Ferner wurde bei der Auswahl der Aufgaben darauf geachtet, daß die wichtigsten heuristischen Vorgehensweisen eingesetzt und dabei wiederholt werden können. Es ist durchaus möglich und nützlich, in Klasse 10 diesbezüglich eine Gesamtwiederholung durchzuführen (vg. hierzu den Abschnitt 5.).

Die Aufgaben 1) bis 19) beschäftigen sich mit der *Planimetrie*, die Aufgaben 20) bis 29) mit der *Stereometrie*.

Die Aufgaben 1) bis 3) sind Bestimmungsaufgaben, die Aufgaben 4) bis 6) sind gemischte Beweis- und Bestimmungsaufgaben, die Aufgaben 8) bis 14) sind Beweisaufgaben. Mit Aufgabe 16) folgt eine Ortsaufgabe, die Aufgaben 17) bis 19) sind Konstruktionsaufgaben. In den Aufgaben 7) und 15) werden die Schüler aufgefordert, selbständig Stoff aus den AGn früherer Jahre zu wiederholen.

In Aufgabe 20) sollen die Schüler die "Begriffe und Sätze aus der Stereometrie" wiederholen, die in der AG Klasse 9 behandelt wurden. Mit Ausnahme der Beweisaufgabe 27) und der Entscheidungsaufgabe 29) sind die restlichen stereometrischen Aufgaben Bestimmungsaufgaben.

Ziele:

- Geschicktes Zeichnen genauer Planfiguren zum Finden von Vermutungen
- Informativ gestaltete Figuren zum Abspeichern von Aufgabenstellung und Lösungsplan; Wahl günstiger Bezeichnungen
- Teilzielfrage und Hilfsmittelfrage beim VA/RA zum Lösen von Beweis- und Bestimmungsaufgaben; Lösungsgraph zum Festhalten des Lösungsplans
- Entdecken "versteckter" Hilflinien durch Verwenden der Hilfsmittelfrage beim RA
- "Suche nach Gleichungen ..." (als spezielle Hilfsmittelfrage), wenn VA/RA versagt; Finden günstiger Hilfsgrößen
- Wiederholen der
 - Methode der geometrischen Örter (als Durchschnittsbildung von Erfüllungsmengen)
 - Methode der Hilfselemente (als Teilzielfrage beim VA/RA)

beim Lösen von Konstruktionsaufgaben

- Rückführungsprinzip (Finden oder Formulieren von Hilfsaufgaben)
 - Ortsaufgaben als Hilfsaufgaben f
 ür Konstruktionsaufgaben
 - Beweisaufgaben als Hilfsaufgaben für Ortsaufgaben
 - Planimetrische Aufgaben als Hilfsaufgaben für stereometrische Aufgaben (Schnittebenenmethode)
- Transformationsprinzip: Algebraische Methode bei Konstruktionsaufgaben (Übersetzen in die Sprache der Arithmetik)
- Analogieprinzip beim Lösen von stereometrischen Aufgaben (analoge planimetrische Aufgabe als Hilfsaufgabe)

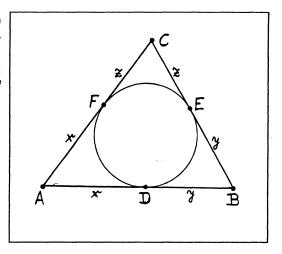
- Einzigkeitsnachweis und Existenznachweis bei Konstruktionsaufgaben und Ortsaufgaben
- Indirekte Beweise (vor allem für Umkehrungen bewiesener Sätze)
- Umkehren, Verallgemeinern und Spezialisieren von Sätzen; Betrachtung von Spezialfällen und von Grenzfällen
- Übergang von konkreten Aufgaben zu parameterhaltigen Aufgaben und umgekehrt; Proben am Spezialfall; Lösbarkeitsdiskussion bzw. Determination bei parameterhaltigen Aufgaben
- Wiederholung und Festigung
 - der Sätze über Winkel an geschnittenen Geraden, über Dreiecke und Kongruenz
 - der Sätze über Vierecke und weitere Vielecke
 - der Satzgruppe des Pythagoras und der Sätze über Strecken, Winkel und Geraden am Kreis
 - der Ähnlichkeitslehre und der Strahlensätze sowie der Berechnung von Körpern
 - des Kreises des Apollonius, der Sätze des Menelaos und Ceva nebst Umkehrungen, des Satzes über elementar konstruierbare Terme und von Sätzen aus der Stereometrie
- Satz über die Eulersche Gerade und Satz über den Feuerbachschen Kreis

Bei der recht leichten Aufgabe 1) sollte man die Sätze über Strecken, Winkel und Geraden im Zusammenhang wiederholen, was auch für Aufgabe 2) nützlich sein wird. Hier bietet sich der Satz über die Tangentenabschnitte als naheliegendes Hilfsmittel an, und auch das Einführen der Bezeichnungen x, y, z liegt nahe.

Geg.: $\overrightarrow{BC} = a$; $\overrightarrow{AC} = b$; $\overrightarrow{AB} = c$; D, E, F sind die Berührungspunkte des Inkreises mit dem Dreieck;

Ges.: Längen der Seitenabschnitte AD, DB, BE, EC, CF, FA.

Nach dem Satz über die Tangentenabschnitte gilt $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AF} = x$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BE} = y$, $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CF} = z$.



Bei der Suche nach Gleichungen zwischen gegebenen und gesuchten Größen stößt man auf das folgende Gleichungssystem, das mit Hilfe der Additionsmethode gelöst werden kann:

Folglich gilt $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(-a + b + c)$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(a - b + c)$, $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(a + b - c)$. Die erwartete Symmetrie bezüglich a, b, c kann zur Probe herangezogen werden.

Von etwas höherem Schwierigkeitsgrad ist die Aufgabe 2).

Beim Zeichnen einer genauen *Planfigur* wird man wiederholen, daß nach einer Umkehrung des Satzes von Thales die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks ABC ein Durchmesser des Umkreises ist. Man kann auch wiederholen, daß wegen des gegebenen Seitenverhältnisses der Kreis des Apollonius ein geometrischer Ort für C ist, obwohl man dies nicht unbedingt für eine Konstruktion dieses Dreiecks benötigt.

Geg.: Umkreis k von Dreieck ABC;

BC = a;

∢ACB = 90°;

AC: BC = 2:1;

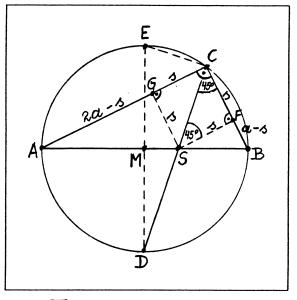
Die Winkelhalbierende von ≪ACB

schneidet k in D;

Ges.: $\overrightarrow{CD} = f(a)$.

Beim *Vorwärtsarbeiten* erkennt man, daß die Länge des Durchmessers \overrightarrow{AB} mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechenbar ist.

Einer genau gezeichneten Planfigur kann man die Vermutung entnehmen, daß D der Mittelpunkt des Halbkreises BA ist. Da nach dem verallgemeinerten Periperiewinkelsatz zwei Peripheriewinkel genau dann gleich sind, wenn sie über gleich großen Bögen stehen, läßt sich diese Vermutung leicht beweisen.



Auf diese Weise kann man auch auf den Durchmesser DE als Hilfslinie (mit berechenbarer Länge) stoßen, was über den Satz des Pythagoras für Dreieck DEC zur Länge von EC als hinreichender Hilfsgröße führen kann. Dieser Weg landet jedoch in einer Sackgasse.

Bei der Suche nach einem geeigneten Hilfsmittel kann man auf den Sehnensatz und damit auf den Hilfspunkt S stoßen. Entscheidend ist nun das Entdecken der Lote \overline{SF} und \overline{SG} als nützliche Hilfslinien.

Man kann leicht nachweisen, daß SFCG ein Quadrat ist und daß die Dreiecke SBF und ASG zum gegebenen Dreieck ABC ähnlich sind. Dies führt dann zum Einführen der Hilfsgröße $\overrightarrow{SF} = \overrightarrow{SG} = \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CG} = s$, woraus dann $\overrightarrow{BF} = a - s$ und $\overrightarrow{AG} = 2a - s$ folgt.

Damit erweisen sich die Längen der Sehnenabschnitte \overline{CS} , \overline{AS} und \overline{BS} als berechenbare Hilfsgrößen, und mit Hilfe des Sehnensatzes ist es dann möglich, auch die Länge des Sehnenabschnitts \overline{DS} zu berechnen. Wegen $\overline{CD} = \overline{CS} + \overline{DS}$ haben wir auf diese Weise einen Lösungsplan gefunden.

Der Satz des Pythagoras, angewendet auf das Dreieck ABC, führt zu $\overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a$. Wegen $\triangle SBF \sim \triangle ABC$ gilt s: (a - s) = 2:1, also $s = \frac{2}{3}a$.

Der Satz des Pythagoras, angewendet auf das Dreieck CSF, führt zu $\overline{CS} = \sqrt{2}s$, also zu (1) $\overline{CS} = \frac{2}{3}\sqrt{2}a$.

Wegen $\triangle ASG \sim \triangle ABC$ gilt \overrightarrow{AS} : $s = \overrightarrow{AB}$: a, also $\overrightarrow{AS} \cdot a = \frac{2}{3}a \cdot \sqrt{5}a$ und somit

(2) $\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\sqrt{5}a$.

Wegen $\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AS} = \sqrt{5}a - \frac{2}{3}\sqrt{5}a$ gilt daher

(3) $\overrightarrow{BS} = \frac{1}{3}\sqrt{5}a$.

Aus (1), (2), (3) folgt wegen des Sehnensatzes $\overline{DS} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{2}a = \frac{2}{3}\sqrt{5}a \cdot \frac{1}{3}\sqrt{5}a$, also

(4) $\overline{DS} = \frac{5}{6}\sqrt{2}a$.

Wegen $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{DS} = \frac{2}{3}\sqrt{2}a + \frac{5}{6}\sqrt{2}a = \frac{3}{2}\sqrt{2}a$, also

(5) $\vec{C}\vec{D} = \frac{3}{2}\sqrt{2}a \approx 2,12a$.

Damit haben wir unser Ziel erreicht. Nachmessen an einer genau gezeichneten Figur nebst Vergleich mit dem berechneten Näherungswert lassen erwarten, daß das Resultat korrekt ist.

In der *Phase der weiterführenden Untersuchungen* kann man ein Ergebnis des oben angegebenen gescheiterten Lösungsweges nutzen und zusätzlich noch die Länge von \overrightarrow{EC} berechnen. Es gilt $\overrightarrow{EC}^2 = \overrightarrow{DE}^2 - \overrightarrow{CD}^2 = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{CD}^2 = 5a^2 - \frac{9}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2$, also $\overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\sqrt{2}a$. Hieraus folgt dann EC:CD=1:3, was als recht überraschende neue Erkenntnis zu werten ist. Damit haben wir folgenden *Satz entdeckt* und sind auch in der Lage, ihn zu beweisen: Wenn \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{DE} zwei zueinander orthogonale Durchmesser einer Kreises sind, und wenn \overrightarrow{C} ein Punkt auf dem Kreisbogen \overrightarrow{BE} ist, für den $\overrightarrow{AC}:\overrightarrow{BC}=2:1$ gilt, dann gilt $\overrightarrow{DC}:\overrightarrow{EC}=3:1$.

Relativ leicht ist die Aufgabe 3), und hier gibt es auch mehrere Lösungswege.

Da ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen a und b gegeben ist, setzt sich das Sechseck, dessen Inhalt zu berechnen ist, aus drei Quadraten, zwei rechtwinkligen Dreiecken und zwei stumpfwinkligen Dreiecken zusammen.

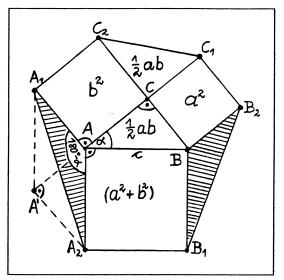
Von fünf dieser Teilfiguren läßt sich der Inhalt sofort ermitteln (vgl. Figur).

Ließe sich der Inhalt der schraffierten stumpfwinkligen Dreiecke ebenfalls mit Hilfe von a und b ausdrücken, dann wären wir am Ziel.

Man kann recht leicht vermuten, daß der Inhalt dieser beiden Dreiecke auch jeweils $\frac{1}{2}$ ab beträgt, woraus dann folgt, daß

$$J = a^2 + b^2 + (a^2+b^2) + 4 \cdot \frac{1}{2}ab = 2(a^2 + ab + b^2)$$

gilt.

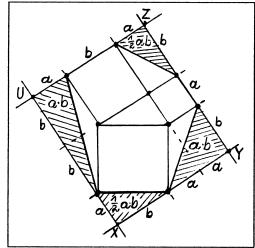


Am leichtetsten gelingt dieser Nachweis mit Hilfe der *trigonometrischen Inhaltsformel*, mit der man wegen $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ sofort zeigen kann, daß $J(A_2AA_1) = J(ABC) = \frac{1}{2}ab$ gilt. Analog wird $J(B_2BB_1) = \frac{1}{2}ab$ abgeleitet.

Führt man A' als vierten Eckpunkt des Parallelogramms A_2AA_1A' ein, dann läßt sich zeigen, daß $\not \subset A_2A'A = 90^\circ$, $A_2A' = \overline{AA_1} = \overline{CC_2} = b$ und $A_2A = \overline{C_2C_1} = c$ gilt, woraus dann die Kongruenz und erst recht die Inhaltsgleichheit der Dreiecke A_2AA' und C_2C_1C folgt. Aus Eigenschaften des Parallelogramms folgt $J(A_2AA') = J(A_2AA_1)$. Hieraus kann man dann $J(A_2AA_1) = \frac{1}{2}ab$ ableiten.

Es führen aber auch Scherungen und 90°-Drehungen zum Ziel.

Dabei haben wir stets die Methode der Flächenzerlegung verwendet. Daß hier auch die Methode der Flächenzergenzung Ziel führt, deutst nehenztelsende



chenergänzung zum Ziel führt, deutet nebenstehende Figur an. Für den Inhalt des Rechtecks XYZU gilt

$$\begin{split} J_r = & (2a+b)(a+2b) = 2a^2 + 2b^2 + 5ab, \text{ für den Inhalt des Sechsecks dann} \\ J_s = & (2a^2 + 2b^2 + 5ab) - \frac{1}{2}ab - ab - \frac{1}{2}ab - ab = 2(a^2 + ab + b^2) \;. \end{split}$$

Relativ leicht ist der Teil a) der Aufgabe 4):

 V_2 : $\angle ASD = 90^\circ$;

V₃: E ist der Mittelpunkt von \overrightarrow{AC} , F ist der Mittelpunkt von \overrightarrow{BD} ;

Beh.: $\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 = \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BC}^2$.

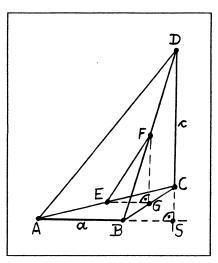
Die Hilfsmittelfrage beim RA führt zum Satz des Pythagoras als Hilfsmittel.

Nun liegt es nahe, jeden der beiden Summanden auf den beiden Seiten der Gleichung mit Hilfe dieses Satzes auszudrükken und dann die beiden Seiten zu vergleichen.

Es gilt
$$\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 = (\overrightarrow{AS}^2 + \overrightarrow{SC}^2) + (\overrightarrow{BS}^2 + \overrightarrow{SD}^2)$$

und $\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AS}^2 + \overrightarrow{SD}^2) + (\overrightarrow{BS}^2 + \overrightarrow{SC}^2)$.

Hieraus folgt unmittelbar die Behauptung.



Etwas schwieriger ist die in Teil b) der Aufgabe geforderte Berechnung der Länge von EF, weil man hierzu Hilfslinien benötigt.

Betrachtet man V_3 , dann kann die *Hilfsmittelfrage beim VA* zu dem *Satz über die Mittellinie im Dreieck* als Hilfsmittel führen. Um die Mittellinien \overline{EG} bzw. \overline{FG} in den Dreiecken ABC bzw. BCD zu erzeugen, führt man den Mittelpunkt G von \overline{BC} als *Hilfspunkt* ein.

Der Rest ist einfach. Nach dem Satz über die Mittellinie im Dreieck folgt dann EG||AB und GF|| CD, wegen V_2 also \checkmark FGE = 90° sowie $\overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}$ a und $\overrightarrow{GF} = \frac{1}{2}$ c woraus dann nach dem Satz des Pythagoras folgt: $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2}$

Bei Aufgabe 5) ist es günstig, Teil b) vor Teil a) zu lösen. Wenn man c durch r_1 und r_2 ausgedrückt hat, ist es leichter möglich, die dann präzisierte Behauptung aus den Voraussetzungen abzuleiten.

Der Aufgabenstellung ist zu entnehmen, daß c von der Lage des Punktes P auf dem Kreis \mathbf{k}_2 unabhängig sein muß.

Folglich wird man einen günstigen Spezialfall wählen, um c zu berechnen. Besonders günstig ist es, P_o speziell so zu wählen, daß $\overrightarrow{AP_o} = \overrightarrow{BP_o}$ ailt.

In diesem Fall (und damit auch in allen anderen Fällen) kann nur $c = 2(r_1^2 + r_2^2)$ gelten.

$$V_1$$
: Für $k_1(M;r_1)$ und $k_2(M;r_2)$ gilt $r_1 < r_2$;

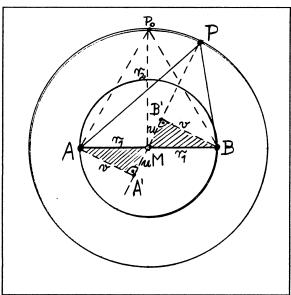
 V_2 : \overrightarrow{AB} ist Durchmesser von k_1 ;

V₃: P liegt auf k₂;

Beh.: $AP^2 + BP^2 = 2(r_1^2 + r_2^2)$.

Die Hilfsmittelfrage beim RA führt zum Satz des Pythagoras als Hilfsmittel.

Wir müssen also rechtwinklige Dreiecke als Hilfsfiguren einführen.



Wählt man als *Hilfspunkte* den Lotfußpunkt A' von A auf die Gerade PM sowie den Lotfußpunkt B' von B auf PM , dann entstehen die rechtwinkligen Dreiecke APA' und BPB' mit den uns interessierenden Strecken als Hypotenusen.

Man weist leicht nach, daß die schraffierten rechtwinkligen Dreiecke AMA' und BMB' kongruent sind. Bezeichnet man ihre Kathetenlängen mit u und v, dann gilt $r_1^2 = u^2 + v^2$ sowie o B d A $\overline{A'P} = r_0 + u$ und $\overline{B'P} = r_0 + u$ Der Rest ist leicht Man erhält

o.B.d.A.
$$\overrightarrow{A'P} = r_2 + u$$
 und $\overrightarrow{B'P} = r_2 - u$. Der Rest ist leicht. Man erhält $\overrightarrow{AP^2} = (r_2 + u)^2 + v^2$ und $\overrightarrow{BP^2} = (r_2 - u) + v^2$, also $\overrightarrow{AP^2} + \overrightarrow{BP^2} = 2r_2^2 + 2u^2 + 2v^2 = 2(r_1^2 + r_2^2)$, w.z.b.w.

Es gibt noch einen kürzeren Lösungsweg m.H. des Kosinussatzes.

Von höherem Schwierigkeitsgrad ist *Aufgabe 6*). Der Schwierigkeitsgrad würde noch steigen, wenn man nur die Bestimmungsaufgabe 6b) stellen würde, die nur lösbar ist, wenn man die Behauptung der Beweisaufgabe 6a) kennt. Um 6b) zu lösen, müßte man daher (etwa aus einer genau gezeichneten Planfigur) erst die entsprechende Vermutung finden und *Aufgabe 5a*) als Hilfsaufgabe für Aufgabe 5b) formulieren.

In der Regel soll man eine Hilfsaufgabe erst dann lösen, wenn sie sich als "brauchbare Hilfsaufgabe" erwiesen hat, d.h. wenn es gelungen ist, mit der entsprechenden Vermutung die Ausgangsaufgabe zu lösen.

Dieses heuristische Vorgehen sollte man mit den Schülern besprechen. Wir beginnen daher mit der Aufgabe 6b):

Geg.: **≪** ACB = 90°;

CS = s ist Seitenhalbierende im △ABC;

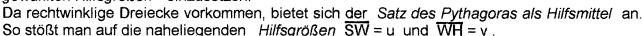
CH = h ist Höhe im △ABC:

CW ist Winkelhalbierende im ABC:

CW ist Winkelhalbierende im ASHC;

Ges.: Länge w = f(s,h) der Winkelhalbierenden \overline{CW} .

Hierliegt es nahe, die Strategie "Suche nach Gleichungen zwischen den gegebenen, der gesuchten und günstig gewählten Hilfsgrößen" einzusetzen.



Da eine gesuchte Größe und zwei Hilfsgrößen vorkommen, benötigen wir drei unabhängige Gleichungen.

Zwei Gleichungen zwischen s, h, w, u, v liefert der Satz des Pythagoras für die Dreiecke SHC und WHC. Um die dritte Gleichung zu gewinnen, müssen wir die bisher noch nicht verwendete Bedingung betrachten, daß CW Winkelhalbierende im Dreieck SHC ist. Dies führt auf den Satz über die Winkelhalbierende als Hilfsmittel, der besagt, daß jede Winkelhalbierende die zugehörige Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt.

Auf diese Weise gelangt man zu folgendem Gleichungssystem:

- (1) $w^2 = h^2 + v^2$
- (2) $(u + v)^2 = s^2 h^2$
- (3) u: v = s: h

Aus (3) folgt $u=\frac{s}{h}\cdot v$, woraus man durch Einsetzen in (2) zu $(\frac{s}{h}\cdot v+v)^2=s^2-h^2$, also zu $(\frac{s+h}{h})^2\cdot v^2=(s+h)(s-h)$ und damit zu $v^2=\frac{h^2(s-h)}{s+h}$ gelangt.

Durch Einsetzen in (1) folgt hieraus $w^2 = \frac{h^2(s+h)}{s+h} + \frac{h^2(s-h)}{s+h} = \frac{2h^2s}{s+h}$, woraus wir das gesuchte Resultat erhalten:

$$w = f(s,h) = h \cdot \sqrt{\frac{2s}{s+h}}$$

Nachdem wir uns überzeugt haben, daß Aufgabe 6a) wirklich eine brauchbare Hilfsaufgabe für Aufgabe 6b) ist, befassen wir uns jetzt mit Aufgabe 6a):

V₁: **∢**ACB = 90°;

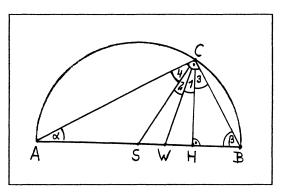
V₂: CS ist Seitenhalbierende im △ABC;

V₃: CH ist Höhe im △ABC;

Beh.: CW ist Winkelhalbierende im ASHC.

Beim *Rückwärtsarbeiten* kann man erkennen, daß sich das Ziel $\ll 1 = \ll 2$ wegen V_4 über das *hinreichende Teilziel* $\ll 3 = \ll 4$ erreichen läßt:

Wie man das Ziel erreicht, hält der folgende Lösungsgraph fest:



$$V_4$$
 \longrightarrow $AS = \overline{CS}$ \longrightarrow $4 = \alpha$ \longrightarrow $1 = \alpha$ \longrightarrow 1

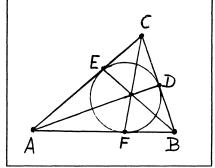
Dabei werden folgende *Hilfsmittel* verwendet: Def. "Winkelhalbierende" , Def. "Seitenhalbierende" , Basiswinkelsatz für Dreieck CAS , Innenwinkelsatz für Dreieck ABC , Def. "Höhe" , Innenwinkelsatz für Dreieck SHC , Drittengleichheit, Umformung.

Bei der in Aufgabe 7) geforderten Wiederholung der Sätze von Menelaos und Ceva sowie deren Umkehrungen sollte man auch wiederholen, daß sich der Satz des Menelaos aus den Strahlensätzen ableiten läßt, der Satz des Ceva aus dem Satz des Menelaos und daß die Umkehrungen dieser Sätze indirekt bewiesen werden (vgl. hierzu /9/, S.65-67).

Bei Aufgabe 8) wird man sich anhand einer genau gezeichneten Figur überzeugen, daß die Ecktransversalen AD, BE, CF einander tatsächlich in einem Punkt schneiden, wenn D, E, F die Berührungspunkte des Inkreises mit den Seiten des Dreiecks ABC sind.

Die Hilfsmittelfrage beim RA führt zu der Umkehrung des Satzes von Ceva als Hilfsmittel und somit zu dem hinreichenden Teilziel $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$.

Die Hilfsmittelfrage beim VA führt zum Satz über Tangentenabschnitte als Hilfsmittel und damit zu den ableitbaren



Feststellungen $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{FB}$ und $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DC}$, von denen ausgehend man das hinreichende Teilziel leicht erreichen kann.

Bei der *Aufgabe 9*) erkennt man durch VA, daß wegen der Symmetrieeigenschaft von Drachenvierecken $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{DM}$ gilt und daß man daher die Behauptung $\frac{a}{b} = \frac{AM \cdot BM}{CM \cdot DM}$ aus der hinreichenden Feststellung $\frac{a}{b} = \frac{AM}{CM}$ sofort ableiten könnte.

Die Hilfsmittelfrage beim RA deutet nun auf "Ähnlichkeit / Strahlensätze" oder auf "Inhaltsformel" als Hilfsmittel hin.

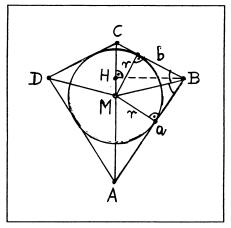
Da in der Figur keine ähnlichen Dreiecke zu erkennen sind. versucht man es mit dem letztgenannten Hilfsmittel.

Es gilt
$$J(MAB) = \frac{1}{2}\overline{MA} \cdot h = \frac{1}{2}a \cdot r$$
, also $a = \overline{MA} \cdot \frac{h}{r}$

sowie
$$J(MCB) = \frac{1}{2}\overline{MC} \cdot h = \frac{1}{2}b \cdot r$$
, also $b = \overline{MC} \cdot \frac{h}{r}$.

Hieraus folgt unmittelbar das hinreichende Teilziel, womit dann ein Lösungsweg gefunden ist.

Noch schneller gelangt man ans Ziel, wenn man beachtet, daß BM als Zentrale den Winkel ∢CBA halbiert und daß dann die Winkelhalbierende BM im Dreieck CAB die Seite CA im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt. Damit hat man das oben genannte hinreichende Teilziel errreicht.



Von etwas höherem Schwierigkeitsgrad ist die Aufgabe 10)

Zunächst wird man sich anhand der Figur davon überzeugen, daß sich die Ecktransversalen EA2, FB2, GC2 in einem Punkt schneiden, wenn dies für die Ecktransversalen AA1, BB1, CC1

Die Voraussetzung legt es nahe, mit dem Satz des Ceva ein ableitbares Teilziel zu gewinnen.

Die Behauptung legt es nahe, mit der Umkehrung des Satzes von Ceva ein hinreichendes Teilziel zu gewinnen.

Die Schwierigkeit der Aufgabe besteht darin, zwischen diesen Teilzielen einen Weg zu finden und zu erkennen, daß hierbei der Satz über die Mittellinie im Dreieck das geeignete Hilfsmittel ist.

V₁: Die Ecktransversalen
$$\overrightarrow{AA}_1$$
, \overrightarrow{BB}_1 , \overrightarrow{CC}_1 schneiden einander in P;

V₂: EFG ist das Mittelpunktsdreieck von ABC;

 V_3 : A_2 , B_2 , C_2 sind die Schnittpunkte von $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_2}$ bzw. $\overrightarrow{CC_2}$ mit \overrightarrow{FG} , \overrightarrow{GE} bzw. \overrightarrow{EF} ; Beh.: $\overrightarrow{EA_2}$, $\overrightarrow{FB_2}$, $\overrightarrow{GC_2}$ schneiden einander in Q .

$$V_1 \Rightarrow (1) \frac{AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1}{C_1B \cdot A_1C \cdot B_1A} = 1$$
; [Satz des Ceva].
 $V_2 \Rightarrow (2) \overline{AC_1} = 2 \cdot \overline{FC_2}$. [Mittellinie im $\triangle AC_1C$].

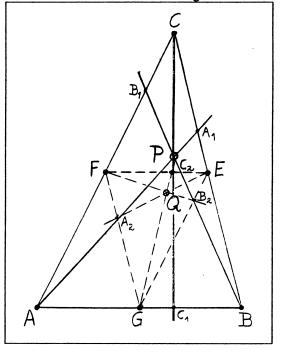
 $\overline{C_1B} = 2 \cdot \overline{C_2E}$; [Mittellinie im $\triangle C_1BC$]. $\overline{BA_1} = 2 \cdot \overline{GA_2}$; [Mittellinie im $\triangle BA_1A$].

$$\overrightarrow{A_1C} = 2 \cdot \overrightarrow{A_2F}$$

$$\overline{CB_1} = 2 \cdot \overline{EB_2}$$
;

$$B.A = 2 \cdot B_0G$$

$$(1),(2) \Rightarrow (3) \frac{FC_2 \cdot GA_2 \cdot EB_2}{C_2 E \cdot A_2 F \cdot B_2 G} = 1$$



[Mittellinie im △A₁CA].

[Mittellinie im $\triangle CB_1B$].

[Mittellinie im $\triangle B_1AB$].

[Einsetzen, Kürzen].

[Kehrwert].

(4), $V_3 \Rightarrow Beh.: \overrightarrow{EA_2}, \overrightarrow{FB_2}, \overrightarrow{GC_2}$ schneiden einander in Q ; [Umkehrung des Satzes von Ceva].

Von relativ hohem Schwierigkeitsgrad ist die *Aufgabe 11)*. Ihre Behandlung ist dennoch zu empfehlen, weil man hier den Einsatz von vielen unterschiedlichen heuristischen Vorgehensweisen wiederholen und demonstrieren kann.

V₁: AC = BC;

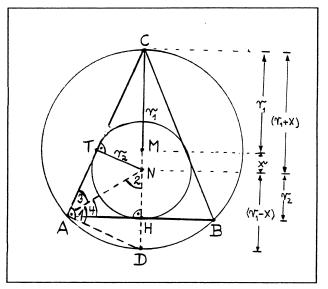
 V_2 : $k(M;r_1)$ ist der Umkreis von $\triangle ABC$;

 V_3 : $k(N;r_2)$ ist der Inkreis von $\triangle ABC$;

Beh.: $\overline{MN} = \sqrt{r_1(r_1 - 2r_2)}$.

Es ist günstig, wenn man die Richtigkeit der Behauptung zunächst durch eine *Probe am Spezialfall* überprüft. Im gleichseitigen Dreieck gilt $\mathbf{M} = \mathbf{N}$, also $\overline{\mathbf{M}}\overline{\mathbf{N}} = 0$. Wenn die Behauptung stimmt, dann müßte hier $r_1 = 2r_2$ gelten, was in der Tat zutrifft, weil hier \mathbf{M} und \mathbf{N} mit dem Schwerpunkt S zusammenfallen und daher $r_1: r_2 = 2:1$ gelten muß.

Ferner ist es günstig, die Beweisaufgabe in eine Bestimmungsaufgabe umzuwandeln,



indem man \overline{MN} = x setzt und fordert, x durch r_1 und r_2 auszudrücken. Dadurch wird nahegelegt, außer dem VA/RA auch die Strategie "Suche nach Gleichungen ..." einzusetzen.

Beim Zeichnen einer genauen *Planfigur* wird man den Umkreis und den Inkreis einzeichnen und die Bezeichnungen A, B, C, M, N eintragen. Als naheliegende Hilfslinien bieten sich allenfalls $\overline{MC} = r_1$ und $\overline{NT} = r_2$ an, wobei zu diesem Zeitpunkt noch nicht klar ist, an welcher Stelle man die Berührungsradien günstigerweise einzeichnet.

Da sich aus den Voraussetzungen nichts ableiten läßt, was uns offensichtlich dem Ziel näher bringen würde, wird man mit dem *Rückwärtsarbeiten* beginnen.

Da die Behauptung in ihrer vorliegenden Form auf kein brauchbares Hilfsmittel hinweist, wird man sie so lange umformen, bis dies der Fall ist.

Da alle vorkommenden Größen positiv sind, ist die Behauptung $x = \sqrt{r_1(r_1 - 2r_2)}$ äquivalent mit $x^2 = r_1^2 - 2r_1r_2$, also mit $(r_1 + x)(r_1 - x) = 2r_1r_2$, und diese Form der Behauptung weist nun auf die *Hilfsmittel* "Gleichheit von Inhalten", "Ähnlichkeit" oder "Sehnen-/Sekantensatz" hin, wobei das Hilfsmittel *"Ähnlichkeit"* die größten Chancen zu bieten scheint.

Dies legt es nahe, nach ähnlichen Dreiecken zu suchen, in denen die in der umgeformten Gleichung enthaltenen Größen vorkommen.

Im rechtwinkligen Dreieck CNT kommt $(r_1 + x)$ als Hypotenusenlänge und r_2 als Kathetenlänge vor, wodurch nahegelegt wird, der Behauptung die Form $(r_1 + x) : r_2 = 2r_1 : (r_1 - x)$ zu geben.

Nun liegt es nahe, den Durchmesser $\overrightarrow{CD} = 2r_1$, die Höhe \overrightarrow{CH} sowie die Strecke \overrightarrow{AD} als Hilfslinien einzuzeichnen.

Offensichtlich ist das Dreieck CDA nach dem Satz des Thales rechtwinklig, woraus sofort die Ähnlichkeit der Dreiecke CNT und CDA folgt.

Dies führt dann zum hinreichenden Teilziel (*) $\overrightarrow{AD} = r_1 - x$.

Nun empfiehlt es sich, die gefundenen Hilfspunkte durch Zusatzvoraussetzungen explizit einzuführen, um stets zu wissen, auf welche Eigenschaften dieser Hilfspunkte man zurückgreifen kann.

```
ZV_1: D \in k(M;r_1) und \overrightarrow{CD} ist Durchmesser von k(M;r_1); ZV_2: \overrightarrow{CD} \cap \overrightarrow{AB} = \{H\}; ZV_3: T \in \overrightarrow{AC} und \overrightarrow{NT} ist Berührungsradius von k(N;r_2).
```

Da laut Voraussetzung $\overrightarrow{ND} = r_1 - x$ gilt, führt weiteres *Rückwärtsarbeiten* von (*) zu $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{ND}$ und m.H. der *Umkehrung des Basiswinkelsatzes* dann zum hinreichenden Teilziel $\ll 1 = \ll 2$.

Nun versucht man, dieses Teilziel durch *Vorwärtsarbeiten* zu erreichen. Als *Hilfsmittel* kommen *Sätze über Winkel* in Dreiecken oder am Kreis in Frage. Die Bezeichnungen der benötigten Winkel werden in die Planfigur eingetragen.

Der Weg von den Voraussetzungen und den Zusatzvoraussetzungen zum hinreichenden Teilziel (*) kann dann wie folgt aussehen:

Das Formulieren des Beweises ist nun nur noch eine Frage erlernbarer Technik, wobei es jedoch erfahrungsgemäß auch in Klasse 10 meist noch einige Schüler gibt, die diese Technik nicht voll beherrschen. Deshalb sollte man mit solchen Schülern auch in Klasse 10 noch das Darstellen von Lösungen üben.

Vor allem sollte man hervorheben, daß alle geometrischen Objekte, die bei der Beweisdarstellung benötigt werden und die durch den Aufgabentext nicht explizit eingeführt sind, durch Zusatzvoraussetzungen explizit eingeführt werden müssen. Ferner ist stets zu überprüfen, ob kein Zirkelschluß vorliegt, d.h. ob zum Ableiten einer Feststellung nicht eine Feststellung verwendet wird, die weder vorausgesetzt noch bereits abgeleitet wurde. Und schließlich ist darauf zu achten, daß zu jeder abgeleiteten Feststellung auch das zugehörige Hilfsmittel (Satz, Definition, Axiom, Formel, Umformungsregel) angegeben wird.

Eine Überprüfung der diesbezüglichen Korrektheit und Vollständigkeit eines Beweises ist besonders leicht möglich, wenn dieser Beweis in Form eines *Beweisschemas* dargestellt wird. Da diese Darstellungsform auch den Vorteil der Kürze und Übersichtlichkeit besitzt, wird sie von uns in der Regel für das schriftlichen Festhalten an der Wandtafel eingesetzt. Die Überführung in eine ausführliche, sprachlich gefällige Form ist im Prinzip problemlos, sollte jedoch bei einer mündlichen Darstellung der Beweise immer wieder geübt werden.

Die Darstellung des von uns gefundenen Beweises in Form eines Beweisschemas kann wie folgt aussehen:

```
V_1: \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC};

V_2: k(M;r_1) ist der Umkreis von \triangle ABC;

V_3: k(N;r_2) ist der Inkreis von \triangle ABC;

Beh.: \overrightarrow{MN} = x = \sqrt{r_1(r_1 - 2r_2)}.

Beweis:

ZV_1: D \in k(M;r_1) und \overrightarrow{AD} ist Durchmesser von k(M;r_1);

ZV_2: \overrightarrow{CD} \cap \overrightarrow{AB} = \{H\};

ZV_3: T \in \overrightarrow{AC} und \overrightarrow{NT} ist Berührungsradius von k(N;r_2).
```

 $ZV_1 \Rightarrow (1) \triangleleft DAC = 90^\circ$; [Satz des Thales]. V_1 , $ZV_{2.3} \Rightarrow (2) \blacktriangleleft CHA = 90°$: [CH ist Höhe]. V_{3} , (1) \Rightarrow (3) \triangleleft DAN = 90° - \triangleleft NAC; [N liegt im Inneren von ∢DAC]. $ZV_{1,2,3}$, (2) \Rightarrow (4) (\angle ANH=) \angle AND = 90° - \angle HAN; [N,H \in \overline{CD} ; Innenwinkelsatz für \triangle AHN]. V_3 , $ZV_2 \Rightarrow$ (5) (≼BAN =) ≼HAN = ≼NAC; [H∈ĀB;ĀN ist Zentrale des Tangentenpaars AB, AC an k(N;r2)]. $(3),(4),(5) \Rightarrow (6) \triangleleft DAN = \triangleleft AND;$ [Umformung]. (6) \Rightarrow (7) $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DN}$; $V_{1,3}$, $ZV_1 \Rightarrow$ (8) $\overrightarrow{CN} = r_1 + x$; $\overrightarrow{DN} = r_1 - x$; [Basiswinkelsatz für ANAD]. $[M, N \in \overline{CD}, \overline{MD} = \overline{MC} = r_1, \overline{MN} = x].$ \Rightarrow (9) $\overrightarrow{DA} = r_1 - x$; (7),(8)[Drittengleichheit] . $ZV_{1.3}$, (1) \Rightarrow (10) $\triangle CNT \sim \triangle CDA$; [∢TCN=∢ACD, ∢NTC=∢DAC(=90°)]. \Rightarrow (11) $\overrightarrow{CN} : \overrightarrow{NT} = \overrightarrow{CD} : \overrightarrow{DA} :$ (10)[Ähnlichkeitssatz]. $ZV_{1,3}(8)(9) \Rightarrow (12) (r_1 + x) : r_2 = 2r_1 : (r_1 - x);$ [CD = 2r₁, NT = r₂, Einsetzen]. \Rightarrow Beh. $x = \sqrt{r_1(r_1 - 2r_2)}$; [Umformung].

Bei Aufgabe 12) wird man die Schüler auffordern, zunächst nach einer Beziehung zwischen den Teilaufgaben a) und b) zu suchen.

Wenn es gelungen ist, nachzuweisen, daß H' auf $\mathrm{CH_c}$ liegt, dann kann man analog nachweisen, daß H' auch auf $\mathrm{BH_b}$ und auf $\mathrm{AH_a}$ liegt, woraus dann folgt, daß H' der Höhenschnittpunkt von Dreieck ABC ist.

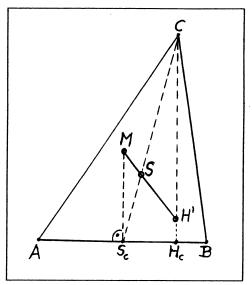
Folglich ist Aufgabe 12a) eine hinreichende Hilfsaufgabe für Aufgabe 12b), und wir brauchen uns daher nur noch mit Aufgabe 12a) zu befassen.

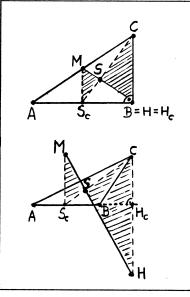
Beim *Rückwärtsarbeiten* erkennt man, daß H' auf CH_c liegen würde, wenn $CH' \perp AB$ gelten würde, was wegen $MS_c \perp AB$ (leicht ableitbar aus der Tatsache, daß M auf der Mittelsenkrechten von AB liegt) aus $MS_c \parallel CH'$ folgen würde.

Dieses hinreichende Teilziel deutet u.a. auf das Hilfsmittel "Umkehrung eines Strahlensatzes" hin, was sehr chancenreich ist, weil in der Figur eine Strahlensatzfigur vorkommt.

Der Rest ist leicht durch *Vorwärtsarbeiten* zu bewältigen. Nach dem Satz über den Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden gilt $\overline{SS}_c: \overline{SC} = 1:2$, nach Voraussetzung gilt $\overline{SM}: \overline{SH}' = 1:2$, also gilt $\overline{SS}_c: \overline{SC} = \overline{SM}: \overline{SH}'$, woraus dann. $\overline{MS}_c||CH'|$ folgt, und womit ein Lösungsweg gefunden wurde.

Unser Lösungsplan ist noch mit dem Mangel behaftet, daß er für den Spezialfall eines spitzwinkligen Dreiecks gefunden wurde und wir uns nicht überzeugt haben, ob der Beweis problemlos auf stumpfwinklige oder rechtwinklige Dreiecke übertragen werden kann. Auch ist von vornherein nicht klar, daß auch in diesen Fällen S stets auf der Strecke MH liegen muß, wenn H den Höhenschnittpunkt bezeichnet. Daß all dies zutrifft, ist der nebenstehenden Abbildung zu entnehmen.





Nach dem Durchlesen der Aufgabenstellung von Aufgabe 13) sollte man die Schüler auffordern, die Beziehung dieser Aufgabe zur Aufgabe 12) festzustellen.

Um zu zeigen, daß der Satz über die Eulersche Gerade eine Umkehrung des in Aufgabe 12) bewiesenen Satzes ist, halte man seine Voraussetzungen und seine Behauptung wie folgt fest:

V₁: M ist der Umkreismittelpunkt von △ABC; (△ABC nicht gleichseitig);

V₂: S ist der Schwerpunkt von △ABC;

V₃: H ist der Höhenschnittpunkt von △ABC;

Beh.: H liegt auf der Geraden MS und es gilt MS: SH = 1:2.

Vertauscht man die Behauptung mit der Voraussetzung V_3 und schreibt H' statt H, dann erhält man den in Aufgabe 12) bewiesenen Satz.

Dies legt es nahe, den Satz über die Eulersche Gerade *indirekt* zu *beweisen*, wobei man den Satz aus Aufgabe 12) als Beweismittel benutzt.

Unter Beachtung der Morganschen Regel gewinnt man aus der Behauptung die folgende Gegenannahme unseres Satzes:

GA: H liegt nicht auf MS oder $\overline{MS}: \overline{SH} \neq 1:2$.

Es sind daher folgende Fälle zu unterscheiden:

 GA_1 : H liegt auf MS und es gilt \overline{MS} : $\overline{SH} \neq 1:2$;

 GA_2 : H liegt nicht auf MS und es gilt \overline{MS} : \overline{SH} = 1 : 2;

 GA_3 : H liegt nicht auf MS und es gilt \overline{MS} : $\overline{SH} \neq 1:2$.

Aus GA_1 folgt, daß es genau ein $H^* \neq H$ auf MS gibt, für das \overline{MS} : $\overline{SH^*} = 1:2$ gilt. Die Anwendung des Satzes aus Aufgabe 12) liefert dann sofort den Widerspruch, daß $H^* = H$ gelten müßte

Die anderen beiden Fälle sind nicht ganz so leicht zu bewältigen. In der Regel sollte man auf ihre Behandlung verzichten und sich damit begnügen, mit den Schülern die Problemtik "Satz - Umkehrung" sowie "Beweis von Umkehrungen" zu wiederholen.

Recht umfangreich ist die Aufgabe 14), in der der Satz über den Feuerbachschen Kreis bewiesen werden soll.

Die Aufspaltung in die Teilaufgaben a) bis d) stellt eine wesentliche Erleichterung dar, weil es dadurch den Schülern erspart wird, die benötigten Hilfsaufgaben selbst zu finden.

Bei Zeitmangel oder mit leistungsschwächeren Schülern kann man auf diese Beweise verzichten und sich damit begnügen, daß die Schüler beim Lösen der Teilaufgabe 14e) nachweisen, daß sie diesen Satz verstanden haben.

Lösung von Aufgabe 14e):

Wenn $\angle BCA = 90^{\circ}$, dann $H = C = H_a = H_b = H_3$ und $M = S_c$ und $S_a = H_2$ und $S_b = H_1$.

Wenn $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$, dann $H,O,M \in CH_c$, d.h. CH_c ist die Eulersche Gerade.

Wenn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, dann H = O = M und $H_a = S_a$ und $H_b = S_b$ und $H_c = S_c$.

Aufgabe 14a):

Aus den Voraussetzungen folgt, daß $\overline{S_bS_a}$ Mittellinie im $\triangle ABC$ ist und daher $\overline{S_bS_a} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ und $S_bS_a||AB$ gilt.

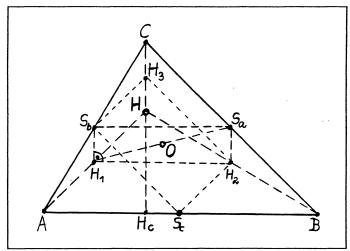
Desgleichen folgt, daß $\overline{H_1H_2}$ Mittellinie im $\triangle ABH$ ist und daher $\overline{H_1H_2} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ und $H_1H_2||AB|$ gilt.

Hieraus folgt dann $\overline{S_bS_a} = \overline{H_1H_2}$ und $S_bS_a||H_1H_2$, d.h. $H_1H_2S_aS_b$ ist ein Parallelogramm.

Da $\overline{H_1S_b}$ Mittellinie im \triangle HCA ist, gilt $H_1S_b||HC$, wegen $HC\perp AB$ und damit auch $HC\perp S_bS_a$ folgt hieraus $H_1S_b\perp S_bS_a$, d.h. $H_1H_2S_aS_b$ ist sogar ein Rechteck.

Hieraus folgt dann, daß H_1 , H_2 , S_a und S_b auf dem Kreis k(O;r) liegen, wobei O der Mittelpunkt der Diagonalen $\overline{H_1S_a}$ ist. Damit ist der geforderte Beweis erbracht.

Analog kann man zeigen, daß auch $H_2H_3S_bS_c$ ein Rechteck ist. Da es mit dem oben genannten Rechteck die Diagonale H_2S_b gemeinsam hat, besitzt es auch den Umkreis k(O;r). Damit ist der in *Aufgabe 12b*) geforderte Beweis erbracht.



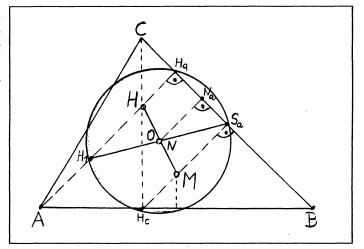
Sehr leicht zu lösen ist die Aufgabe 14c).

Da $\overline{H_1S_a}$ ein Durchmesser des Feuerbachschen Kreises ist und da nach Voraussetzung $\not \subset H_1H_aS_a = 90^\circ$ gilt, liegt H_a nach einer Umkehrung des Satzes des Thales auf diesem Kreis.

Von höherem Schwierigkeitsgrad ist die Aufgabe 14d). Hier ist es günstig, vorauszusetzen, daß N der Mittelpunkt von HM ist und dann zu zeigen, daß N mit dem Mittelpunkt O des Feuerbachschen Kreises zusamenfällt.

- V₁: H ist der Höhenschnittpunkt von △ABC;
- V₂: M ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von △ABC;
- V₃: O ist der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises;
- V_4 : N ist der Mittelpunkt von \overrightarrow{HM} ;

Beh.: N = O.



Wir führen durch eine Zusatzvoraussetzung ZV den Hilfspunkt N_a als den Lotfußpunkt von N auf BC ein.

Aus V_1 und V_2 und der Definition von H_a und S_a folgt dann, daß S_aH_aHM ein Trapez mit $HH_a||MS_a$ ist und daß wegen ZV auch $NN_a||HH_a||MS_a$ gilt.

Aus V_4 folgt dann, daß $\overline{NN_a}$ die Mittelparallele und damit auch die Mittellinie in diesem Trapez ist, d.h. daß N_a der Mittelpunkt von $\overline{H_aS_a}$ ist.

Folglich ist NN_a die Mittelsenkrechte der Strecke HaSa.

Aus V_3 und den bereits bewiesenen Sätzen folgt, daß $\overline{H_aS_a}$ eine Sehne des Feuerbachschen Kreises ist.

Da die Mittelsenkrechte der Sehne eines Kreises stets durch den Mittelpunkt dieses Kreises geht, muß N = O gelten, w.z.b.w.

Die Aufgabe 15) sollte man dazu nutzen, das selbständige Wiederholen unter Verwendung des Arbeitsmaterials aus früheren Klassen zu üben. Folgendes sollte hervorgehoben werden: Konstruktionsaufgaben gehören - neben zahlentheoretischen Bestimmungsaufgaben, dem Lösen von Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen, geometrischen Ortsaufgaben

und gewissen logisch-kombinatorischen Aufgaben - zu demjenigen Aufgabentyp, bei dem neben der Angabe der gesuchten Erfüllungsmenge auch ein *Einzigkeitsnachweis* und ein *Existenznachweis* gehören. An die Stelle der Angabe der Erfüllungsmenge tritt hier die Angabe einer algorithmischen Vorschrift, mit deren Hilfe man alle und auch nur diejenigen untereinander nicht kongruenten Figuren konstruieren kann, die die gestellten Bedingungen erfüllen.

Auch die Ortsaufgaben gehören zu diesem Aufgabentyp, wobei man hier die Erfüllungsmenge in der Regel nicht als Ergebnis des Einzigkeitsnachweises (der begründeten Herleitung) gewinnt, sondern durch Betrachtung von speziellen Punkten errät.

Beim Lösen von Konstruktionsaufgaben treten Ortsaufgaben als *Hilfsaufgaben* auf, beim Lösen von Ortsaufgaben treten stets zwei geometrische Beweisaufgaben als Hilfsaufgaben auf, die im Beweis eines Satzes und seiner Umkehrung (Einzigkeits- und Existenznachweis oder umgekehrt) bestehen. Dabei wird die Umkehrung oft indirekt bewiesen, wobei man entweder den Ausgangssatz als Beweismittel verwendet oder der beim Beweis des Satzes erfolgreichen Beweisidee folgt.

Jede Konstruktionsaufgabe läßt sich so umformulieren, daß entweder nur Punkte gesucht und Punkte nebst Bedingen gegeben sind oder daß Streckenlängen gesucht und Streckenlängen nebst Bedingungen gegeben sind. Im erstgenannten Fall wird die *Methode der geometrsichen Örter* oder die *Methode der Hilfselemente* eingesetzt, im letztgenannten Fall verwendet man die *algebraische Methode*,

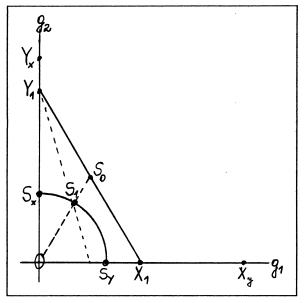
Die Methode der geometrischen Örter bedeutet eine Anwendung der allgemeineren *Methode der Durchschnittsbildung von Erfüllungsmengen*, die Methode der Hilfselemente ist eine spezielle Variante des *kombinierten Vorwärts- und Rückwärtsarbeitens*, die algebraische Methode eine Anwendung des allgemeinen *Transformationsprinzips* (Übersetzen in die Sprache der Arithmetik).

In Aufgabe 16) ist der geometrische Ort aller Punkte S zu ermitteln, die folgende Bedingung erfüllen:

S ist der Schwerpunkt des Dreiecks OXY, wobei $X \in g_1$, $Y \in g_2$, $\overrightarrow{XY} = 6$, mit $g_1 \cap g_2 = \{0\}$ und $g_1 \perp g_2$ gilt.

Offensichtlich kann man sich aus Symmetriegründen bei der Suche nach einem Lösungsweg auf eine der vier Viertelebenen beschränken, in die $\rm g_1$ und $\rm g_2$ die Ebene zerlegen.

Wir konstruieren zunächst ein spezielles Dreieck OX_1Y_1 und seinen Schwerpunkt S_1 , die die gestellten Bedingungen erfüllen. Dazu benötigen wir den Mittelpunkt S_O von $\overline{X_1Y_1}$ als Hilfspunkt. Es gilt $\overline{OS}_1 = \frac{2}{3} \overline{OS}_O$.



Dann betrachten wir die "Grenzfälle" X = O, $Y = Y_x$, $S = S_x$ und Y = O, $X = X_y$, $S = S_y$, in denen das Dreieck zu einer doppelt durchlaufenen Strecke $\overline{OY_x}$ bzw. $\overline{OX_y}$ entartet. Man erkennt, daß $\overline{OS_y} = \frac{1}{3}\overline{OX_y}$, $\overline{OS_x} = \frac{1}{3}\overline{OY_x}$ gilt.

Bei elementaren (d.h. nur mit Zirkel und Lineal auszuführenden) Konstruktionen sind als geometrische Örter nur Geraden, Strahlen, Strecken, Kreise oder Kreisbögen zugelassen. Wenn der hier gesuchte GO zu dieser einfachen Art gehört, dann kann es in der betrachteten Viertelebene nur ein Kreisbogen, in der gesamten Ebene also ein Kreis sein (wenn man die erwähnten entarteten Dreiecke mit in die Betrachtung einbezieht). Dies führt zu folgender

Vermutung: $GO = k(O; r = \frac{1}{3}\overline{XY} = 2)$.

Sicherheitshalber überprüfen wir diese Vermutung anhand eines weiteren speziell gewählten Dreiecks OX_2Y_2 .

Wir bezeichnen die zweite und dritte Zeile der oben gegebene Bedingung mit V_0 (die als "gemeinsame Voraussetzung" beim Einzigkeitsnachweis und beim Existenznachweis auftauchen wird).

Der Beweis der Vermutung besteht dann im Beweis des folgenden *Genau-dann-wenn-Satzes*: $V_0 \Rightarrow [S \text{ ist der Schwerpunkt von } \triangle AXY \Leftrightarrow S \in k(0; \frac{1}{3}\overline{XY})].$

Es sind also folgende beiden Wenn-dann-Sätze zu beweisen:

- (I) V_0 und (S ist der Schwerpunkt von $\triangle OXY$) $\Rightarrow S \in k(O; \frac{1}{3}\overline{XY})$; (Einzigkeitsnachweis).
- (II) V_0 und $S \in k(O; \frac{1}{3}\overrightarrow{XY}) \Rightarrow S$ ist der Schwerpunkt von $\triangle OXY$; (Existenznachweis).

Beweis von (I):

Wir führen $\stackrel{\smile}{S_0}$ durch eine Zusatzvoraussetzung ZV als den Mittelpunkt von $\stackrel{\smile}{XY}$ ein.

Aus ZV und V_0 folgt dann (1) \overline{OS}_0 ist Seitenhalbierende von $\triangle XYO$.

Nach einer Umkehrung des Satzes des Thales folgt aus ZV und V_0 weiterhin die Feststellung (2) $\overline{S_0O} = \overline{S_0X} = \overline{S_0Y} = \frac{1}{2}\overline{XY}$.

Laut Voraussetzung ist S der Schwerpunkt in $\triangle XYO$, also gilt (3) $\overrightarrow{OS} = \frac{2}{3} \overrightarrow{OS_O}$.

Aus (2) und (3) folgt dann $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{XY}$, also $S \in k(O; \frac{1}{3}\overrightarrow{XY})$, w.z.b.w.

Beweis von (II) [indirekt]:

Wie oben folgen aus ZV und V_0 die Feststellungen (1) und (2).

Wäre $S \in \overline{OS}_0$ kein Schwerpunkt von $\triangle XYO$, dann würde $\overline{OS} < \frac{2}{3}\overline{OS}_0$ oder $\overline{OS} > \frac{2}{3}\overline{OS}_0$ gelten, woraus wegen (2) dann $\overline{OS} < \frac{1}{3}\overline{XY}$ oder $\overline{OS} > \frac{1}{3}\overline{XY}$ und somit $S \notin k(O; \frac{1}{3}\overline{XY})$ folgen würde, im Widerspruch zur Voraussetzung unseres Satzes.

(Wir sind beim indirekten Beweis der Umkehrung der Beweisidee für den direkten Beweis des Ausgangssatzes gefolgt.)

Bei Aufgabe 17) erkennt man leicht, daß hier die Methode der geometrischen Örter nicht sofort zum Ziel führt. Also wird man versuchen, die Methode der Hilfselemente anzuwenden.

Ges.: Vierecke ABCD.

- Bedingungen: (a) ABCD ist ein Trapez mit AB||CD und AC∩BD = {S};
 - (b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = s = 12cm$;
 - (c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = d = 15cm$;
 - (d) $\angle ASB = \varphi = 100^{\circ}$;
 - (e) $\angle CAD = \varepsilon = 70^{\circ}$.

Da man stets mit dem Konstruieren einer Strecke beginnen soll, wird man im ersten Konstruktionsschritt entweder von der Bedingung (b) oder von der Bedingung (c) ausgehen. Ferner ist klar, daß man m.H. einer Streckenabtragung und das Einführen von Hilfspunkten Strecken mit den gegebenen Längen erst erzeugen muß. Dafür gibt es im Prinzip stets mehrere Möglichkeiten. Da man mit den Hilfspunkten stets Hilfsfiguren erzeugen möchte, über die man möglichst viel weiß, wird man die Hilfspunkte E bzw. F durch Streckenabtragung so einführen, daß das Parallelogramm BECD und das gleichschenklige Dreieck EFC entstehen.

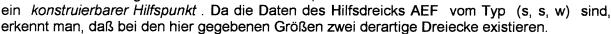
Dadurch bietet sich das Dreieck AEF als Hilfsdreieck an, von dem wir die beiden Seitenlängen AE = s und $\overline{AF} = d$ kennen.

Offensichtlich müssen wir einen Winkel als drittes Bestimmungsstück ermitteln. Laut Stufenwinkelsatz gilt dem Basiswinkelsatz für das Dreieck $\angle CFE = \angle FEC = \frac{1}{2}\varphi$.

Folglich werden wir von Bedingung (c) ausgehen und die ("grün" zu zeichnenden) Punkte A und F als gegebene Punkte wählen.

B, C, D die ("rot" einzuzeichnenden) Dann sind gesuchten Punkte und E ein ("blau" einzuzeichnender) Hilfspunkt.

Da wir für E zwei geometrische Örter kennen, ist E



Man erkennt recht leicht, daß sich nun die gesuchten Punkte B, D, C in dieser Reihenfolge konstruieren lassen, weil man jeweils zwei geometrische Örter kennt.

Den kurzen Lösungsplan kann man dann wie folgt festhalten: A, F / E_{1,2} , C_{1,2} , D_{1,2} , B_{1,2} .

Beim ausführlichen Lösungsplan müßte man zu jedem Punkt, der zu konstruieren ist, jeweils die beiden geometrischen Örter vermerken.

So gelangt man zu der folgenden

Konstruktionsbeschreibung:

(1) $\overrightarrow{AF} = d = 15cm$;

(2) **FX** mit $\angle AFX = \frac{1}{2} \varphi = 50^{\circ}$;

(3) $k(A; s = 12cm) \cap FX = \{ E_1; E_2 \}$;

(4) $\overline{E_{1,2}Y_{1,2}}$ mit $\angle FE_{1,2}Y_{1,2} = \frac{1}{2}\phi = 50^\circ$;

(5) $\overline{E_{12}Y_{12}} \cap \overline{AF} = \{C_1, C_2\};$

(6) $g_{1,2}$ mit $g_{1,2}||AE_{1,2}$ und $C_{1,2} \in g_{1,2}$; (7) \overrightarrow{AZ} mit $\not < C_{1,2}\overrightarrow{AZ} = \varepsilon = 70^{\circ}$;

(8) $\overrightarrow{AZ} \cap g_{12} = \{ D_1, D_2 \}$

(9) $k(E_{1,2}; \overline{CD}) \cap \overline{AE}_{1,2} = \{ B_1; B_2 \}.$

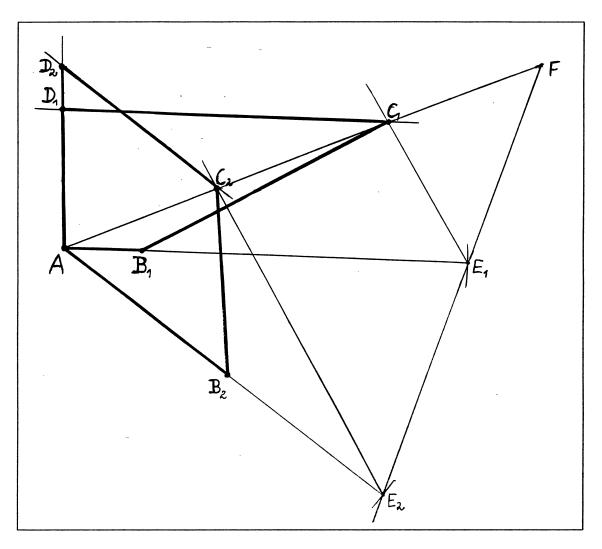
AB₁C₁D₁ und AB₂C₂D₂ sind zwei verschiedene Lösungen unserer Aufgabe.

Mit Ausnahme von Schritt (3) sind alle Konstruktionsschritte unbeschränkt und eindeutig ausführbar.

Die Konstruktionsbeschreibung wurde unter Verwendung einer abkürzenden Schreibweise festgehalten. Man achte darauf, daß die Schüler die Konstruktionsbeschreibung mündlich ausführlich formulieren, z.B.:

(2) Man trage an die Strecke AF im Punkt F den freien Schenkel FX des Winkels mit der Größe von 50° an. (Dabei wird ≪AFX als orientierter Winkel aufgefaßt, womit eindeutig festgelegt wird, in welcher der von AF erzeugten Halbebenen der freie Schenkel anzutragen ist.)

Auch wenn eine Konstruktionszeichnung nicht verlangt wird, sollte man sie stets anfertigen, um einerseits die Korrektheit der Konstruktionsbeschreibung zu überprüfen und andererseits zu einer begründeten Vermutung zu gelangen, ob die beiden so erhaltenen Vierecke kongruent sind oder nicht. In unserem Fall erkennt man, daß die beiden Trapeze nicht kongruent sind,



Im Einzigkeitsnachweis ist nun zu zeigen:

Wenn ein Viereck ABCD die gestellten Bedingungen erfüllt, dann kann es wie beschrieben konstruiert werden. Dies läßt sich kurz und unmißverständlich wie folgt festhalten:

$$(a),(b),(c),(d) \Rightarrow (1),(2),(3), \dots,(9)$$

Beim Einzigkeitsnachweis müssen die verwendeten *Hilfspunkte* eingangs durch *Zusatzvoraussetzungen* explizit eingeführt werden, wobei in der Regel ihre eindeutige Existenz gesichert sein muß. Bei uns gilt:

$$ZV_1$$
: $E \in \overrightarrow{AB}$ mit $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC}$, d.h. $\overrightarrow{AE} = s$;

$$ZV_2$$
: $F \in \overrightarrow{AC}$ mit $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BD}$, d.h. $\overrightarrow{AF} = d$.

Es gibt Autoren, die den (dann meist "Analysis" genannten) Einzigkeitsnachweis mit der Lösungsfindung identifizieren. Dies ist nicht gerechtfertigt. Einerseits haben heuristische Überlegungen, die zu brauchbaren Hilfspunkten führen, im Einzigkeitsnachweis nichts zu suchen. Andererseits wird durch die notwendige Festlegung der Hilfspunkte im Einzigkeitsnachweis nichts darüber ausgesagt, wie man sie finden könnte.

Im Existenzsnachweis ist die Umkehrung des oben genannten Satzes zu beweisen:

$$(1),(2),(3),...,(9) \Rightarrow (a),(b),(c),(d)$$
.

Man beginne stets mit dem Beweis derjenigen Bedingungen, deren Erfülltsein unmittelbar aus einem der Konstruktionsschritte folgt. Es kann nämlich vorkommen, daß eine dieser sofort ableitbaren Bedingungen für das Ableiten der restlichen Bedingungen benötigt wird.

Einzigkeitsnachweis:

Wenn ein Viereck ABCD die Bedingungen (a), (b), (c), (d) erfüllt, dann gilt:

Es gibt genau einen Punkt E, der ZV₁ erfüllt, und es gibt genau einen Punkt F, der ZV₂ erfüllt.

Die Punkte A und F sind durch (c) und ZV_2 eindeutig bestimmt.

Wegen ZV_1 und (a) ist BECD ein Parallelogramm, also gilt BD||EC und $\overline{BD} = \overline{EC}$. Aus (d) folgt daher nach dem Stufenwinkelsatz $\angle ACE = \angle ASB = \varphi$.

Aus ZV_2 folgt dann $\overline{CF} = \overline{BD} = \overline{CE}$. Nach dem Basiswinkelsatz und dem Außenwinkelsatz für Dreieck EFC gilt daher (*) \checkmark CFE = \checkmark FEC = $\frac{1}{2}\phi$.

Wegen (*), (b) und ZV_1 liegt daher E sowohl auf dem freien Schenkel des Winkels \ll AFE = $\frac{1}{2}\phi$ als auch auf dem Kreis k(A;s).

Wegen ZV_2 und (*) liegt C sowohl auf \overline{AF} als auch auf dem freien Schenkel des Winkels \sphericalangle FEC = $\frac{1}{2}\phi$.

Wegen (a) und (e) liegt D sowohl auf der Parallelen g zu AE durch C als auch auf dem freien Schenkel des Winkels \angle FAD = ε .

Wegen ZV₁ liegt B sowohl auf ĀĒ als auch auf k(E; CD).

Damit ist gezeigt:

Wenn ein Viereck ABCD die Bedingungen (a), (b), (c), (d) erfüllt, dann läßt es sich wie in (1),(2), ...,(9) beschrieben konstruieren.

Existenznachweis:

Wenn ein Viereck ABCD nach (1),(2), ...,(9) konstruiert wurde, dann gilt:

Wegen (6), (8) und (9) gilt AB||CD, also ist (a) erfüllt.

Wegen (7) und (8) gilt \triangleleft CAD = ε , also ist (e) erfüllt.

Wegen (3) und (9) gilt $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = s$, also ist (b) erfüllt.

Wegen (2), (3), (4) und dem Außenwinkelsatz für Dreieck EFC gilt ∢ACE = φ.

Wegen (6), (8), (9) ist BECD ein Parallelogramm, also gilt BEIIEC und BE = EC.

Nach dem Stufenwinkelsatz gilt dann ≪ASB = ≪ACE = φ , also ist (d) erfüllt.

Wegen (2), (3) und (4) sind die Basiswinkel im Dreieck EFC gleich groß, also gilt nach Umkehrung des Basiswinkelsatzes $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{FC}$; wegen $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{EC}$ und (1) sowie (5) folgt hieraus $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = d$, also ist auch (b) erfüllt.

Damit ist gezeigt:

Wenn ein Dreieck nach (1),(2), ...,(9) konstruiert wurde, dann erfüllt es die Bedingungen (a), (b), (c), (d) und e).

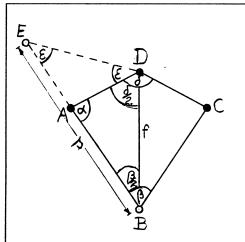
Die Lösungsfindung erfolgt bei Aufgabe 18) analog. Im Unterschied zu Aufgabe 17) sind jedoch keine konkreten Größen, sondern nur Parameter gegeben. Dies macht eine Determination erforderlich.

Offensichtlich wird man wegen Bedingung (b) den Hilfspunkt E so einführen, daß $E \in \overrightarrow{BA}$ mit $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD}$, also $\overrightarrow{BE} = s$ gilt.

Da außerdem \overrightarrow{BD} = f gegeben ist, bietet sich das Dreieck BED als Hilfsdreieck an. Wegen Bedingung (d) muß man nun versuchen, einen Winkel dieses Hilfsdreiecks durch den gegebenen Winkel $\phi = \beta + \delta$ auszudrücken.

Wegen (a) gilt \triangleleft DBA = $\frac{1}{2}\beta$ und \triangleleft ADB = $\frac{1}{2}\delta$.

Wegen AD = AE gilt ∢BED = ∢EDA = ε.



Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck BDE gilt daher $2 \cdot \epsilon + \frac{1}{2}(\beta + \delta) = 180^{\circ}$, also $\epsilon = 90^{\circ} - \frac{1}{4} \phi$ Folglich ist das Hilfsdreieck BDA aus s, f, ϵ konstruierbar, wobei es 2, 1 oder 0 derartige Dreiecke geben kann, je nach dem, ob k(B;f) den freien Schenkel ED von \angle BED schneidet, berührt oder meidet.

Der Rest ist einfach. Der kurze Lösungsplan lautet B, E / D_{1,21} A_{1,21} C_{1,2}

Bei Aufgabe 19) liegt es nahe, wegen Bedingung (b) mit der Strecke \overline{AB} = s zu beginnen. Wegen Bedingung (a) ist dann AB ein 1.g.O. für X, es ist aber nicht zu erkennen, wie die noch verbliebene Bedingung (c) einen 2.g.O. für X liefern könnte.

Wenn man mit der Methode der geometrischen Örter und auch der Methode der Hilfselemente scheitert, dann wird man versuchen, die algebraische Methode einzusetzen.

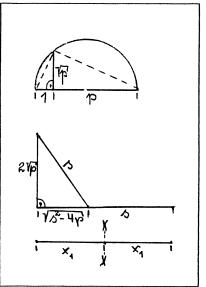
Zu diesem Zweck wird die Aufgabe so umformuliert, daß eine Streckenlänge gesucht und neben Bedingungen auch nur Streckenlängen gegeben sind.

Sei $\overline{AX} = x$ die gesuchte Streckenlänge und $\overline{AB} = s$ die gegebene Streckenlänge.

Wegen Bedingung (a) gilt dann $\overline{BX} = s - x$, und die Bedingung (c) nimmt die Gestalt

(c') $x \cdot (s - x) = p$ mit gegebenem s>0 und p>0 an. Dabei wird angenommen, daß s und p konstruierbar sind. Nun versuchen wir, x durch s und/oder p in der Form x = f(s;p) auszudrücken. Enthält der Term f(s;p) nur rationale Rechenoperationen oder Quadratwurzeln, dann ist dieser Term elementar konstruierbar und die zugehörige Konstruktionsaufgabe lösbar.

(c') ist äquivalent mit x^2 - sx + p = 0 , also mit $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{s^2 - 4p}$. Hieraus folgt, daß x elementar konstruierbar ist und daß es genau dann 2 , 1 oder 0 Punkte X gibt, die die Bedingungen (a), (b), (c) erfüllen, je nach dem, ob $s > 2 \cdot \sqrt{p}$, $s = 2 \cdot \sqrt{p}$ oder $s < 2 \cdot \sqrt{p}$ gilt.



Wie der Term f(s;p) konstruiert wird, ist in der obigen Abbildung angedeutet. Zunächst wird \sqrt{p} mit Hilfe des Höhensatzes, dann $\sqrt{s^2-4p}$ mit Hilfe von Streckenverdopplung und des Satzes von Pythagoras sowie schließlich f(s;p) mit Hilfe einer Streckenabtragung und einer Strekkenhalbierung konstruiert.

Im Zusammenhang mit *Aufgabe 20*) sollte man über die dort geforderte Wiederholung der "Begriffe und Sätze aus der Stereometrie" auch die beim Lösen stereometrischer Aufgaben einsetzbaren Methoden wiederholen.

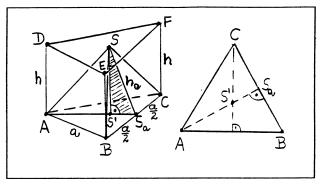
Im Vergleich zu planimetrischen Aufgaben kann bereits die Veranschaulichung der Aufgabenstellung problematisch sein. Besonders bei leistungsschwächeren Schülern sollte man bisweilen auch Körpermodelle zur Veranschaulichung heranziehen. Bei einer Planfigur ist jeweils zu entscheiden, ob es lohnt, ein Schrägbild zu zeichnen, oder ob es günstiger ist, eine Zweitafelprojektion, ein Netz, eine Abwicklung oder gewisse Schnittfiguren für eine Veranschaulichung der Aufgabe zu verwenden.

Die Schüler haben folgende Methoden zum Lösen stereometrischer Aufgaben kennengelernt:

- Rückführung auf planimetrische Aufgaben durch das Betrachten von günstig gewählten Schnittfiguren, von Abwicklungen oder Körpernetzen.
- b) Verwenden von Sätzen und Formeln aus der Stereometrie als Hilfsmittel .
- Analogiemethode, d.h.. Lösen einer analogen planimetrischen Aufgabe in der Hoffnung, den dort erfolgreichen Lösungsweg übertragen zu können.

Bei Aufgabe 21) empfiehlt sich ein Schrägbild zur Veranschaulichung der Aufgabenstellung, u.U. ergänzt durch das Bild der gemeinsamen Grundfläche von Prisma und Pyramide. Dabei ist es günstig, das Schrägbild so zu zeichnen, daß das Dreieck AS_aS in wahrer Größe erscheint.

Sei M_{Pr} der Inhalt der Mantelfläche des Prismas, das ein gleichseitiges Dreick mit der Seitenlänge a als Grundfläche sowie die Höhenlänge h besitzt, und sei M_{Pv} der In-



halt der Mantelfläche einer Pyramide, die mit dem Prisma die Grundfläche und die Höhenlänge gemeinsam hat.

Dann lautet die gegebene Bedingung

$$M_{Pr} = M_{Py}$$

Wie man sofort erkennt, gilt (1) $M_{Pr} = 3ah$.

Um M_{Py} zu berechnen, verwende man die *Schnittebenenmethode*. Durch *Rückwärtsarbeiten* gelangt man zur hinreichenden Hilfsgröße $\overline{SS}_a = h_a$, von hier aus (mit Hilfe des Satzes von Pythagoras) zu $\overline{S'S}_a$ und der gegebenen Größe h.

Durch *Vorwärtsarbeiten* gelangt man mit Hilfe des Satzes von Pythagoras zu $\overline{AS}_a = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot a$ und mit Hilfe des Satzes über den Schwerpunkt zu $\overline{S'S_a} = \frac{1}{6}\sqrt{3} \cdot a$ und damit zu $\overline{S'S_a}^2 = \frac{1}{12}a^2 + h^2$.

Folglich gilt (2)
$$M_{Py} = \frac{3}{2} a \sqrt{\frac{1}{12} a^2 + h^2}$$

Aus (1) und (2) folgt dann durch Umformen das gesuchte Resultat $h = \frac{1}{6}a$.

Eine etwas andere Lösungsidee besteht darin, aus den gegebenen Bedingungen zu folgern, daß J(ABED) = J(ABS), also $a \cdot h = \frac{1}{2} a \cdot h_a$ und somit $h_a = 2 \cdot h$.

Man ermittelt also h = f(a) so, daß diese Gleichung gilt.

Wegen $S \cdot S_a = \frac{1}{6} \sqrt{3} \cdot a$ und $h_a^2 = h^2 + S \cdot S_a^2$ sowie $h_a = 2h$ gelangt man über die Gleichung $4h^2 = h^2 + \frac{1}{12}a^2$ schließlich zu $h = \frac{1}{6}a$

Auch bei Aufgabe 22) ist ein Schrägbild die günstigste Möglichkeit für eine Veranschaulichung.

Da E und F die Mittelpunkte der Kanten BS bzw. CS sind, ist EF eine Mittellinie im Dreieck BCS, woraus EF||BC folgt.

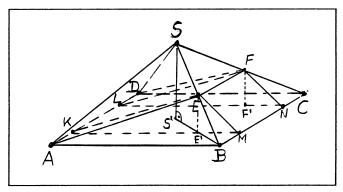
Da ABCD ein Quadrat ist, gilt BC||AD.

Hieraus folgt dann EF||AD, womit gezeigt ist, daß A, E, F, D in einer Ebene liegen, die die gegebene Pyramide in zwei Teilkörper zerlegt.

Das Verhältnis V_1 : V_2 der Volumina dieser Teilkörper ließe sich ermitteln, wenn man sowohl V_1 als auch V_2 durch die gleich große Länge a der acht Kanten der Pyramide ausdrücken könnte.

Zur Berechnung von V_1 und V_2 bietet sich eine Zerlegung der Pyramide in Teil-körper an.

Zwei zur Grundfläche ABCD senkrechte und zur Kante AB parallele Ebenen zer-



legen den unteren Teilkörper in ein Prisma KMELNF mit der Grundfläche KME und der Höhe EF sowie in zwei zueinander kongruente Pyramiden ABMKE und DCNLF.

Für das Volumen des unteren Teilkörpers gilt dann $V_1 = V_{Pr} + 2 \cdot V_{Py}$

Für das Volumen des oberen Teilkörpers gilt dann $V_2 = V - V_1$, wobei V das Volumen der gegebenen Pyramide ABCDS bezeichnet.

Kombiniertes VA/RA und die Schnittebenenmethode liefern die ableitbaren und die hinreichenden Hilfsgrößen. Dabei stößt man auf die Fußpunkte S', E', F' der Lote von S, E, F auf die von ABCD festgelegte Ebene als weitere Hilfspunkte.

Offensichtlich gilt $\overline{KM} = \overline{LN} = \overline{AB} = \overline{CD} = a$ und $\overline{EF} = \overline{MN} = \frac{1}{2}a$ sowie $\overline{BM} = \overline{NC} = \frac{1}{4}a$.

Der Satz des Pythagoras liefert $\overline{AS}' = \overline{SS}' = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot a$.

Hieraus folgt dann $V = \frac{1}{6} \sqrt{2} \cdot a^3$.

Laut Zusatzvoraussetzung gilt EE'||SS'; laut Voraussetzung ist E der Mittelpunkt von \overline{BS} ; folglich ist $\overline{EE'}$ eine Mittelparallele und damit auch eine Mittellinie im Dreieck BSS', woraus dann $\overline{EE'} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ a folgt.

Hieraus erhält man $V_{Pr} = \frac{1}{16} \sqrt{2} \cdot a^3$ und $V_{Py} = \frac{1}{48} \sqrt{2} \cdot a^3$, also

(1)
$$V_1 = V_{Pr} + 2 \cdot V_{Py} = \frac{5}{48} \cdot \sqrt{2} \cdot a^3$$
.

Hieraus folgt dann

(2)
$$V_2 = V - V_1 = \frac{3}{48} \cdot \sqrt{2} \cdot a^3$$
.

Folglich beträgt das gesuchte Verhältnis $V_1: V_2 = 5:3$.

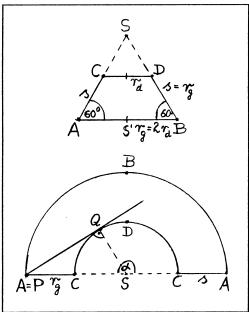
Bei Aufgabe 23) wird man den gegebenen geraden Kreiskegelstumpf, dessen Mantellinien um 60° gegen die Grundfläche geneigt sind, zunächst durch einen ebenen Schnitt veranschaulichen, der ein gleichschenkliges Trapez ABCD darstellt.

Da sich die Inhalte von Grund- und Deckfläche laut Voraussetzung wie 4:1 verhalten, verhält sich der Durchmesser AB der Grundfläche zum Durchmesser \overline{CD} der Deckfläche wie 2:1. Da der Gummifaden, dessen maximale Länge zu ermitteln ist, in der Mantelfläche liegt, wird man zusätzlich die Abwicklung der Mantelfläche betrachten, die auf jeden Fall ein Kreisringausschnitt ist. Würde man den Zentriwinkel α dieses Kreisringausschnitts kennen, dann könnte man diese Abwicklung konstruieren.

Nun ist die Erkennnis entscheidend, daß die Abwicklung der Mantelfläche des zugehörigen Kegels mit der Spitze S und dem Grundkreisdurchmesser \overline{AB} eine Halbkreisfläche ist, d.h. daß α = 180° gilt. Wegen $\overline{S'A}$ = $\frac{1}{2}\overline{SA}$ ist nämlich der Umfang des Grundkreises, der den Bogen des Kreisausschnitts bildet, halb so lang wie der Umfang des Kreises mit dem Radius \overline{SA} .

Auf diese Weise hat man die stereometrische Aufgabe auf eine planimetrische Aufgabe zurückgeführt. Es ist die maximale Länge einer Strecke \overrightarrow{PQ} zu ermitteln, deren einer Endpunkt P auf dem Halbkreis mit dem Radius \overrightarrow{SA} , deren anderer Endpunkt Q auf dem Halbkreis mit dem Radius \overrightarrow{SC} liegt und die ganz im Kreisringausschnitt liegt.

Wählt man o.B.d.A P=A, dann ist offensichtlich der Tangentenabschnitt \overline{AQ} die gesuchte Strecke mit maximaler Länge. (Würde man einen Punkt Q' auf dem Bogen \overline{QD} wählen, dann würde der Gummifaden AQ' die Mantelfläche verlassen und teilweise in der Deckfläche liegen.)



Der Rest ist einfach. Wegen $\overline{SA} = \overline{SP} = 2r_g$ und $\overline{SQ} = r_g$ gilt nach dem Satz des Pythagoras $max\{\overline{PQ}\} = \sqrt{3} \cdot r_g$.

Bei Aufgabe 24) ist wieder ein Achsenschnitt ein günstiges Mittel zur Veranschaulichung der Aufgabenstellung.

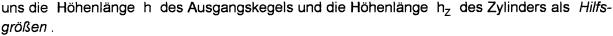
Man erhält das Volumen V_R des Restkörpers, indem man vom Volumen V_{Kg} des großen Ausgangskegels das Volumen V_{Kk} des kleinen Kegels an der Spitze sowie das Volumen V_Z des ausgebohrten Zylinders subtrahiert. Laut Aufgabenstellung soll dann

$$V_{R} = V_{Kg} - V_{Kk} - V_{Z} = \frac{1}{2}V_{Kg}$$
 gelten.

Dies ist äquivalent mit

(1)
$$V_Z + V_{Kk} = \frac{1}{2}V_{Kq}$$
.

Die Formeln für die in (1) vorkommenden Volumina liefern



Durch Einsetzen dieser Formeln in (1) erhält man die Gleichung

$$\pi r^2 h_Z + \frac{1}{3} \pi r^2 (h - h_Z) = \frac{1}{6} \pi R^2 h$$
, die äquivalent ist mit

(2)
$$4r^2h_7 = (R^2 - 2r^2)h$$
.

In dieser Gleichung treten außer der gegebenen Größe R und der gesuchten Größe r noch zwei zu eliminierende Hilfsgrößen auf. Hierzu werden in der Regel zwei weitere Gleichungen benötigt.

Wegen der Ähnlichkeit der in der Figur vorkommenden kleinen und großen rechtwinkligen Dreiecke gilt R: h = r: $(h - h_z)$, also

(3)
$$h_z = h(1 - \frac{r}{R})$$
.

Es ist überraschend, daß in diesem Falle die Gleichung (3) genügt, um in (2) beide Hilfsgrößen zu eliminieren. Durch Einsetzen von (3) in (2) erhält man

$$4r^2h(1-\frac{r}{R})=(R^2-2r^2)h$$
,

also

$$4r^2 - 4\frac{r^3}{R} = R^2 - 2r^2$$

und somit (4) $4r^3 - 6Rr^2 + R^3 = 0$.

Die größte Schwierigkeit dieser Aufgabe besteht nun darin, eine Lösung dieser Gleichung 3. Grades zu erraten.

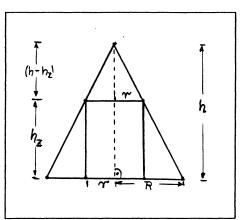
Es ist ratsam, zunächst einen günstigen Spezialfall zu betrachten.

Für R = 6 erhält man die Gleichung $4r^3 - 36r^2 + 216 = 0$, also $r^3 - 6r^2 + 54 = 0$, und mit Hilfe des Vietaschen Wurzelsatzes nebst Abspalten des zur erratenen Lösung gehörenden Linearfaktors gelangt man zur Gleichung $(r - 3)(r^2 - 6r - 18) = 0$. Der quadratische Term besitzt die Nullstellen $r_2 = 3 - 3\sqrt{3}$ und $r_3 = 3 + 3\sqrt{3}$, die wegen $r_2 < 0$ und $r_3 > R = 6$ keine Lösungen unserer Aufgabe liefern. Also ist r = 3 die einzige Lösung unserer speziellen Gleichung.

Da zu R = 6 die Lösung r = 3 gehört, liegt es nahe, zu vermuten, daß für beliebiges R die Gleichung (4) als einzige Lösung $r = \frac{1}{2}R$ besitzt.

In der Tat gilt
$$4 \cdot (\frac{1}{2}R)^3 - 6R(\frac{1}{2}R)^2 + R^3 = \frac{1}{2}R^3 - \frac{3}{2}R^3 + R^3 = 0$$
.

Damit ist gezeigt, daß $r = \frac{1}{2}R$ gilt.



Bei Aufgabe 25) wird man zunächst (auch in Hinblick auf die Aufgabe 28)) zunächst den Begriff regulärer Körper (Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder) wiederholen und begründen lassen, warum als Begrenzungsflächen nur gleichseitige Dreiecke, Vierecke oder Fünfecke, nicht aber auch gleichseitige Sechsecke, Siebenecke usw. vorkommen können.

Alle regulären Körper besitzen eine Umkugel und eine Inkugel, und es fallen die Mittelpunkte von Umkugel und Inkugel zusammen.

Der Umkugelradius r eines Würfels mit der Kantenlänge a ist gleich der halben Raumdiagonalen dieses Würfels, d.h. es gilt

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot a .$$

Für den Inkugelradius r₁ eines solchen Würfels gilt offensichtlich

$$\mathbf{r}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{a} .$$

Durch Einsetzen und Umformen folgt hieraus

(1)
$$r_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot r$$
.

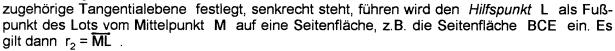
Nach Voraussetzung soll das zu betrachtende Oktaeder mit diesem Würfel den gemeinsamen Mittelpunkt M von Umkugel und Inkugel sowie den Umkugelradius r gemeinsam haben. Aus Symmetriegründen reicht es aus, nur die Hälfte eines solchen Oktaeders zu betrachten (vgl. Figur).

Wenn das Oktaeder die Kantenlänge b besitzt, dann ist sein Umkugelradius gleich der halben Diagonalen des Quadrats ABCD mit der Kantenlänge b, d.h. es gilt

(2)
$$r = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot b$$
.

Nicht ganz so einfach ist die Ermittlung des Inkugelradius r₂ dieses Oktaeders.

Da der Inkugelradius auf der Seitenfläche, die die



Da BCEM eine gerade Pyramide mit dem gleichseitigen Dreieck BCE als Grundfläche ist, ist der Lotfußpunkt L gleich dem Schwerpunkt dieses Dreiecks.

Führt man nun N als Mittelpunkt der Kante \overline{BC} ein, dann ist \overline{EN} eine Seitenhalbierende dieses Dreiecks und es gilt $\overline{LN} = \frac{1}{3}\overline{EN}$ sowie $\overline{LE} = \frac{2}{3}\overline{EN}$.

Da \overline{ML} Höhe im rechtwinkligen Dreieck NEM ist, gilt nach dem Höhensatz $\overline{ML}^2 = \overline{LN} \cdot \overline{LE}$, folglich $\overline{ML} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \overline{EN}$.

Da \overline{EN} Höhe im gleichseitigen Dreieck BCE mit der Seitenlänge b ist, gilt $\overline{EN} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ b.

Hieraus folgt dann $\overline{ML} = \frac{1}{6}\sqrt{6} \cdot b$, also

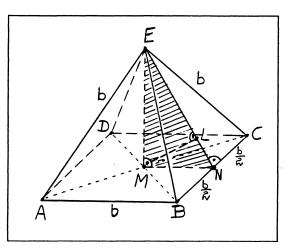
$$r_2 = \frac{1}{6}\sqrt{6} \cdot b .$$

Wegen (2) gilt daher

(3)
$$r_2 = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot r$$
.

Wegen (1) ist damit gezeigt, daß ein Oktaeder, das mit einem Würfel den Mittelpunkt M und den Umkugelradius r gemeinsam hat, auch den gleichen Inkugelradius wie dieser Würfel besitzt. Das gesuchte Verhältnis lautet daher $r_1: r_2 = 1:1$.

Dieses einfache Resultat war nicht von vornherein zu erwarten. Wenn man von der Lage der Körper im Raum absieht, dann gibt es zu jeder Kugel genau einen Würfel mit der Kantenlänge a und genau ein Oktaeder mit der Kantenlänge b, die diese Kugel als Inkugel und deren Mittelpunkt als gemeinsamen Mittelpunkt besitzen.



Man fordere die Schüler auf, sich zwei derartige Körper vorzustellen und Aussagen über die Lage der 8 bzw. 6 Eckpunkte zu treffen.

Unser Resultat besagt, daß diese 14 Punkte alle auf einer Kugel mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $r = \sqrt{3} \cdot r_i$ liegen, wenn r_i den Radius der Inkugel bezeichnet.

Weiterhin gilt $r_i < r = \sqrt{3}r_i < a = 2r_i < b = \sqrt{6}r_i$.

Zwei ausgezeichnete gegenseitige Lagen dieser beiden Körper sollten hervorgehoben werden:

- a) Zwei gegenüberliegende Eckpunkte des Oktaeders fallen mit zwei gegenüberliegenden Eckpunkten des Würfels zusammen; die restlichen vier Eckpunkte des Oktaeders liegen auf einem Großkreis der Umkugel und teilen diesen in vier gleiche Teile.
- b) Die 6 Eckpunkte des Oktaeders liegen auf denjenigen drei Geraden, die die Mittelpunkte gegenüberliegender Seitenflächen des Würfels verbinden.

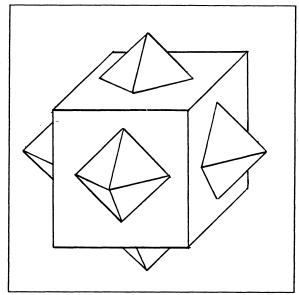
Nur bei einem gut ausgebildeten Raumanschauungsvermögen dürfte ein Schüler in der Lage sein, sich die gegenseitige Durchdringung der beiden Körper in den genannten beiden Fällen richtig vorzustellen. Das Anfertigen entsprechender Kantenmodelle kann hierbei sehr hilfreich sein.

In der Aufgabensammlung der AG Klasse 9, Geometrie, Aufgabe 34) wird in einer Abbildung folgendes veranschaulicht (vgl. /10/, S.16):

Die Mittelpunkte (Schwerpunkte) der 6 Seitenflächen eines Würfels sind die Eckpunkte eines Oktaeders, und die Schwerpunkte der 8 Seitenflächen dieses Oktaeders sind die Eckpunkte eines Würfels.

Anhand dieser Abbildung läßt sich folgendes veranschaulichen:

Geht man von einem Oktaeder aus, dessen Eckpunkte in den Mittelpunkten der Seitenflächen des zugehörigen Würfels liegen und denkt sich dieses Oktaeder einer zentrischen Streckung mit dem gemeinsamen Symmetriezentrum dieser beiden Körper unterworfen, dann durchdringt dieses Oktaeder die Seitenflächen des Würfels immer mehr, bis schließlich die Oktaederkanten

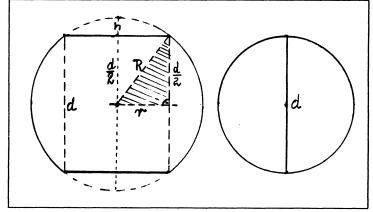


die Würfelkanten schneiden und die Eckpunkte des Oktaeders in den Mittelpunkten der Seitenflächen des Würfels liegen. Zwischen dem Ausgangszustand und diesem Endzustand tritt der in nebenstehender Abbildung festgehaltene Zustand ein, daß diese beiden Körper eine gemeinsame Inkugel und eine gemeinsame Umkugel besitzen.

Auch die Aufgabe 26) führt zu einem überraschenden Resultat. Der durch die geschilderte zentrisch zylindrische Durchbohrung einer Kugel entstehende Restkörper hat dasselbe Volumen wie diejenige Kugel, deren Durchmesser gleich der Länge der zylindrischen Bohrung ist.

Zur Veranschaulichung der Aufgabenstellung bieten sich günstig gewählte Schnittfiguren an.

Bezeichne R den Radius der zentrisch durchbohrten Kugel, r den



Radius der Bohrung, d die Länge der Bohrung und sei h = $R - \frac{1}{2}d$.

Dann gilt für das Volumen V_R des Restkörpers laut Aufgabenstellung

$$V_R = V_{K'} - V_Z - 2V_{KK}$$

mit

$$V_{K'} = \frac{4}{3} \pi \cdot R^3$$

Volumen einer Kugel mit dem Radius R,

 $V_7 = \pi \cdot r^2 \cdot d$

Volumen eines Zylinders mit dem Radius r und der Höhe d

und

$$V_{Kk} = \frac{1}{3}\pi \cdot h^2(3R - h)$$
 Volumen einer Kugelkappe mit dem Radius R und der Höhe h.

Laut Aufgabenstellung und dem Satz des Pythagoras gilt

$$R^2 = r^2 + \frac{1}{4}d^2$$
.

Wegen $h = R - \frac{1}{2}d$ folgt hieraus dann

$$3R - h = 2R + \frac{1}{2}d$$
.

Durch Einsetzen und Umformen erhält man dann

$$V_R = \pi \cdot \left[\frac{4}{3} R^3 - (R^2 - \frac{1}{4} d^2) d - \frac{2}{3} (R^2 - dR + \frac{1}{4} d^2) (2R + \frac{1}{2} d) \right] = \pi \cdot \left[\frac{1}{4} d^3 - \frac{1}{12} d^3 \right] = \frac{1}{6} \pi \cdot d^3$$

Für eine Kugel mit dem Radius d' gilt ebenfalls $V_K = \frac{1}{6}\pi \cdot d^3$.

Folglich gilt für das gesuchte Verhältnis $V_R: V_K = 1:1$.

Relativ leicht ist die *Aufgabe 27)*, bei der wieder eine *Schnittfigur* der Veranschaulichung der Aufgabenstellung dient.

Nach dem Einführen günstiger Bezeichnungen (vgl. Figur) kann man beim Vorwärtsarbeiten entdecken, daß

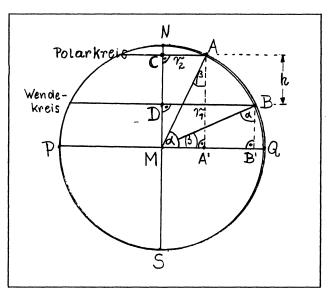
$$\alpha + \beta = 90^{\circ}$$

gilt, woraus zunächst die Kongruenz der Dreiecke MB'B, AA'M, MCA und BDM und hieraus dann

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}^{i} = \overrightarrow{DB} = r_1 \text{ und } \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CA} = r_2$$

Da $h = \overline{CD} = \overline{MC} - \overline{MD}$ gilt, erhält man schließlich das gesuchte Resultat

$$h = r_1 - r_2 .$$



Die dreiteilige Aufgabe 28) stellt relativ hohe Anforderungen an das Raumanschauungsvermögen der Schüler. Daher ist eine Unterstützung der Veranschaulichung durch Modelle (Tischtennisbälle, die man zusammenklebt) zu empfehlen. Bei der Schrägbilddarstellung zu Aufgabe 28c) wurde auf eine perspektivisch richtige Darstellung der Kugeln bewußt verzichtet. Bei den Aufgaben 28a) und 28b) spielen geschickt gewählte Schnittfiguren für die Veranschaulichung eine entscheidende Rolle.

Wichtig ist die Erkenntnis, daß aus Symmetriegründen die Mittelpunkte der gleich großen Kugeln, die der gegebenen Hohlkugel eingelagert werden sollen, jeweils die Eckpunkte eines regulären Polyeders sein müssen.

Beim Anfertigen der Planfiguren wird stets der Satz verwendet, daß der Berührungssradius auf der Tangentialebene senkrecht steht und daß die Berührungsradien zweier einander berührender Kugeln stets auf der Verbindungsstrecke ihrer Mittelpunkte liegen.

Da die Existenz einer derartigen Einlagerung jeweils der Aufgabenstellung entnommen werden kann, darf man auf einen Existenznachweis verzichten. Dennoch sollte man stets überlegen, warum die angegebenen Berührungsbeziehungen zutreffen.

Bei Aufgabe 28a) müssen die 6 einzulagernden Kugeln die Eckpunkte eines regulären Oktaeders bilden. Dabei berührt jede dieser Kugeln (außer der Hohlkugel) diejenigen vier Kugeln, deren Mittelpunkte in den vier "benachbarten" Eckpunkten liegen, während sie diejenige Kugel meidet, deren Mittelpunkt im "gegenüberliegenden" Eckpunkt liegt.

Als günstige Veranschaulichung bietet sich die Schnittfigur an, die in der von den Eckpunkten

A, B, C, D festgelegten Ebene liegt.

Diese vier Eckpunkte A, B, C, D des Oktaeders bilden ein Quadrat, dessen Diagonalenschnittpunkt M gleich dem Mittelpunkt der Hohlkugel mit dem Radius R ist und für dessen Diagonalenlänge

$$\overrightarrow{AC} = \sqrt{2} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot r$$

gilt, wobei der Radius der eingelangerten gleich großen Kugeln mit r bezeichnet wurde.

Bezeichnet man den inneren Durchmesser der Hohlkugel, der die Punkte $\,A\,$ und $\,C\,$ enthält, mit $\,T_1T_2\,$, dann gilt

mit
$$\overline{T_1T_2}$$
, dann gilt $\overline{T_1T_2} = 2r + \overrightarrow{AC} = 2(1 + \sqrt{2})r = 2R$,

für D = 2R und d = 2r also

$$D = (1 + \sqrt{2})d$$

Hieraus folgt dann die gesuchte Beziehung Die Richtigkeit des Näherungswerts d = 0,41D bestätigt man durch Nachmessen an einer genau gezeichneten Figur.

Bei *Aufgabe 28b)* bilden die 8 **M**ittelpunkte der einzulagernden Kugeln die Eckpunkte eines Würfels.

Die Kugel mit dem Mittelpunkt A berührt die drei Kugeln mit den "benachbarten" Mittelpunkten B, D, E, sie meidet dagegen die Kugeln mit den vier "nicht benachbarten" Mittelpunkten C, F, G, H.

Als günstige Veranschaulichung bietet sich die Schnittfigur an, die in der durch die Eckpunkte A, B, G, H festgelegten "Diagonalebene" des Würfels liegt.

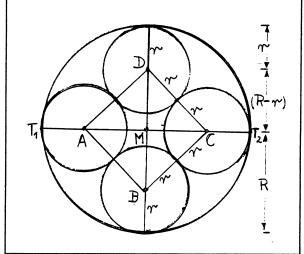
Diese Punkte bilden ein Rechteck mit den Seitenlängen $\overrightarrow{AB}=d$, $\overrightarrow{AH}=\sqrt{2}d$ und der Diagonalenlänge $\overrightarrow{AG}=\sqrt{3}d$.

Für den inneren Durchmesser der Hohlkugel gilt $\overline{T_1T_2} = D$.

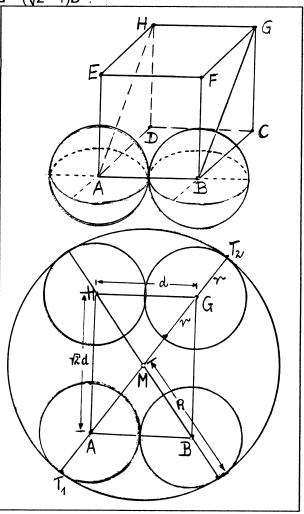
Wegen $\overline{T_1T_2} = \overline{T_1A} + \overline{AG} + \overline{GT_2} = 2r + \sqrt{3}d$ und 2r = d folgt hieraus $(\sqrt{3} + 1)d = D$ und damit die gesuchte Beziehung

$$d = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)D$$
.

Die Richtigkeit des Näherungswerts d = 0,37D bestätigt man durch Nachmessen an einer genau gezeichneten Figur.



 $d = (\sqrt{2} - 1)D$



Bei Aufgabe 28c) bilden die Mittelpunkte der 4 einzulagernden Kugeln die Eckpunkte eines regulären Tetraeders.

Hier ist es günstig, zur Veranschaulichung ein Schrägbild anzufertigen, in dem die Schnittfigur AS_1D (mit S_1 als Mittelpunkt von \overline{BC}) in wahrer Größe erscheint.

Offensichtlich berührt hier jede der eingelagerten Kugeln die drei anderen eingelagerten Kugeln, und für die Kantenlänge des Tetraeders gilt

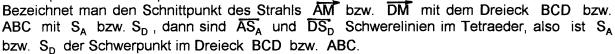
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} = 2r$$
.

Da ABC ein gleichseitiges Dreieck ist, folgt hieraus

(1)
$$\overrightarrow{AS}_1 = \overrightarrow{DS}_1 = \sqrt{3} \cdot \mathbf{r}$$
.

Aus Symmetriegründen ist der Mittelpunkt M der

Hohlkugel gleich dem Schnittpunkt der Höhen im regulären Tetraeder, der mit dem Schwerpunkt dieses Körpers zusammenfällt.



Zusammen mit (1) folgt hieraus

(2)
$$\overrightarrow{AS}_D = \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot r \text{ und } \overrightarrow{S}_A \overrightarrow{S}_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot r$$

Nach dem Satz des Pythagoras für das Dreieck AS_1S_A gilt dann

$$\overline{AS_A}^2 = 3r^2 - \frac{1}{3}r^2$$
,

(3)
$$\overline{AS}_A = \frac{2}{3}\sqrt{6} \cdot r$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AMS_D und AS_1S_A folgt

$$\overrightarrow{AM}: \overrightarrow{AS}_D = \overrightarrow{AS}_1: \overrightarrow{AS}_A$$
.

Durch Einsetzen von (1), (2), (3) und Umformen folgt hieraus dann

(4)
$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot r$$
.

Für den Radius R der Hohlkugel folgt dann

$$\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AM} = r + \frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot r = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + 2)r = R$$
,

woraus man dann

$$r = (\sqrt{6} - 2)R$$

und hieraus die gesuchte Beziehung

$$d = (\sqrt{6} - 2)D$$

gewinnt.

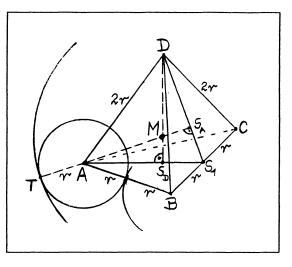
Die Richtigkeit des Näherungswertes d = 0,45D bestätigt man durch Nachmessen an einer genau gezeichneten Figur.

Bei Aufgabe 29) ist es zweckmäßig, zur Veranschaulichung 2 Schnittfiguren anzufertigen. Die erste Schnittfigur liegt in der vom regulären Fünfeck $M_1M_2M_3M_4M_5$ mit dem Umkreis k(M;r) und der Seitenlänge s aufgespannten Ebene, dessen Eckpunkte die Mittelpunkte der fünf Kugeln mit dem Radius $\frac{1}{2}$ s sind.

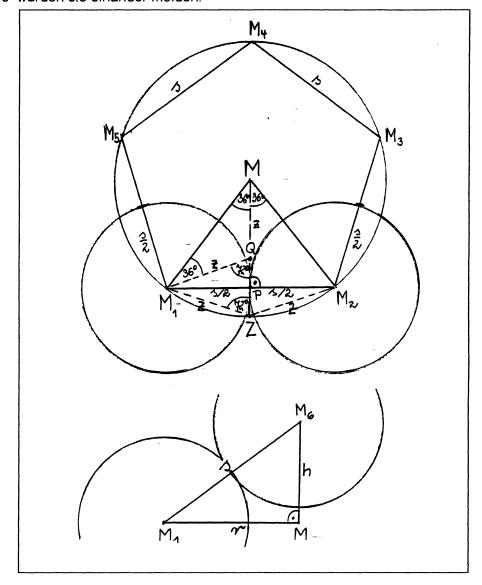
Die zweite Schnittfigur enthält neben M_1 und M auch den Mittelpunkt M_6 der Kugel K_6 und steht auf der erstgenannten Schnittfigur senkrecht.

Sei
$$\overline{MM}_6 = h$$
.

Für $h < \frac{1}{2}s$ würden die Kugeln K_6 und K_7 einander schneiden;



für $h = \frac{1}{2}s$ würden sie einander berühren; für $h > \frac{1}{2}s$ würden sie einander meiden.



Wenn man einer genau gezeichneten Figur die Längen $\overline{M_1M_6} = \overline{M_1M_2} = s$ und $\overline{M_1M} = r$ entnimmt, dann kann man erkennen, daß die Länge $\overline{MM_6} = h$ der zweiten Kathete im rechtwinkligen Dreieck M_1MM_6 größer ist als $\frac{1}{2}s$ und daß daher der letztgenannte Fall eintritt. Ein exakter Nachweis gelingt am einfachsten mit Hilfsmitteln der Trigonometrie. Für den Mittelpunkt P von $\overline{M_1M_2}$ gilt $\ll M_1MP = 36^\circ$, also $s = 2r \cdot sin36^\circ$, woraus $r \approx 0.851$ folgt. Wegen $h^2 = s^2 - r^2$ erhält man hieraus $h \approx 0.526s$, also $h > \frac{1}{2}s$. Folglich gilt: Die Kugeln K_6 und K_7 meiden einander.

Wesentlich umständlicher ist der folgende 2.Lösungsweg: Man denke sich das reguläre Fünfeck zu einem regulären Zehneck mit der Seitenlänge $\overline{M_1Z} = \overline{ZM_2} = z$ ergänzt. Sei ferner $\overline{M_1Q}$ Winkelhalbierende im Dreieck $\overline{ZMM_1}$. Da dann die Dreiecke M_1ZM und ZQM_1 ähnlich sind, gilt $\overline{MM_1}: \overline{M_1Z} = \overline{M_1Z}: \overline{ZQ}$, wegen $\overline{MM_1} = \overline{MZ} = r$ sowie $\overline{M_1Z} = z$ also r: z = z: (r-z) und damit

(1) $rz = r^2 - z^2$.

 \overrightarrow{MZ} halbiert den Winkel $\not \propto M_1 M M_2$ und schneidet daher die Strecke $\overrightarrow{M_1 M_2}$ senkrecht in ihrem Mittelpunkt P, der seinerseits \overrightarrow{ZQ} halbiert.

Da M_1ZP ein rechtwinkliges Dreieck ist, gilt $(2 \cdot \overline{M_1P})^2 = (2 \cdot \overline{M_1Z})^2 - (2 \cdot \overline{PZ})^2$.

Ferner gilt $2 \cdot \overline{M_1P} = \overline{M_1M_2} = s$, $2 \cdot \overline{M_1Z} = 2z$ und $2 \cdot \overline{PZ} = \overline{ZQ} = \overline{MZ} - \overline{MQ} = r - z$.

Folglich gilt $s^2 = 4z^2 - (r - z)^2 = 3z^2 - r^2 + 2rz$.

Ersetzt man in dieser Gleichung 2rz mit Hilfe von (1), dann erhält man die bemerkenswerte Beziehung

(2) $s^2 = z^2 + r^2$.

Dies besagt nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras, daß man aus der Seite eines regulären Fünfecks, der Seite des zugehörigen regulären Zehnecks und dem gemeinsamen Umkreisradius stets ein rechtwinkliges Dreieck bilden kann.

Wegen $M_1M_6 = M_2M_6 = ... = M_5M_6 = s$ ist M der Fußpunkt des Lots von M_6 auf die Ebene, in der das Fünfeck liegt.

Für die Länge $M_6M = h$ dieses Lotes gilt wegen $M_1M_6 = s$ und $M_1M = r$ daher

(3)
$$s^2 = h^2 + r^2$$
.

Aus (2) und (3) folgt h = z.

Da im rechtwinkligen Dreieck M_1ZP stets $\overline{M_1Z} > \overline{M_1P}$, also $z > \frac{1}{2}s$ gilt, ist damit gezeigt, daß $h > \frac{1}{2}s$ gilt und daher die Kugeln K_6 und K_7 einander meiden.

In der *Phase der Auswertung* sollte man hervorheben:

Es ist stets günstig, wenn man durch geschickte Wahl der Planfigur und genaues Zeichnen zunächst zu einer Vermutung gelangt, die dann noch zu beweisen ist.

Auch bei stereometrischen Aufgaben kann die Trigonometrie ein sehr nützliches Hilfsmittel sein.

Obwohl der 2.Lösungsweg unangemessen umständlich ist, hat er uns doch zu der merkenswerten Beziehung (2) geführt. Hätte man eine entsprechende (Beweis- oder Bestimmungs-) Aufgabe als *Hilfsaufgabe* bereits früher gelöst und würde diese Eigenschaft regulärer Fünfund Zehnecke kennen, dann wäre auch dieser Lösungsweg angemessen.

4. LÖSUNGEN DER BESTIMMUNGSAUFGABEN AUS DER "Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften - Klasse 10"

Gleichungen, Ungleichungen und Funktion en

```
1) a) L = \{3\}; b) L = \{\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}); \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}); 3\}; c) L = \emptyset;
d) L = \{6 - 4\sqrt{2}; 6 + 4\sqrt{2}\}; e) L = \{-6\}.
```

2) a) Wenn
$$p \le 0$$
, dann $L = 0$; wenn $p = 1$, dann $L = \{-3\}$; wenn $p > 0$ und $p \ne 1$, dann $L = \{-p - 2\sqrt{p}\} - p + 2\sqrt{p}\}$.

3) a) L = {
$$(1; \sqrt{\frac{2}{3}}), (1; -\sqrt{\frac{2}{3}}), (2; \sqrt{\frac{1}{6}}), (2; -\sqrt{\frac{1}{6}}), (3; 0)$$
 ;
b) L = { $(0; 0), (1; 5), (1; 2), (2; 4), 2; \frac{5}{2}), (3; \frac{10}{3}), (3; 3)$;
c) L = { $(0; 0), (1; 3 - \sqrt{2}), (1; 3 + \sqrt{2}), (2; \frac{7}{2}), (2; 2), (3; \frac{7}{3}), (3; 3)$.

4) a)
$$X = (-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}); L = \{2\};$$
 b) $X = \langle 0; 10 \rangle; L = \{1\};$ c) $X = (\frac{1}{2}, \infty); L = \{4 - 2\sqrt{3}\};$ d) $X = \{2\}; L = \{2\};$ e) $X = R; L = \langle 1; 2 \rangle$ f) $X = R; L = \{-9; 4\}$ g) $X = \langle 0; 26 \rangle; L = \langle 25; 26 \rangle;$ h) $X = \langle -\frac{1}{2}, \infty \rangle; L = \langle 0; \infty \rangle;$ i) $X = \langle 0; 4, 5 \rangle; L = \langle 0; 3 \rangle; k) X = R; L = R;$ l) $X = \langle 0; \infty \rangle \setminus \{2\}; L = \langle 0; 2 \rangle \cup \langle 4; \infty \rangle;$ m) $X = \langle -\frac{1}{2}\sqrt{2}; \frac{1}{2}\sqrt{2} \rangle \setminus \{0\}; L = \langle \frac{1}{2}\sqrt{2}; 1 \rangle;$ n) $X = \langle -\frac{1}{3}\sqrt{3}; \frac{1}{3}\sqrt{3} \rangle \setminus \{0\}; L = \langle 0; \frac{1}{2} \rangle;$ o) $X = \langle 1; \infty \rangle; L = \langle 5; 10 \rangle$.

- 6) $f(x) = \frac{5}{2}x^3 \frac{25}{2}x^2 + 12x + 10$
- 10) Die Funktion f besitzt nur für a = 0 eine reelle Nullstelle; es gilt f(-1) = 0.

13)
$$f(0) = 1$$
; $f(-1) = \frac{1}{3}$; $f(\frac{3}{7}) = \sqrt[7]{8}$.

- 16) a) Es gibt derartige Polynome, z.B. $p(x) = x^3 29x^2 x + 9$.
 - b) Es gibt keine derartigen Polynome.
- 17) a) L = { (2; -1), (-2; 1), $(\frac{1}{2}\sqrt{2}; \frac{3}{2}\sqrt{2})$, $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}; -\frac{3}{2}\sqrt{2})$ }; b) L = { (1; 1), (-2; 2), $(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}); \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}))$, $(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}); \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}))$ }; c) L = {(1; 5), (5; 1), (-1; -5), (-5; -1), (3+ $\sqrt{3}$; 3- $\sqrt{3}$), (3- $\sqrt{3}$; 3+ $\sqrt{3}$), (-3+ $\sqrt{3}$; -3- $\sqrt{3}$), (-3- $\sqrt{3}$; -3+ $\sqrt{3}$)};

```
d) L = \{ (\sqrt{2}; 2), (2; \sqrt{2}) \}.
17)
              L = { (1,2,3), (-1,-2,-3), (2,1,\frac{3}{2}), (-2,-1,-\frac{3}{2}) };
18)
       a)
       b)
              L = \{ (1;2;3), (-1;-2;-3) \};
              L = \{ (\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}); \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}); \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})), (\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}); \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}); \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})) \};
              L = \{ (-1;-1;-1), (1;-1;1) \}; e) L = \{ (a;0;0), (0;a;0), 0;0;a) ;
       d)
              L = \{ (1;1;1) \}.
       Das Gleichungssystem (1), (2), (3) besitzt
19)
       a) keine reelle Lösung, wenn a \neq \frac{1}{2} gilt;
       b) genau eine reelle Lösung in keinem Fall ;
       c) mehr als eine relle Lösung, wenn a = \frac{1}{2} gilt.
              a < \frac{1}{2} oder a > 1;
20)
       b)
              a < 1.
       a) 5;
                                   8;
21)
                                                         0,25;
                            e)
       d) 0,1;
                                                  f)
                                                         0,5;
           5;
                                   0,09 ;
       g)
                                                         0,04 .
                            h)
                                                  i)
                            b)
                                   1,4 ;
7 .
22)
       a)
              4,1;
                                                  c)
                                                         2;
                                                                     d)
                                                                               3;
              5:
       e)
                            24) L = \{ (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) \}.
23)
       L = { 1; 3 } .
                                   1/4 :
25)
              4;
                                                                               \frac{3}{2};
       a)
                            b)
                                                  c) -4;
                                                                       d)
       e) -\frac{3}{2};
                            f)
                                   -1.
27)
       (5) 1;
                            (6)
                                   (6) \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c;
                                                                       (7) \log_c b.
28)
       a)
              0,8271 ;
                            b)
                                   1,2091; c) -0,2519; d) -1,7100.
              1;
                                   2; c) \frac{1}{2}; d)
29)
       a)
                            b)
       Die letzten beiden Ziffern lauten 41 .
30)
                                   L = { 16 }; c) L = (9; 13); d) L = (0; \frac{1}{98});
31)
       a)
              L = \{ 4 \}; b
              L = (5; 7); f
                                   L = R \setminus \langle 9; 13 \rangle = (-\infty; 9) \cup (13; \infty); g) L = \emptyset.
       e)
             L = \{ a^2 ; \frac{1}{a} \}
32)
       a)
                                   für
                                          a > 0 und a \neq 1;
              L = \emptyset
                                   für
                                          a \le 0 oder a = 1.
             L = \{ \frac{lga - d}{c - b} \}
                                   für
                                          a > 0 und b \neq c;
                     L = R
                                   für
                                          a > 0 und b = c und a = 10^d;
                     L = 0
                                   für
                                          a \le 0 oder [a > 0 und b = c und a \ne 10^d.
33) L = \{ (2; 4) \}.
```

```
36)
       a_1) \qquad L = \emptyset \ ,
                                                      a_2) L = { x_1 : 1 } mit -1,7 < x_1 < -1,6 ,
       a_3) L = {x_1; x_2} mit -3 < x_1 < -2.9 und 2.1 < x_2 < 2.2,
```

 $L = \{x_1\}$ mit $2.6 < x_1 < 2.7$.

- $L = \{0; x_2\} \text{ mit } 2,4 < x_2 < 2,5, b_2)$ $L = \{x_1; 2\} \text{ mit } 0,4 < x_1 < 0,5, b_2\}$ $L = \{ -1 ; 0 \}$ L = 0. b_3) b₄)
- Es gibt genau ein derartiges Zahlentripel, nämlich (2; 1; 2) . 37)
- 42) Die Ungleichung ist allgemeingültig, wenn | a | ≤ 2 gilt. Das Gleichheitszeichen gilt für (a = 2 und x = y) oder (a = -2 und x = -y).

Vektoren

- AB; DC; SQ. 2)
 - b) PS; BM; MD; QR.
 - d) $\overrightarrow{PM} = -\overrightarrow{CQ}$; $\overrightarrow{AC} = 2 \cdot \overrightarrow{PQ}$; $\overrightarrow{AB} = -2 \cdot \overrightarrow{RD}$; $\overrightarrow{SP} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{RP} = -2 \cdot \overrightarrow{AS}$; $\overrightarrow{MR} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{DA}$
 - $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{a}$; $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{a}$; $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{b}$; $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{b}$; $\overrightarrow{QS} = -\overrightarrow{a}$; $\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{a}$; c) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}; \qquad \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}; \qquad \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}; \qquad \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}; \\ \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{a}; \qquad \overrightarrow{QM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{a}; \qquad \overrightarrow{RM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{b}; \qquad \overrightarrow{SA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{b}; \qquad \overrightarrow{QC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{b}; \qquad \overrightarrow{MS} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{a};$ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}); \qquad \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}); \qquad \overrightarrow{MD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}); \qquad \overrightarrow{RS} = -\frac{1}{2} (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}).$ e) $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$; $\overrightarrow{RP} = -\overrightarrow{b}$: e) $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{D}$; $\overrightarrow{RF} - \overrightarrow{D}$, $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{D}$; $\overrightarrow{SM} + \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QM} = \overrightarrow{SM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{a}$; $\overrightarrow{MR} + \overrightarrow{RD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$; $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{O}$; $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{D}$; $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{RC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{a}$; $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{D}$; $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{RC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{a}$;
 - $\vec{x} = \vec{PQ} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}); \ \vec{x} = \vec{SR} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}); \ \vec{x} = \vec{MM} = \vec{o}; \ \vec{x} = \vec{PS} = \frac{1}{2}(\vec{b} \vec{a}).$
- $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{q} \overrightarrow{p}$; $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{p} \overrightarrow{q}$; $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{q} \overrightarrow{p})$; 4) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{p} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{q} - \overrightarrow{p}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q})$.
- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{d} + \overrightarrow{c};$ $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{b} \overrightarrow{c} = -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{d};$ $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{d} + \frac{1}{2}\overrightarrow{c} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}),$ 5)
 - $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ Satz über die Mittellinie im Dreieck CAB; EF = HG Satz über das Mittelpunktsviereck: EFGH ist ein Parallelogramm. $\overrightarrow{HF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c})$. c)
- FE; CA; CG; GA; LH. 5 Pfeile: 6) a)
 - 24 Pfeile haben die gleiche Länge wie \overline{KL} ; es gilt $\overline{KL} = \frac{1}{2} |\vec{a}|$. b)
 - $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{a}$; $\overrightarrow{KH} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{a}$; $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{s}$; $\overrightarrow{HD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{s}$; C)
 - $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{s};$ $\overrightarrow{DK} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{a} \overrightarrow{s});$ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{s};$ $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FL} + \overrightarrow{LD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{a};$ d) BF + CG + KH = BF + FE + EA = BA = - a: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CL} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BL} + \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{s})$; $\overrightarrow{DL} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{KH} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DL} + \overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KH} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{DD} = \overrightarrow{O}$ $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{KE} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AH} = \frac{1}{2} \overrightarrow{S}$

```
a) \vec{s}_a = \vec{A} \vec{S}_a = \vec{c} + \frac{1}{2} \vec{a} = -\vec{b} - \frac{1}{2} \vec{a} = \frac{1}{2} (\vec{c} - \vec{b});
7)
                   b) \vec{x} = \vec{s}_a + \vec{s}_b + \vec{s}_c = \vec{\sigma}.
                   a) \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}; \overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{c} + \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}; \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{c} + \frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}; \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{c};
8)
                                     \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}); \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{MP} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}).
                                      \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC}; folglich \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC} und \overrightarrow{MN} \parallel EC; \overrightarrow{MN} ist Mittellinie im Dreieck.
                                      Zeige, daß \overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG}.
                 \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AP} = 3:5: \overrightarrow{HS}: \overrightarrow{SC} = 1:5
13)
16) D(1;5); P(3;1); |\vec{p}| = \sqrt{10}.
17) \vec{x} = 2 \cdot \vec{a} = (4;2); \vec{y} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (1;4); \vec{z} = 3 \cdot \vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \vec{b} - 2 \cdot \vec{c} = (8;2).
18) \vec{m} = (\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}); \quad \vec{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}; \quad \vec{m} = \frac{1}{2}(a + b).
19) \overrightarrow{OA_1} = [1; 0^{\circ}] = (1; 0); \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_3}; \overrightarrow{A_1A_3} = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}) = [\sqrt{3}; 150^{\circ}]; \overrightarrow{OA_3} = [1; 120^{\circ}] = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}); \overrightarrow{A_1A_4} = (-2; 0) = [2; 180^{\circ}];
                   \overline{OA}_4 = [1; 180^\circ] = (-1; 0); \overline{A_1A_5} = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}) = [\sqrt{3}; -150^\circ];
                  \overrightarrow{OA_5} = [1; -120^{\circ}] = (-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{3})
\overrightarrow{A_1A_6} = \overrightarrow{OA_5};
\overrightarrow{OA_6} = [1; -60^{\circ}] = (\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{3});
\overrightarrow{A_2A_6} = (0; -\sqrt{3}) = [\sqrt{3}; -90^{\circ}].
```

20)
$$\vec{a} = (3; 4) = [5; 53,1^{\circ}];$$
 $\vec{b} = (-3; -4) = [5; 233,1^{\circ}] = [5; -126,9^{\circ}];$ $\vec{c} = (2; -4) = [4,47; 296,6^{\circ}] = [4,47; -63,4^{\circ}]; \vec{d} = (-5; 1) = [5,10; 169^{\circ}];$ $\vec{e} = (-4; -4) = [5,66; 225^{\circ}] = [5,66; -135^{\circ}];$ $\vec{f} = (\frac{1}{3}; \frac{1}{2}) = [0,60; 56,3^{\circ}];$ $\vec{f} = (3; -1) = [3,16; 342^{\circ}] = [3,16; -18,4^{\circ}].$

21)
$$\vec{a} = [2; 30^{\circ}] = (\sqrt{3}; 1) = (1,73; 1);$$
 $\vec{b} = [2; -30^{\circ}] = (\sqrt{3}; -1) = (1,73; -1);$ $\vec{c} = [4; 100^{\circ}] = (-0,69; 3,94);$ $\vec{d} = [10; 160^{\circ}] = (-9,40; 3,42);$ $\vec{e} = [5; -120^{\circ}] = (-\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}\sqrt{3}) = (-2,5; -4,33);$ $\vec{f} = [10; -20^{\circ}] = (9,40; -3,42);$ $\vec{g} = [2; -135^{\circ}] = (-\sqrt{2}; -\sqrt{2}) = (-1,41; -1,41);$ $\vec{h} = [3; 170^{\circ}] = (-2,95; 0,521);$ $\vec{i} = [1; 135^{\circ}] = (-\frac{1}{2}\sqrt{2}; \frac{1}{2}\sqrt{2}) = (-0,71; 0,71).$

Komplexe Zahlen

1) a)
$$x = 4$$
, $y = 10$; b) $x = 6 + 2 \cdot \sqrt{-1}$, $y = 6 - 2 \cdot \sqrt{-1}$.

4) a)
$$a = 1 + i = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \cdot \sin 45^\circ)$$
; $b = -2 + i = \sqrt{5}(\cos 153,4^\circ + i \cdot \sin 153,4^\circ)$; $c = 4 - 3i = 5[\cos(-36,9^\circ) + i \cdot \sin(-36,9^\circ)]$; $d = 5i = 5(\cos 90^\circ + i \cdot \sin 90^\circ)$; $d = 1 - i = \sqrt{2}(\cos 45^\circ - i \cdot \sin 45^\circ)$; $d = 1 - i = \sqrt{5}(\cos 153,4^\circ + i \cdot \sin 153,4^\circ)$.

b)
$$2a - 3b - 3c + d = (-4; 13);$$
 $(a + \overline{a})(b + \overline{b}) = (-8; 0);$ $(a + \overline{b})(b + \overline{a}) = (1; 0);$ $(a + b)(\overline{a} + \overline{b}) = (5; 0);$ $(c + \overline{d})(d + \overline{c}) = (80; 0);$ $a \cdot \overline{a} + b \cdot \overline{b} = (7; 0).$

```
5)
                      a^2 = 2i; ab = -3 - i; b^2 = 3 - 4i; a^2 + 2ab + b^2 = -3 - 4i;
                      (a + b)^2 = -3 - 4i; (a + b)(a - b) = -3 + 6i; (a + b)(c + d) = -8 + 6i;
                      a^3 = -2 + 2i; a^4 = -4; a^5 = -4 - 4i;
                                                                                                                                                                                     a^6 = -8i : a^7 = 8 - 8i .
                     \frac{1}{a} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i; \frac{1}{b} = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i; \frac{1}{c} = \frac{4}{25} + \frac{3}{25}i; \frac{a}{b} = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i; \frac{b}{a} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.
 6)
                                          z = 1 - 2i; b) z = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}i; c) z = -1.
 7)
 8)
                                                                                                                                  (2; 1) (1; 2) (-2; 2)
(1; 3) (-1; 3) (-4; 0)
 10)
                                                                                   (1; 1) \quad | \quad (0; 1) \quad | \quad (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) \quad | \quad (-2; -2) \quad | \quad (3; -2) \quad |
                                                 (1; 0)
                                                  (1; 0)
                                                                                                                     (0; -1)
                    \frac{a^2}{b \cdot d} = [4; 150^\circ] = (-2 \cdot \sqrt{3}; 2); \quad \frac{c^2 \cdot d}{b^2} = [\frac{4}{27}, 30^\circ] = (\frac{2}{27}\sqrt{3}; \frac{2}{27}); \quad b^5 c^3 d^6 = [\frac{8}{3}, -30^\circ] = (\frac{4}{3}\sqrt{3}; -\frac{4}{3}).
 13)
                     \overline{Z_1 \cdot Z_2} = \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}.
 14)
 15)
                                          Kreisfläche um (1;0) mit dem Radius 2;
                     a)
                                          Kreis um (0;1) mit dem Radius 3;
                     b)
                                          Kreisfläche um (-4; 3) mit dem Radius 5;
                     c)
                     d)
                                          Kreis um (a_1;a_2) mit dem Radius r(>0);
                     e)
                                          Mittelsenkrechte der Strecke mit den Endpunkten (1;0) und (3;0) ;
                     f)
                                          Mittelsenkrechte der Strecke mit den Endpunkten (0;2) und (0;-5) ;
                                          Mittelsenkrechte der Strecke mit den Endpunkten (a<sub>1</sub>;a<sub>2</sub>) und (b<sub>1</sub>;b<sub>2</sub>)
                     g)
                                         z^4 = (-8; 8\sqrt{3}) = [16; 120^\circ];
17)
                     a)
                                                                                                                                                    L = \{ [2; 30^{\circ}]; [2; 120^{\circ}]; [2; 210^{\circ}]; [2; 300^{\circ}] \}; 
                                                                                                                                                    L = \{ (\sqrt{3}; 1); (-1; \sqrt{3}); (-\sqrt{3}; -1); (1; -\sqrt{3}) \}.
                                         z^3 = (-\frac{1}{2}\sqrt{2}; \frac{1}{2}\sqrt{2}) = [1; 135^\circ];
                                                                                                                                                    L = \{ [1; 45^{\circ}]; [1; 165^{\circ}]; [1; 285^{\circ}] \};
                     b)
                                                                                                                                                    L = \{(\frac{1}{2}\sqrt{2}; \frac{1}{2}\sqrt{2}); (-0.966; 0.259); (0.259; -0.966)\}
                                         z^2 = (-1; \sqrt{3}) = [2; 120^\circ];
                                                                                                                                                    L = \{ [\sqrt{2}; 60^{\circ}]; [\sqrt{2}; 240^{\circ}] \};
                     C)
                                                                                                                                                    L = \{ (\frac{1}{2}\sqrt{2}; \frac{1}{2}\sqrt{6}); (-\frac{1}{2}\sqrt{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{6}) \}.
                                         z^8 = 1; L = \{ (1; 0); (\frac{1}{2}\sqrt{2}; \frac{1}{2}\sqrt{2}); (0; 1); (-\frac{1}{2}\sqrt{2}; \frac{1}{2}\sqrt{2}); (-1; 0); (-\frac{1}{2}\sqrt{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{2}); (-1; 0); (-\frac{1}{2}\sqrt{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{2}); (-1; 0); (-\frac{1}{2}\sqrt{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{
                     d)
                                                                                                         (0; -1); (\frac{1}{2}\sqrt{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{2}) \}.
                                                                                   L = { (1; 0); (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}); (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}); (-1;0); (-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{3}); (\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{3}) }.
                     e)
                                                                    L = \{ (1; 0); (0; 1); (-1; 0); (0; -1) \} = \{ 1; i; -1; -i \}.
                    f)
                                                                            L = { (1; 0); (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}); (-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{3}).
                     g)
                                         z^3 = -8 = [8; 180^{\circ}];
                                                                                                                                                   L = \{ [2; 60^{\circ}]; [2; 180^{\circ}]; [2; 300^{\circ}] \};
                    h)
                                                                                                                                                    L = \{ (1; \sqrt{3}); (-2; 0); (1; -\sqrt{3}) \}.
                                        z^4 = -16 = [16; 180^\circ];
                                                                                                                                                    L = \{ [2; 45^{\circ}]; [2; 135^{\circ}]; [2; 225^{\circ}]; (2; 315^{\circ}] \} :
                    i)
                                                                                                                                                    L = \{ (\sqrt{2}; \sqrt{2}); (-\sqrt{2}; \sqrt{2}); (-\sqrt{2}; -\sqrt{2}); (\sqrt{2}; -\sqrt{2}) \} \}
```

18)

a) $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$;

```
b) z^3 + 8 = [z - (1; \sqrt{3})] \cdot [z + 2] \cdot [z - (1; -\sqrt{3})]
              c) z^2 + (1; -\sqrt{3}) = [z - (\frac{1}{2}\sqrt{2}; \frac{1}{2}\sqrt{6})] \cdot [z + (\frac{1}{2}\sqrt{2}; \frac{1}{2}\sqrt{6})];
              d) 2z^3 + (\sqrt{2}; -\sqrt{2}) = 2 \cdot [z^3 + (\frac{1}{2}\sqrt{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{2})]
                                                             = 2 \cdot [z - (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})] \cdot [z - (-0.966, 0.259)] \cdot [z + (0.259, -0.966)]

\overline{P_{3}P} = \overline{P_{1}P_{2}} = z_{2} - z_{1} ;

\overline{P_{2}P} = \overline{P_{1}P_{3}} = z_{3} - z_{1} ;

\overline{P_{1}P} = \overline{P_{1}P_{2}} + \overline{P_{2}P} = -2z_{1} + z_{2} + z_{3} ;

\overline{P_{1}S} = \frac{1}{2}\overline{P_{1}P} = -z_{1} + \frac{1}{2}z_{2} + \frac{1}{2}z_{3} .

19) P_1P_2 = z_2 - z_1;
              P_1P_3 = Z_3 - Z_1;
              P_3P_1 = z_1 - z_3;
20) a) \overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1} = (c - a) + i \cdot (b - c);

\frac{\overrightarrow{BC_2} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_2} = (c - b) + i \cdot (c - a);}{\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = (c - b) + i \cdot (b - c);}

                            \overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM_1} = \frac{1}{2}[(-2a + b + c) + i(b - c)];
                            \overline{BM_2} = \overline{BA} + \overline{AM_2} = \frac{1}{2}[(a - 2b + c) + i(c - a)];
                            \overline{CM_3} = \overline{CA} + \frac{1}{2}\overline{AB_2} = \frac{1}{2}[(a + b - 2c) + i(a - b)];
                            \overrightarrow{MM}_1 = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}_1 = \frac{1}{2}AC_1 = \frac{1}{2}[c - a) + i \cdot (b - c)];
                            \overrightarrow{MM}_2 = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}_2 = \frac{1}{2}[(c - b) + i \cdot (c - a)];
                            \overline{M_1M_2} = \overline{M_1M} + \overline{MM_2} = \frac{1}{2}[(a - b) + i \cdot (2c - a - b)]
                           i \cdot \overline{AC_1} = i \cdot (c - a) + i^2 \cdot (b - c) = (c - b) + i \cdot (c - a) = \overline{BC_2};
              b)
                           i \cdot \overline{MM_1} = \frac{1}{2} i \cdot (c - a) + \frac{1}{2} i^2 \cdot (b - c) = \frac{1}{2} [(c - b) + i \cdot (c - a)] = \overline{MM_2};
                           i \cdot \overline{M_1 M_2} = \frac{1}{2} i \cdot (a - b) + \frac{1}{2} i^2 \cdot (2c - a - b) = \frac{1}{2} [(a + b - 2c) + i \cdot (a - b)] = \overline{CM_3}
Trigonometrie
              a) L = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\};
3)
              b) L = { -2,8; -2,2; -0,9; <u>0;</u> 0,9; 2,2; 2,8 } ; 1 genauer Wert , 6 Näherungswerte ;
             c) L = \{ -1; 1 \}; d_1 L = \{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \}; d_2 L = \{ 0 \}; d_3 L = \emptyset;
              e)
                          L = { 0,4; 2,4; 3,3 } ; 3 Näherungswerte ;
                           Für p = 0 gilt L = \{ -2,3; -1,6; -0,49; 0,49; 1,6; 2,3 \}; 6 Näherungswerte; für p = \frac{3}{2} gilt L = \{ -0,2; 0,2 \}; 2 Näherungswerte;
             f)
                           für p = 2 gillt
```

 $L = \{0\}$;

b) $\cos\alpha$; c) $\sqrt{2}\cdot\cos\alpha$.

c) $\cos 36^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$; $\sin 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\cdot\sqrt{5}}$; $\tan 36^\circ = \frac{1}{4}\cdot(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{10 - 2\cdot\sqrt{5}})$.

a) $\sin 15^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$; $\cos 15^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$; $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$;

b) $\sin 75^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$; $\cos 75^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$; $\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$;

für p = 3 gilt L = 0.

a) $\cot \frac{\alpha + \beta}{2}$;

8)

10)

11)
$$\sin \varphi = \sin \varphi$$
; $\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$; $\sin \varphi = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}$; $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \varphi}}$; $\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$; $\cos \varphi = \cos \varphi$; $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}$; $\cos \varphi = \frac{\cot \varphi}{\sqrt{1 + \cot^2 \varphi}}$; $\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}$; $\tan \varphi = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi}$; $\tan \varphi = \tan \varphi$; $\tan \varphi = \frac{1}{\cot \varphi}$; $\cot \varphi = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}{\sin \varphi}$; $\cot \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}$; $\cot \varphi = \frac{1}{\tan \varphi}$; $\cot \varphi = \cot \varphi$.

12) a) $L = \{ 30^\circ; 150^\circ; 210^\circ; 330^\circ \}$; b) $L = \langle \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \rangle \cup \langle \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \rangle$.

- 12)
 - c) $L = \{ 25^\circ; 55^\circ; 205^\circ; 235^\circ \} ;$ d) $L = \{ 30^\circ; 150^\circ \} ;$ e) $L = \{ 0^\circ; 300^\circ; 360^\circ \} ;$ f) $L = \{ 60^\circ; 240^\circ \} ;$

 - g) $L = \{ 60^\circ; 180^\circ; 300^\circ \} ;$ h) $L = \{ 30^\circ; 150^\circ \} ;$
 - $L = \{ 0^{\circ}; 90^{\circ}; 120^{\circ}; 180^{\circ}; 240^{\circ}; 270^{\circ}; 360^{\circ} \} ;$ i)
 - k) $L = \{0^\circ; 45^\circ; 135^\circ; 180^\circ; 225^\circ; 315^\circ; 360^\circ\}$
- 13) a) L = { $(x,y) \mid x = (2n - 2m - \frac{1}{2})\pi$ und $y = (2n - 4m - 1)\pi$ };
 - b) L = { $(x;y) \mid x = (2m \pm \frac{1}{3})\pi$ und $y = (2n \pm \frac{1}{3})\pi$ }.

27)
$$J = 6.\sqrt{6}$$
; $r = \frac{2}{3}\sqrt{6}$; $R = \frac{35}{24}\sqrt{6}$; $h = \frac{12}{7}\sqrt{6}$.

 $J(ABD) = \frac{1}{32} \sqrt{10(5 + \sqrt{5})} \cdot d^2 \approx 0.266 \cdot d^2$ 33)

Zahlentheorie

- 1) $L = \{ (3;4;5;6) \}$.
- 2) $L = \{ (-2;1), (1;-2), (3;6), (4;4), (6;3) \}.$
- 3) Alle ungeraden natürlichen Zahlen n mit n>1.
- 4) $L = \{ (1;1) \}$.
- $2^{256} 1 = 3.5.17.257.65537$ 5)
- $L = \{ -6; 5 \}$ 6)
- 7) $L = \{ (0,1985), (1985,0) \}$
- 8) 3100 hat 478 Ziffern und endet auf die Ziffer 1.
- $a^5 + 3a^4b 5a^3b^2 15a^2b^3 + 4ab^4 + 12b^5 = (a 2b)(a b)(a + b)(a + 2b)(a + 3b)$. 9c)
- Die Paare (2z²+2z; 2z²+2z+1) von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen werden 9d) durch die Zahl (2z + 1) zu einem pythagoräischen Zahlentripel ergänzt.
- $S(n;k) = n(n-1)^{k-1}$ läßt sich als Summe von n unmittelbar aufeinanderfolgenden 9f) geraden Zahlen darstellen; der erste Summand lautet $s_1 = (n-1)^{n-1} - (n-1)$.
- 10a) Wahre Allaussage.
- 10b) Wahre Allaussage.
- 10c) Falsche Existenzaussage.
- 10d) Falsche Existenzaussage.
- 10f) Wahre Existenzaussage; Beispiel: (1;2;5).

Logik und Kombinatorik

- 1) Es können 24 Spieler die nächste Runde erreichen.
- 8) Es ist nicht möglich, auf die geschilderte Weise aus 7 Papierstücken genau 1994 Papierstücke herzustellen.
- 9) Man kann nicht vermeiden, daß bei der angegebenen Färbung ein Dreieck entsteht, das nur gleichfarbige Seiten hat.

Geometrie

- 1) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(-a + b + c)$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(a b + c)$, $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(a + b c)$.
- 2) $\overline{CD} = \frac{3}{2}\sqrt{2}a \approx 2,12a$.
- 3) $J = 2(a^2 + ab + b^2)$.
- 4b) $\overline{EF} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2}$.
- 5b) $c = 2(r_1^2 + r_2^2)$.
- 6b) $w = f(s,h) = h \cdot \sqrt{\frac{2s}{s+h}}$.
- 16) GO = $k(O; \frac{1}{3}XY)$.
- 17) 2 Vierecke als Lösungen.
- 18) 2, 1 oder 0 Vierecke als Lösungen.
- 19) 2, 1 oder 0 Punkte als Lösungen.
- 21) $h = \frac{1}{6}a$.
- 22) $V_1: V_2 = 5:3$.
- 23) $\max\{PQ\} = \sqrt{3} \cdot r_g$
- 24) $r = \frac{1}{2}R$.
- 25) $r_1: r_2 = 1:1$.
- 26) $V_R: V_K = 1:1$.
- 27) $h = r_1 r_2$.
- 28a) $d = (\sqrt{2} 1)D$.
- 28b) $d = \frac{1}{2}(\sqrt{3} 1)D$.
- 28c) $d = (\sqrt{6} 2)D$.
- 29) Die Kugeln K_6 und K_7 meiden einander.

5. ÜBERBLICK über vermittelbare Verfahrens- und Sachkenntnisse in AGn der Klassen 5 bis 10

Die außerunterrichtliche Tätigkeit kann sehr verschiedenartige Ziele verfolgen. Da die Auswahl des Inhalts und der Methoden sehr stark von den gestellten Zielen abhängt, sollte man diese stets explizit nennen.

In den "Anleitungen" /3/, /5/, /7/, /9/ und /11/ werden jeweils im Abschnitt 1. diese Ziele angegeben. Bei den "Vorschlägen zur Gestaltung der Zirkel" im Abschnitt 3. werden für jedes zu behandelnde Teilgebiet die jeweiligen Ziele nochmals explizit genannt. Die Untergliederung in Teilabschnitte richtet sich nach den in den zugehörigen Aufgabensammlungen /2/, /4/, /6/, /8/ und /10/ enthaltenen Aufgabenarten.

In Klasse 5 sind dies 15 Aufgabengruppen, die jeweils einen eigenen Namen tragen: "1. Wer ist wer?", "2. Wir schließen auf die Einheit und lösen Sachaufgaben",, "14. Aufgaben über Flächen und Körper", "15. Vermischte Aufgaben".

In Klasse 6 treten außer den "Vermischten Aufgaben" 12 Aufgabengruppen auf: jhe eine zur Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Arithmetik; drei zu mengentheoretisch-logischen Grundlagen; zwei zur Zahlentheorie; vier zur Geometrie.

In Klasse 7 treten als Hauptgebiete nur noch Arithmetik, Geometrie und Zahlentheorie auf, wobei jeweils explizit zwischen Beweis- und Bestimmungsaufgaben unterschieden wird. In der Geometrie kommen noch die Konstruktions- und Ortsaufgaben hinzu, bei der Arithmetik werden noch Sach- und Anwendungsaufgaben sowie Aufgaben über Aussageformen, Mengen und Abbildungen gesondert behandelt. Da hier außerdem noch zwischen Geometrie Teil I und Teil II unterschieden wird, kommen im Abschnitt 3. der Anleitung für diese Klassenstufe insgesamt 13 Unterabschnitte vor.

In Klasse 8 wird nur noch in der Arithmetik zwischen Beweis-, Bestimmungs- sowie Sach- und Anwendungsaufgaben unterschieden. In der Geometrie treten Beweis- und Bestimmungsaufgaben sowie Konstruktions- und Ortsaufgaben bereits "vermischt" auf, und auch bei der Zahlentheorie werden Beweis- und Bestimmungsaufgaben "vermischt", so daß hier in Abschnitt 3. nur noch 6 Teilabschnitte auftreten.

In Klasse 9 werden nur noch zu den 3 Gebieten Zahlentheorie, Arithmetik und Geometrie die anzustrebenden Ziele getrennt ausgewiesen,

In der vorliegenden Anleitung für Klasse 10 werden nur in den Unterabschnitten 3.1., 3.2., 3.3. und 3.5. die Ziele angegeben, die bei der Behandlung der zugehörigen Aufgabengruppen gestellt werden können.

Durch die folgenden Übersichten soll der Leser zunächst einen zusammenfassenden Überblick erhalten, welche Ziele beim Behandeln der angegebenen Aufgaben angestrebt werden können

Keine näheren Angaben lassen sich zum Hauptziel machen, das im Befähigen zum selbständigen Erwerb von Wissen und Können besteht. Hier geht es vor allem darum, daß die Schüler lernen, sich den in der Aufgabensammlungen enthaltenen "Merkstoff" selbständig anzueignen.

Beim Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen wird zwischen heuristischen Hilfsmitteln , heuristischen Strategien und allgemeinen heuristischen Prinzipien unterschieden. In der Regel ist der erfolgreiche Einsatz derartiger Hilfsmittel leichter lehrbar als der von Strategien oder gar von allgemeinen Prinzipien. Dieses Ziel ist deshalb so bedeutsam, weil das Beherrschen heuristischer Vorgehensweisen nicht nur für die Mathematik, sondern für die Entwicklung des problemlösenden Denkens in allen Wissenschaften sehr wichtig ist.

Von fachübergreifender Bedeutung ist auch das Vermitteln einiger logischer Grundlagen

Den geringsten Wert messen wir dem Vermitteln von speziellen mathematischen Sachkenntnissen und Fertigkeiten bei. Dies sollte nie als Selbstzweck aufgefaßt werden, sondern stets als Hilfsmittel für das Lösen von Aufgaben dienen und für die Befähigung zum selbständigen Erwerb von Wissen und Können eingesetzt werden. Den Übersichten ist auch zu entnehmen, in welchen Klassen und in welchen Stoffgebieten eine heuristische Vorgehensweise eingeführt bzw. trainiert werden kann. Dazu benötigt man allerdings die Inhaltverzeichnisse der "Anleitungen". Die angegebenen "Nr. des Stoffgebiets der AG in Kl. .." ist jeweils die Nummer des Unterabschnitts im Abschnitt 3. der jeweiligen "Anleitung".

Heuristische Vorgehensweisen

Heuristische Hilfsmittel (zum Abspeichern von	Nr.	des	Stoff-	gebiets	der	AG
Aufgabe/Lösungsplan sowie Hilfe bei Lösungsfindung)	KI.5	KI.6	KI.7	KI.8	KI.9	KI.10
Einführen günstiger Bezeichnungen	1, 3,	1, 2,	1.1, 1.2.			
(Variable; günstige Symbolik)	4, 5	5	2.1, 2.2, 3.4,	1, 2.3	1	3
Tabellen (mit oder ohne Variable)	1, 2, 5, 7, 9	1, 3	3.4	2.3		
Skizzen (bei Sachaufgaben)	10		3.4	2.3		
Planfiguren bei geometrischen Aufgaben	14	9.1,	2.1, 2.2,	3	5	
(auch zum Finden von Vermutungen)		9.2, 9.3	2.3, 2.4,			
Mengendiagramme	11	5				
Lösungsgraphen zum Festhalten von Lö-	14	3, 8,	2.1, 2.2,	1, 3.1,	1, 3	2, 5
sungsplänen		9.1, 9.2	3.3,	2.2		
	_	_	_	_	_	
Heuristische Strategien	KI.5	KI.6	KI.7	KI.8	KI.9	KI.10
Vorwärtsarbeiten VA / Teilzielfrage		alle	Auf	gaben		
VA / Hilfsmittelfrage (vor Teilzielfrage)	14	8, 9.1,	2.1, 2.2,	1, 3.1,	1, 3	1, 2, 3,
		9.2	3.3,	2.2		5
Rückwärtsarbeiten RA / Teilzielfrage						
- Finden von Gewinnstrategien	3 Spiele 10, 14				_	_
- bei Sachaufgaben und Geom-Best.	10, 14	3, 9.2	2.2, 3.4	3.2, 2.3	3	5
- bei Geom-Bew., Zt-Bew. und Geom-Ko		9.1	2.1, 1.2, 2.4	1, 3.1, 3.2	1, 3	2, 3, 5
RA / Hilfsmittelfrage (vor Teilzielfrage)	 	8, 9.2	2.1, 2.2,	3.1, 2.2	1, 2, 3	2, 3, 5
1017 Timorrittomago (vor Tonziomago)		0, 0.2	3.3,	,	1, 2, 0	2, 0, 0
- Hilfsmittel führt zu "versteckten" Hilfslinien		9.1	2.1	3.1	3	5
Festhalten von Beziehungen (Bedingungen)	5, 7,	3, 8,	1.1	2.3	1, 2	3
durch Gleichungen	9, 11	9.2	20	24	2 2	5
Suche nach Beziehungen (Gleichungen) zwi-			2.2,	2.1,	2, 3	່ວ
schen gegebenen, gesuchten und Hilfsgrößen	4, 5, 6,	2	3.4	2.3		
Systematisches Probieren (Erfassen aller möglichen und Ausschließen aller nicht möglichen Fälle)	8, 13	2	1.2, 3.1	2.1		
	5	2 02	2.4, 1.2	3.2, 2.1	2 2	4
Durchschnittsbildung von Erfüllungsmengen		2, 9.3			2, 3	2
Folgern zum Zweck des Vereinfachens	5, 8	2, 3	1.2	1, 2.1	1	
Folgern aus der Behauptung	<u> </u>	<u>L</u>	3.3	2.2		1
Harrietia de a Drimeiria a	100	1 1/10	1 1/1 7	1 1/10	1 1/10	12140
Heuristische Prinzipien	KI.5	KI.6	KI.7	KI.8	KI.9	KI.10
Analogieprinzip	ver	mischte	Aufga	ben	3	5
Transformationsprinzip (Übersetzen in die Sprache einer Theorie)			3.2	1, 2.1	1, 2, 3	1, 2, 4, 5
Rückführungsprinzip (Suche nach bereits	1 Spiel	 	2.1, 2.2,	1,	1, 2,	1, 2,
gelösten bzw. Finden und Formulieren von	4, 5,	ĺ	2.3, 2.4,	3.1,	3	4, 5
Hilfsaufgaben)	13		1.1, 2.1,	3.2	_	', -
· ····	1	j	2.2. 2.3	l -:-	Ī	

Prinzip des Übergangs zu einer einfacheren	3, 4				1, 2, 3	1, 2,
Aufgabe (Spezialisieren, Vereinfachen)		9.2	2.2, 2.3	3.2, 2.2		3, 5
Symmetrieprinzip	5 Spiele					

Logische Grundlagen

	KI.5	KI.6	KI.7	KI.8	KI-9	Kl.10
Begriffe aus Logik und Mengenlehre						
- mindestens, höchstens, genau ein	3	6	3.1			
- nicht, und, oder, wenn-dann	3	6	3.1			
- (Einzel-, All-, Existenz-) Aussage; Wahrheitswert		6	3.1			
- Symbole ~∧∨ ⇒⇔		6	3.1			
- Aussageform ; Erfüllungsmenge		6	3.1			
- ∩ ∪ ⊆= nebst Beziehung zu ∧ ∨ ⇒ ⇔		6	3.1			
- Term ; Definitionsbereich, Wertebereich		6	3.1			
- Definition (von Aussageformen oder Termen)		6	3.1			
- äquivalentes Umformen von Aussageformen		6	3.1		2	1
	-,,			2.1		
Einzigkeitsnachweis (begründete Herleitung) und	1, 5, 6,	1, 2,	1.2,	3.2	1, 2, 3	2, 3, 5
Existenznachweis (Probe) bei	7, 8, 9, 14	9.3	2.4			
Bestimmungsaufgaben vom Typ I	14					
Die Rolle von <i>Stichproben</i> und Proben am		9.2	2.2	2.2	1	2
Spezialfall						
Unterbestimmte und überbestimmte Aufgaben	2, 14	9.2, 9.3				
Parameterhaltige Aufgaben als Aufgaben-		9.2,	2.2,	3.1,	2, 3	1, 2, 5
klassen; Determination, Lösungsdiskussion		9.3	3.2,	3.2,		
oder Angabe von Lösbarkeitsbedingungen			3.4	2.1, 2.3		
Logische Verwandtschaften zwischen Aussagen						
und Aufgaben						
- Umformen und Umkehren von Sätzen		7	2.1, 1.1	3.1	1, 3	1, 5
- Verallgemeinern und Spezialisieren von Aus-			1.1, 1.2,	1, 3.1,	1, 3	1, 3, 5
sagen und Aufgaben ; Grenzfälle		0 0 1	2.1, 2.3	3.2, 2.2	4 0 0	
Direkte Beweise von Allaussagen ; 3-spaltiges		8, 9.1	1.1,	1, 3.1,	1, 2, 3	1, 2,
Beweisschema			2.1	2.2		3, 5
Indirekte Beweise von Umkehrungen und von negierten Existenzaussagen				1, 3.1	1, 2, 3	1, 2, 3, 5
Äquivalenzrelationen, Abstraktion durch Äqui-					1	2
valenzklassenbildung					•	-
Prinzip des deduktiven Aufbaus einer Theorie						2

Sachkenntnisse und Fertigkeiten

Klasse 5

Satz von Euler über das Durchlaufen von Graphen .

Klasse 6

Definition der Wahrscheinlichkeit

Euklidischer Algorithmus zur ggT-Bestimmung .

Klasse 7

Arithmetik:

Termumformungen mit Hilfe der binomischen Formeln;

Schema zur Ermittlung des Hauptnenners bei Bruchgleichungen mit Variablen;

Satz über das arithmetische, das geometrische und das harmonische Mittel;

Abschätzungen beim Beweis von Ungleichheitsaussagen .

Geometrie:

Sätze über Inkreismittelpunkt und über Ankreismittelpunkte eines Dreiecks;

Sätze über Mittellinie, Mittelparallele und Schwerpunkt eines Dreiecks.

Zahlentheorie:

Grundgleichung der Zahlentheorie;

Erweiterung der Teilbarkeitslehre auf den Bereich der ganzen Zahlen

Klasse 8

Arithmetik:

Funktionen y = sgn(x) und y = [x] nebst Graphen;

Kurvenscharen als Graphen parameterhaltiger Funktionsgleichungen;

Satz über das quadratische Mittel .

Geometrie:

Sätze über Tangentenabschnitte, Zentrale und Berührungssehne;

Sekantentangentenwinkelsatz; Tangentenvierecksatz;

Umkehrungen von Sehnenvierecksatz, Peripheriewinkelsatz, Satz des Thales;

Zahlentheorie:

Definition der Kongruenz nach einem Modul;

Rechnen mit Kongruenzen:

Lösen von linearen Kongruenzen.

Klasse 9

Arithmetik:

Gaußscher Algorithmus zum Lösen linearer Gleichungssysteme:

Ermitteln ganzzahliger Lösungen von Gleichungen höheren Grades mit Hilfe der Vietaschen Wurzelsätze:

Transformation von Funktionsgraphen (Spiegelungen und Verschiebungen);

Geometrie:

Satz über den Fußpunkt der Winkelhalbierenden eines Dreiecks:

Satz über die Produkte der Höhenabschnitte eines Dreiecks;

Satz des Menelaos und Satz des Ceva nebst Umkehrung:

Der Kreis des Apollonius als geometrischer Ort;

Die algebraische Methode zur Lösung von Konstruktionsaufgaben;

Eigenschaften von Bewegungen: Definition und Sätze über die Spiegelung am Kreis:

Einige Begriffe und Sätze aus der Stereometrie.

Zahlentheorie:

Lineare Kongruenzen und Restklassen;

Diophantische Gleichungen; das Eulersche Reduktionsverfahren zum Lösen linearer diophantischer Gleichungen;

Das Rechnen mit Restklassen; der Begriff der Gruppe;

Der kleine Satz von Fermat und weitere Sätze über Primzahlen.

Klasse 10

Arithmetik:

Funktionen und ihre Graphen; Graphen von ganzen rationalen Funktionen n-ten Grades; Transformation von Funktionsgraphen (Dehnungen und Stauchungen).

Das Rechnen mit Vektoren (Addition, Multiplikation mit reeller Zahl); Vektoren im Koordinatensystem;

Das Rechnen mit komplexen Zahlen (Definitionen und Sätze); Fundamentalsatz der Algebra;

Geometrie

Einige Eigenschaften von regulären Polyedern;

Satz über die Eulersche Gerade;

Satz über den Feuerbachschen Kreis;

Einige goniometrische Formeln (Additionstheoreme, Theoreme über Summen trigonometrischer Funktionen, Theoreme für mehrfache Winkel und halbe Winkel);

Einige trigonometrische Sätze (verallgemeinerter Sinussatz, Kosinussatz, Tangenssatz, Heronische Inhaltsformel)

Literaturverzeichnis

- Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften Klasse 10. Chemnitz, 1994
- 2. Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften Klasse 5 . (überarbeitete Auflage); Chemnitz, 1993
- 3. König, Helmut: Arbeitsgemeinschaften Klasse 5 eine Anleitung für AG-Leiter . (überarbeitete Auflage); Chemnitz, 1993
- 4. Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften Klasse 6 . (überarbeitete Auflage); Chemnitz, 1995
- 5. König, Helmut: Arbeitsgemeinschaften Klasse 6 eine Anleitung für AG-Leiter . (überarbeitete Auflage); Chemnitz, 1995
- 6. Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften Klasse 7. (erweiterte Neuauflage); Chemnitz, 1996
- 7. König, Helmut: Arbeitsgemeinschaften Klasse 7 eine Anleitung für AG-Leiter . (erweiterte Neuauflage); Chemnitz, 1996
- 8. Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften Klasse 8 . (erweiterte Neuauflage); Chemnitz, 1997
- 9. König, Helmut: Arbeitsgemeinschaften Klasse 8 eine Anleitung für AG-Leiter (überarbeitete Auflage); Chemnitz, 1997
- 10. Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften Klasse 9 (überarbeitete Auflage); Chemnitz, 1995
- König, Helmut: Arbeitsgemeinschaften Klasse 9 eine Anleitung für AG-Leiter.
 (überarbeitete Auflage); Chemnitz, 1995
- Aufgabensammlung für Kreisarbeitsgemeinschaften Klasse 10.
 TU Karl-Marx-Stadt, 1983
- 13. Sachse / Rieger: Programm zur Durchführung von Kreisarbeitsgemeinschaften Mathematik in Klasse 10 . Diplomarbeit, TU Karl-Marx-Stadt, 1983
- 14. König, Helmut: Heuristik beim Lösen problemhafter Aufgaben aus dem außerunterrichtlichen Bereich . Chemnitz, 1996
- 15. König, Helmut: Einige für den Mathematikunterricht bedeutsame heuristische Vorgehensweisen . In: Der Mathematikunterricht, Jahrgang 38, Heft 3, Mai 1992, S.24-38
- König, Helmut, Zum Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen in Arbeitsgemeinschaften und in Korrespondenzzirkeln. In: Förderung von Jugendlichen in der Mathematik.
 K.H.Bock, Bad Honnef, 1993
- 17. König, Helmut: Zum Darstellen der Lösung mathematischer Aufgaben im außerunterricht lichen Bereich und zum Vermitteln von logischen Grundlagen in Arbeitsgemeinschaften. Chemnitz, 1996
- 18. Polya, Georg: Schule des Denkens. Tübingen, 1995
- 19. Polya, Georg: Vom Lösen mathematischer Aufgaben, Band 1 und Band 2. Basel, Stuttgart, 1979 und 1983
- 20 Polya, Georg: Mathematik und plausibles Schließen, Band 1 und Band 2 .Basel, Stuttgart, 1954