



UNIVERSITÄT
LEIPZIG

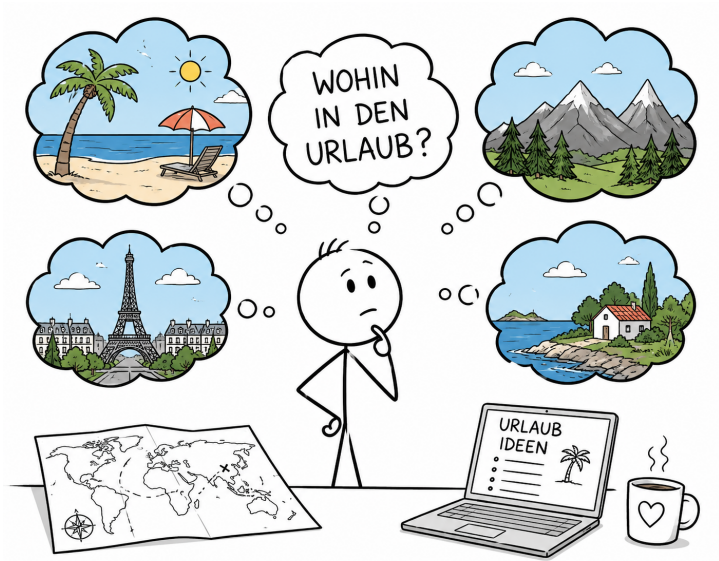
Der perfekte Roadtrip: Hamiltonkreise in (symmetrischen) Graphen

Sofia Brenner

Universität Leipzig

27. August 2026

Sommerferien



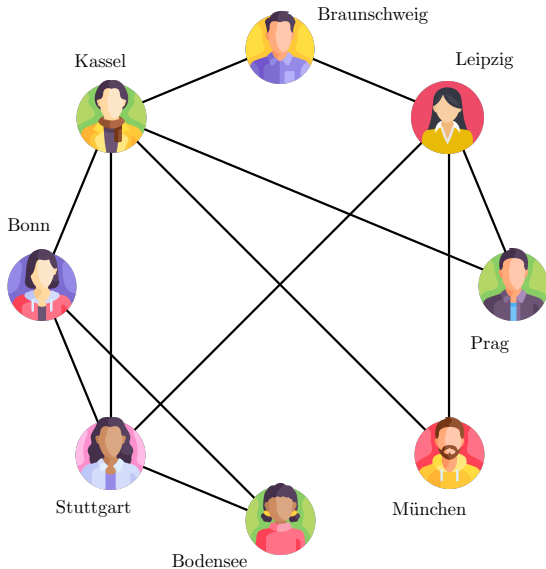
Sommerferien...



Sommerferien



Sommerferien

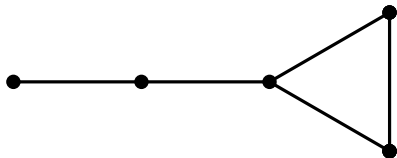


Sommerferien

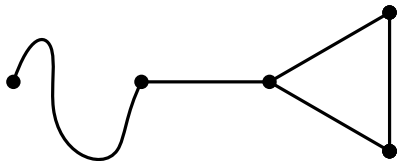
Kann ich alle meine Freunde einmal besuchen und am Ende wieder zurück nach Leipzig fahren?

Graphen

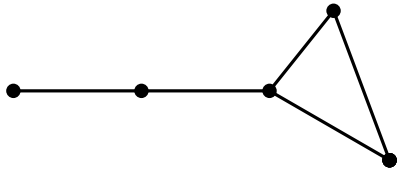
Graphen



Graphen

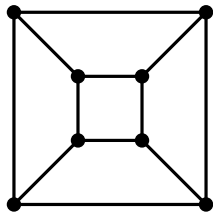


Graphen

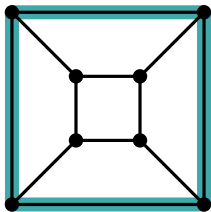


Kreise in Graphen

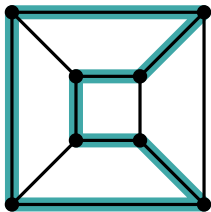
Kreise in Graphen



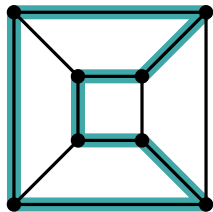
Kreise in Graphen



Kreise in Graphen



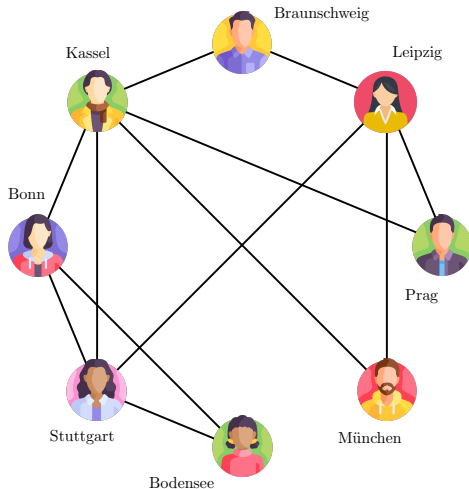
Kreise in Graphen



Ein **Hamiltonkreis** ist ein Kreis, der jeden Knoten genau einmal enthält.

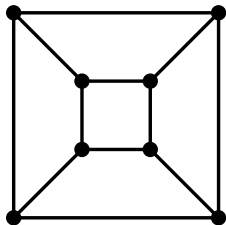
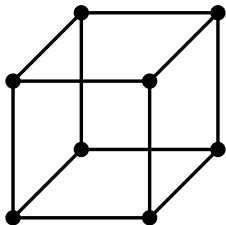
Sommerferien

Kann ich meine Freunde alle einmal besuchen und am Ende wieder zurück nach Leipzig fahren?

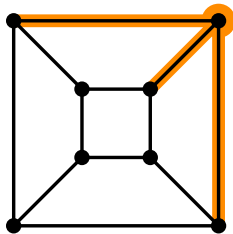
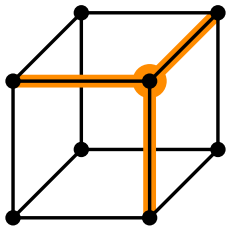


Symmetrische Graphen

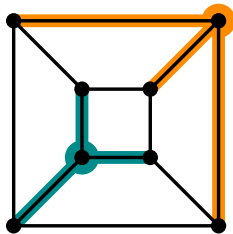
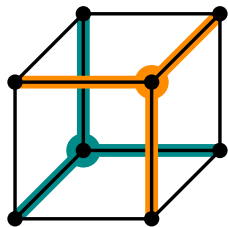
Symmetrische Graphen



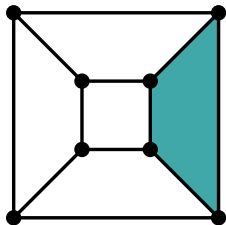
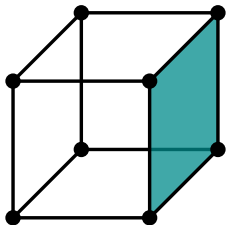
Symmetrische Graphen



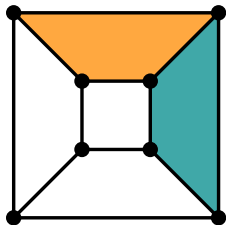
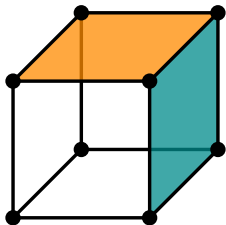
Symmetrische Graphen



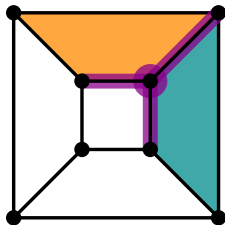
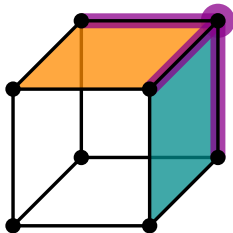
Symmetrische Graphen



Symmetrische Graphen

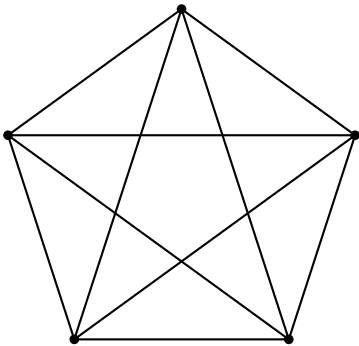


Symmetrische Graphen

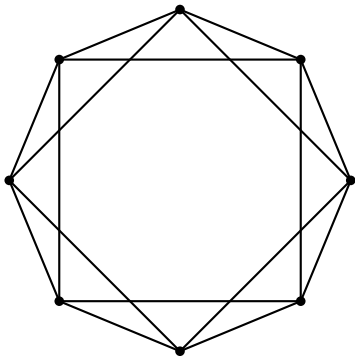


Symmetrische Graphen

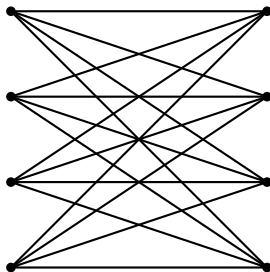
Symmetrische Graphen



Symmetrische Graphen

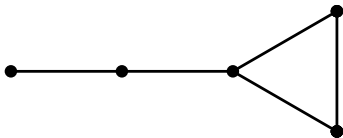


Symmetrische Graphen

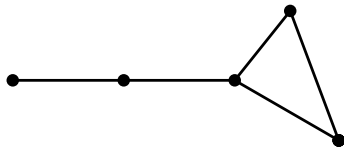


Symmetrische Graphen

Symmetrische Graphen



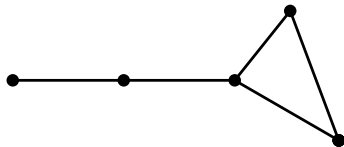
Symmetrische Graphen



Symmetrische Graphen

Symmetrie

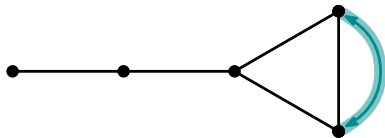
Eine Symmetrie eines Graphen vertauscht seine Knoten, sodass Kanten erhalten bleiben.



Symmetrische Graphen

Symmetrie

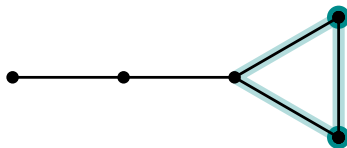
Eine Symmetrie eines Graphen vertauscht seine Knoten, sodass Kanten erhalten bleiben.



Symmetrische Graphen

Symmetrie

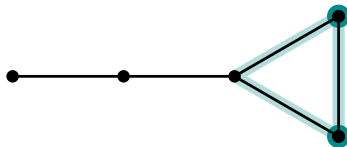
Eine Symmetrie eines Graphen vertauscht seine Knoten, sodass Kanten erhalten bleiben.



Symmetrische Graphen

Symmetrie

Eine Symmetrie eines Graphen vertauscht seine Knoten, sodass Kanten erhalten bleiben.



Ein Graph heißt **asymmetrisch**, wenn seine einzige Symmetrie ist, alle Knoten fest zu lassen.

Quiz

Quiz

Ist dieser Graph asymmetrisch?

Quiz

Ist dieser Graph asymmetrisch?



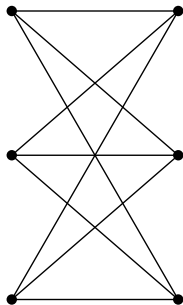
JA!



NEIN!

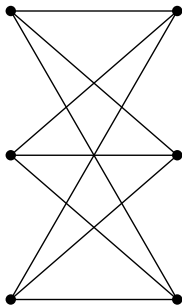
Quiz

Ist dieser Graph asymmetrisch?



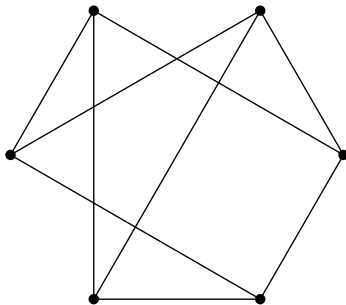
Quiz

Ist dieser Graph asymmetrisch?



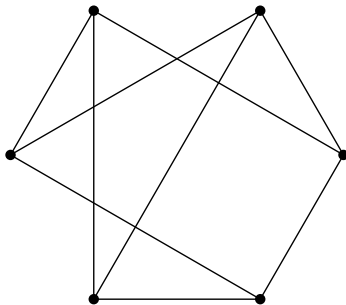
Quiz

Ist dieser Graph asymmetrisch?



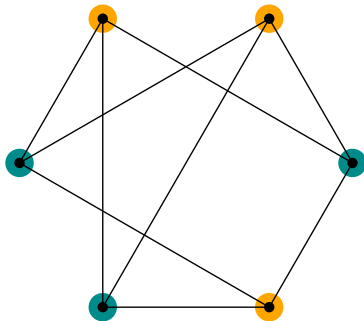
Quiz

Ist dieser Graph asymmetrisch?



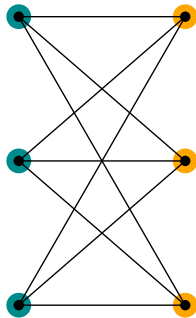
Quiz

Ist dieser Graph asymmetrisch?



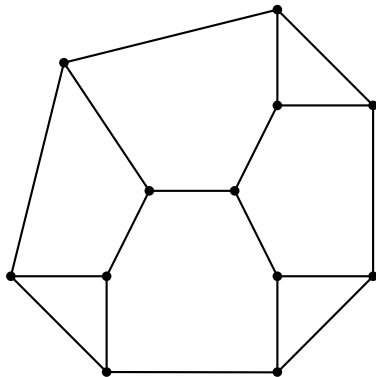
Quiz

Ist dieser Graph asymmetrisch?



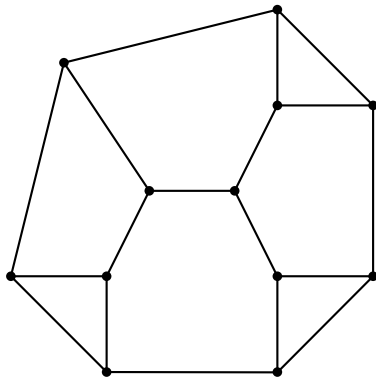
Quiz

Ist dieser Graph asymmetrisch?



Quiz

Ist dieser Graph asymmetrisch?



Transitive Graphen

Transitive Graphen

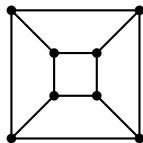
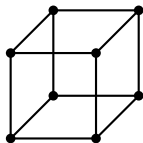
Transitive Graphen

Ein Graph heißt **transitiv**, wenn jeder Knoten auf jeden anderen durch eine Symmetrie abgebildet werden kann.

Transitive Graphen

Transitive Graphen

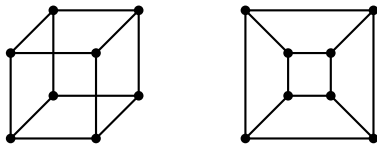
Ein Graph heißt **transitiv**, wenn jeder Knoten auf jeden anderen durch eine Symmetrie abgebildet werden kann.



Transitive Graphen

Transitive Graphen

Ein Graph heißt **transitiv**, wenn jeder Knoten auf jeden anderen durch eine Symmetrie abgebildet werden kann.



Transitive Graphen haben viele tolle Eigenschaften!

Transitive Graphen und Hamiltonkreise

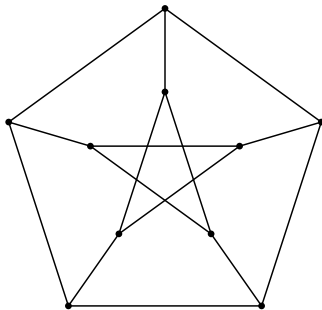
Transitive Graphen und Hamiltonkreise

Transitive Graphen und Hamiltonkreise

Lovász-Vermutung

Bis auf fünf Ausnahmen hat jeder transitive Graph einen Hamiltonkreis.

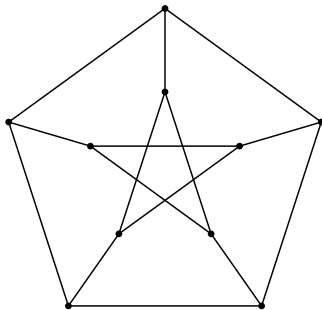
Transitive Graphen und Hamiltonkreise



Lovász-Vermutung

Bis auf fünf Ausnahmen hat jeder transitive Graph einen Hamiltonkreis.

Transitive Graphen und Hamiltonkreise



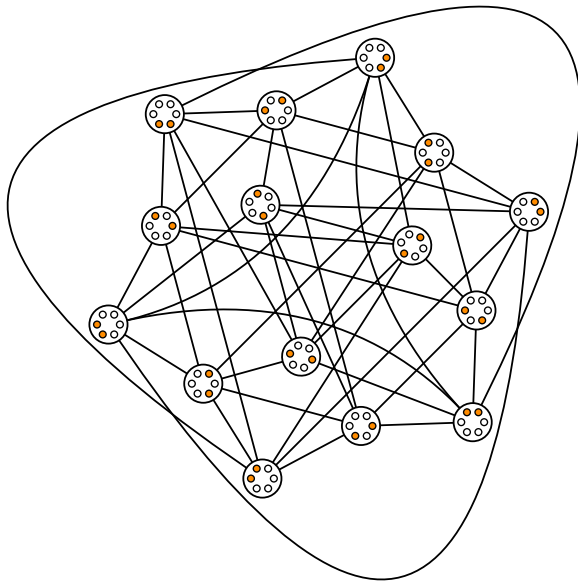
Lovász-Vermutung

Bis auf fünf Ausnahmen hat jeder transitive Graph einen Hamiltonkreis.

- bewiesen nur in Spezialfällen, z.B. für Graphen mit p Knoten (p Primzahl)

Kneser-Graphen

Kneser-Graphen

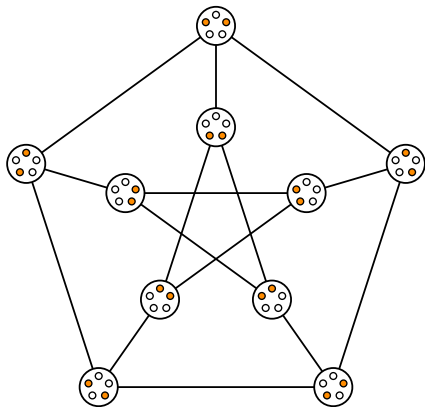


Kneser-Graphen

Theorem (Merino-Mütze-Namrata, 2022)

Jeder Kneser-Graph außer $K_{5,2}$ hat einen Hamiltonkreis.

Kneser-Graphen



Theorem (Merino-Mütze-Namrata, 2022)

Jeder Kneser-Graph außer $K_{5,2}$ hat einen Hamiltonkreis.

Ein anderer Blick auf Hamiltonkreise

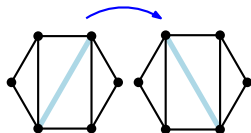
Ein anderer Blick auf Hamiltonkreise

Ziel: Rekonfiguration kombinatorischer Objekte mittels festgelegter Modifikationen (Flips)

Ein anderer Blick auf Hamiltonkreise

Ziel: Rekonfiguration kombinatorischer Objekte mittels festgelegter Modifikationen (Flips)

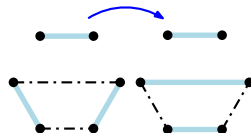
- ▶ Triangulierungen mit Diagonalenflip



Ein anderer Blick auf Hamiltonkreise

Ziel: Rekonfiguration kombinatorischer Objekte mittels festgelegter Modifikationen (Flips)

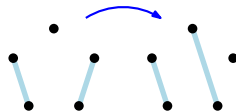
- ▶ Triangulierungen mit Diagonalenflip
- ▶ (nichtkreuzende) perfekte Matchings mit alternierenden Kreisen



Ein anderer Blick auf Hamiltonkreise

Ziel: Rekonfiguration kombinatorischer Objekte mittels festgelegter Modifikationen (Flips)

- ▶ Triangulierungen mit Diagonalenflip
- ▶ (nichtkreuzende) perfekte Matchings mit alternierenden Kreisen
- ▶ ungerade Matchings mit Kantenflips



Ein anderer Blick auf Hamiltonkreise

Ziel: Rekonfiguration kombinatorischer Objekte mittels festgelegter Modifikationen (Flips)

- ▶ Triangulierungen mit Diagonalenflip
- ▶ (nichtkreuzende) perfekte Matchings mit alternierenden Kreisen
- ▶ ungerade Matchings mit Kantenflips

Fragen

Ein anderer Blick auf Hamiltonkreise

Ziel: Rekonfiguration kombinatorischer Objekte mittels festgelegter Modifikationen (Flips)

- ▶ Triangulierungen mit Diagonalenflip
- ▶ (nichtkreuzende) perfekte Matchings mit alternierenden Kreisen
- ▶ ungerade Matchings mit Kantenflips

Fragen

- ▶ kann jedes Objekt in jedes andere rekonfiguriert werden?

Ein anderer Blick auf Hamiltonkreise

Ziel: Rekonfiguration kombinatorischer Objekte mittels festgelegter Modifikationen (Flips)

- ▶ Triangulierungen mit Diagonalenflip
- ▶ (nichtkreuzende) perfekte Matchings mit alternierenden Kreisen
- ▶ ungerade Matchings mit Kantenflips

Fragen

- ▶ kann jedes Objekt in jedes andere rekonfiguriert werden?
- ▶ wie viele Flips braucht man?

Ein anderer Blick auf Hamiltonkreise

Ziel: Rekonfiguration kombinatorischer Objekte mittels festgelegter Modifikationen (Flips)

- ▶ Triangulierungen mit Diagonalenflip
- ▶ (nichtkreuzende) perfekte Matchings mit alternierenden Kreisen
- ▶ ungerade Matchings mit Kantenflips

Fragen

- ▶ kann jedes Objekt in jedes andere rekonfiguriert werden?
- ▶ wie viele Flips braucht man?
- ▶ wie schwer ist es, diese Distanz zu bestimmen?

Ein anderer Blick auf Hamiltonkreise

Ziel: Rekonfiguration kombinatorischer Objekte mittels festgelegter Modifikationen (Flips)

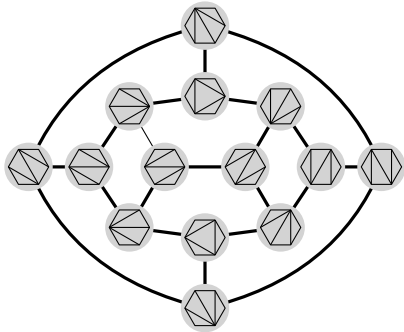
- ▶ Triangulierungen mit Diagonalenflip
- ▶ (nichtkreuzende) perfekte Matchings mit alternierenden Kreisen
- ▶ ungerade Matchings mit Kantenflips

Fragen

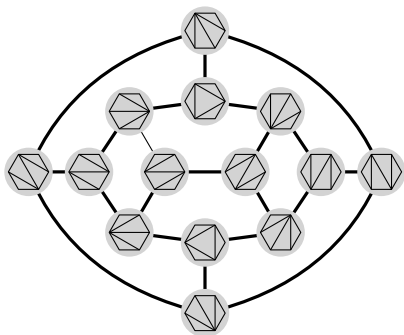
- ▶ kann jedes Objekt in jedes andere rekonfiguriert werden?
- ▶ wie viele Flips braucht man?
- ▶ wie schwer ist es, diese Distanz zu bestimmen?
- ▶ kann man alle Objekte mittels Flips (genau einmal) auflisten (**Graycode**)?

Flipgraph

Flipgraph



Flipgraph



Questions

- ▶ kann jedes Objekt in jedes andere rekonfiguriert werden? $\leftrightarrow$ Zusammenhang
 - ▶ minimale Anzahl benötigter Flips und Komplexität $\leftrightarrow$ Distanz im Flipgraphen
 - ▶ liste alle Objekte genau einmal mittels Flips $\leftrightarrow$ Hamiltonpfad/-kreis
- [Dorfer 26]

Graycodes

Graycodes

Zigzag-Konstruktion: Hamiltonkreise im Flipgraphen existieren für...

Graycodes

Zigzag-Konstruktion: Hamiltonkreise im Flipgraphen existieren für...

- ▶ Bitstrings [Gray 53]
- ▶ Permutationen [Steinhaus, Johnson, Trotter 60s]
- ▶ Permutationen mit verbotenen Pattern [Hartung, Hoang, Mütze, Williams 20]
- ▶ azyklische Orientierungen chordaler Graphen [Cardinal et al. 23]
- ▶ Rektangulierungen [Merino, Mütze 23]
- ▶ Binärbäume mit verbotenen Pattern [Gregor, Mütze, Namrata 23]
- ▶ Facegitter verschiedener Polyeder [Behrooznia, B., Merino, Mütze, Rieck, Verciani 26]

Graycodes

Zigzag-Konstruktion: Hamiltonkreise im Flipgraphen existieren für...

- ▶ Bitstrings [Gray 53]
- ▶ Permutationen [Steinhaus, Johnson, Trotter 60s]
- ▶ Permutationen mit verbotenen Pattern [Hartung, Hoang, Mütze, Williams 20]
- ▶ azyklische Orientierungen chordaler Graphen [Cardinal et al. 23]
- ▶ Rektangulierungen [Merino, Mütze 23]
- ▶ Binärbäume mit verbotenen Pattern [Gregor, Mütze, Namrata 23]
- ▶ Facegitter verschiedener Polyeder [Behrooznia, B., Merino, Mütze, Rieck, Verciani 26]

Nicht-Existenz:

Graycodes

Zigzag-Konstruktion: Hamiltonkreise im Flipgraphen existieren für...

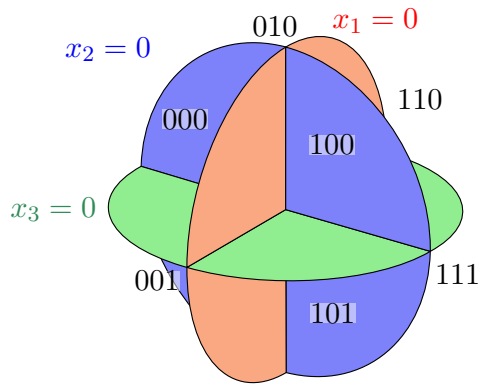
- ▶ Bitstrings [Gray 53]
- ▶ Permutationen [Steinhaus, Johnson, Trotter 60s]
- ▶ Permutationen mit verbotenen Pattern [Hartung, Hoang, Mütze, Williams 20]
- ▶ azyklische Orientierungen chordaler Graphen [Cardinal et al. 23]
- ▶ Rektangulierungen [Merino, Mütze 23]
- ▶ Binärbäume mit verbotenen Pattern [Gregor, Mütze, Namrata 23]
- ▶ Facegitter verschiedener Polyeder [Behrooznia, B., Merino, Mütze, Rieck, Verciani 26]

Nicht-Existenz:

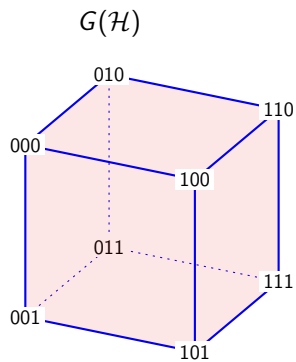
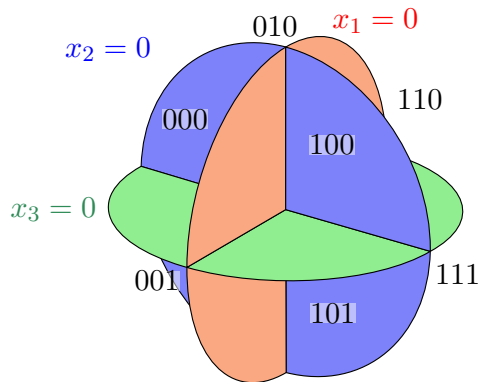
- ▶ Gegenbeispiel zu Winklers Vermutung über Venn-Diagramme [B., Kleist, Mütze, Rieck, Verciani 26]

Koordinatenarrangement

Koordinatenarrangement

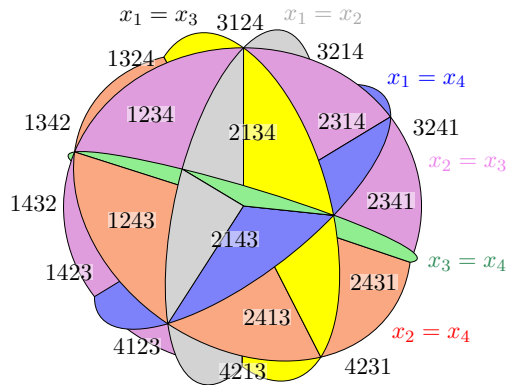


Koordinatenarrangement

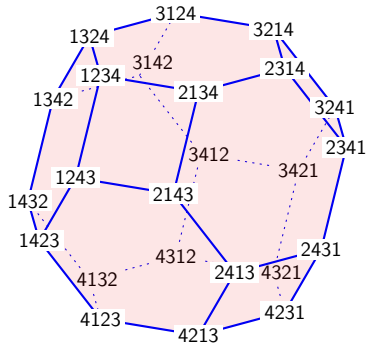
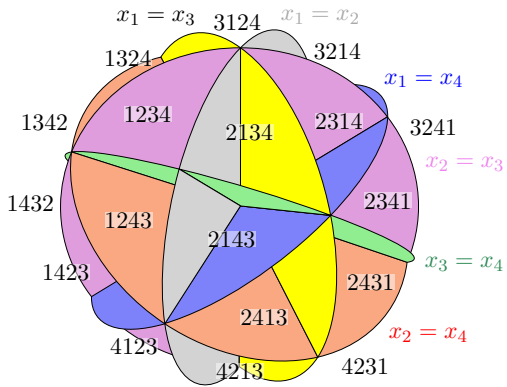


Zopfarrangement

Zopfarrangement

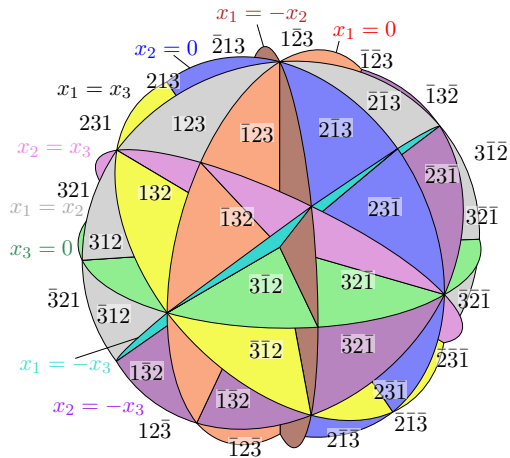


Zopfarrangement

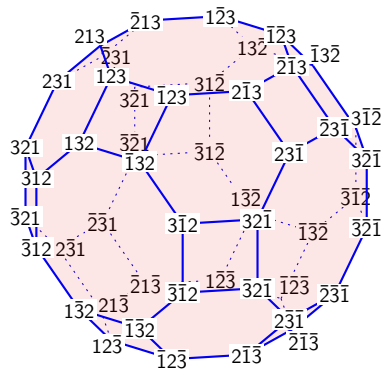
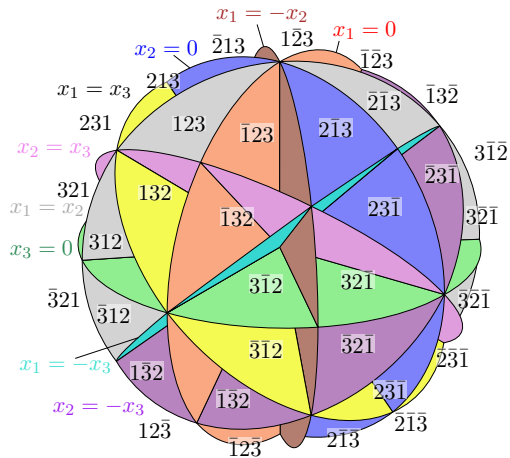


Coxeterarrangement vom Typ B

Coxeterarrangement vom Typ B



Coxeterarrangement vom Typ B



Hyperebenenarrangements

Hyperebenenarrangements

Satz (B., Cardinal, McConville, Merino, Mütze 26)

Ist $\mathcal{H}$ ein **superauflösbares** Hyperebenenarrangement vom **Rang** ≥ 2 , so hat $\mathcal{G}(\mathcal{H})$ einen Hamiltonkreis.

Hyperebenenarrangements

Satz (B., Cardinal, McConville, Merino, Mütze 26)

Ist $\mathcal{H}$ ein **superauflösbares** Hyperebenenarrangement **vom Rang ≥ 2** , so hat $\mathcal{G}(\mathcal{H})$ einen Hamiltonkreis.

- ▶ Bitstrings [Gray 53]
- ▶ Permutationen [Steinhaus, Johnson, Trotter 60s]
- ▶ Permutationen mit verbotenen Pattern [Hartung, Hoang, Mütze, Williams 20]
- ▶ azyklische Orientierungen chordaler Graphen [Cardinal et al. 23]
- ▶ Rektangulierungen [Merino, Mütze 23]
- ▶ Binärbäume mit verbotenen Pattern [Gregor, Mütze, Namrata 23]
- ▶ Facegitter verschiedener Polyeder [Behrooznia, B., Merino, Mütze, Rieck, Verciani 26]

Hyperebenenarrangements

Satz (B., Cardinal, McConville, Merino, Mütze 26)

Ist $\mathcal{H}$ ein **superauflösbares** Hyperebenenarrangement **vom Rang ≥ 2** , so hat $\mathcal{G}(\mathcal{H})$ einen Hamiltonkreis.

- ▶ Bitstrings [Gray 53]
- ▶ Permutationen [Steinhaus, Johnson, Trotter 60s]
- ▶ Permutationen mit verbotenen Pattern [Hartung, Hoang, Mütze, Williams 20]
- ▶ azyklische Orientierungen chordaler Graphen [Cardinal et al. 23]
- ▶ Rektangulierungen [Merino, Mütze 23]
- ▶ Binärbäume mit verbotenen Pattern [Gregor, Mütze, Namrata 23]
- ▶ Facegitter verschiedener Polyeder [Behrooznia, B., Merino, Mütze, Rieck, Verciani 26]

... und ganz viele neue Resultate!

Und doch...

Lovász-Vermutung

Bis auf fünf Ausnahmen hat jeder transitive Graph einen Hamiltonkreis.

Vielen Dank!

